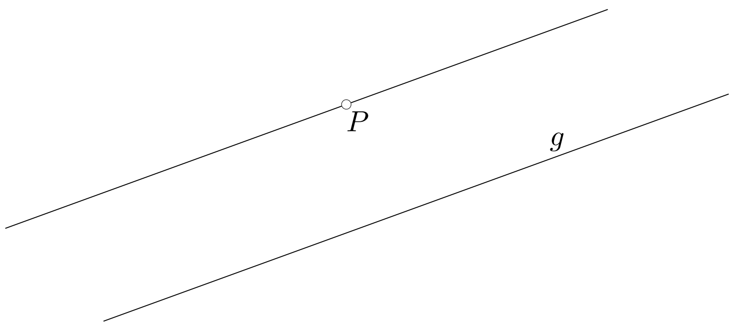
Was ist ein Punkt?

Wer sich keinen Punkt denken kann,
der ist einfach zu faul dazu.
Wilhelm Busch



In der Geometrie zeichnen wir Linien besonders sauber und dünn. Der Schnitt von Geraden ergibt einen Punkt. Für eine genaue Position sollte er von geringer Ausdehnung sein.
Euklid: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Für eine mathematische Theorie, also das was wir im Kopf haben, musste auf eine Definition der Grundbegriffe (Punkte, Geraden, Ebenen) - weil nicht realisierbar - verzichtet werden. Es liegt die gleiche Situation wie beim Begriff Wahrscheinlichkeit vor (Axiomensystem von Kolmogorow). Den Grundbegriffen werden durch ein Axiomensystem implizit Eigenschaften zugeweisen.

Hilbert überarbeitete das Axiomensystem von Euklid.

Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die diese Punkte enthält.

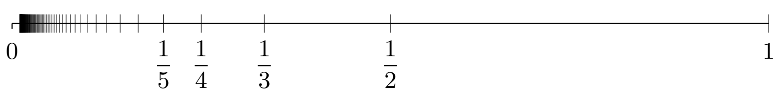
Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P außerhalb von g gibt es genau eine Gerade, die zu g parallel ist und durch den Punkt P verläuft (Parallelenaxiom der ebenen Geometrie).

Parallel bedeutet dabei, dass die Geraden in einer Ebene liegen, aber keinen gemeinsamen Punkt haben.

usw.

Durch die Markierung von 0 und 1 auf einer Geraden werden eine Längeneinheit festgelegt und den ganzen Zahlen Punkte, also Positionen, zugeordnet. Wir machen mit den Brüchen $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, weiter.

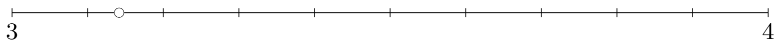


Die Zuordnung ist von theoretischer Natur ($n \in \mathbb{N}$). Gezeichnet wurden die Punkte bis $n = 100$.
In einem letzten Schritt stellen wir uns vor, den reellen Zahlen Punkte auf einer Geraden zuzuordnen. Alle möglichen Rechen- und Konstruktionsergebnisse (z. B. die Diagonallänge $\sqrt{2}$ eines Quadrats mit der Seitenlänge 1) finden auf der Geraden (bzw. in einem xy-Koordinatensystem mit (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$) ihren Platz. Im Axiomensystem von Kolmogorow für die ebene euklidische Geometrie findet sich: Jede Gerade ist eine Punktmenge. Eine Strecke der Länge a besteht aus überabzählbar vielen Punkten mit dem Lebesgue-Maß null (Maß für Längen, Flächeninhalte und Volumen). Eine Addition der Nullen ist nicht möglich.

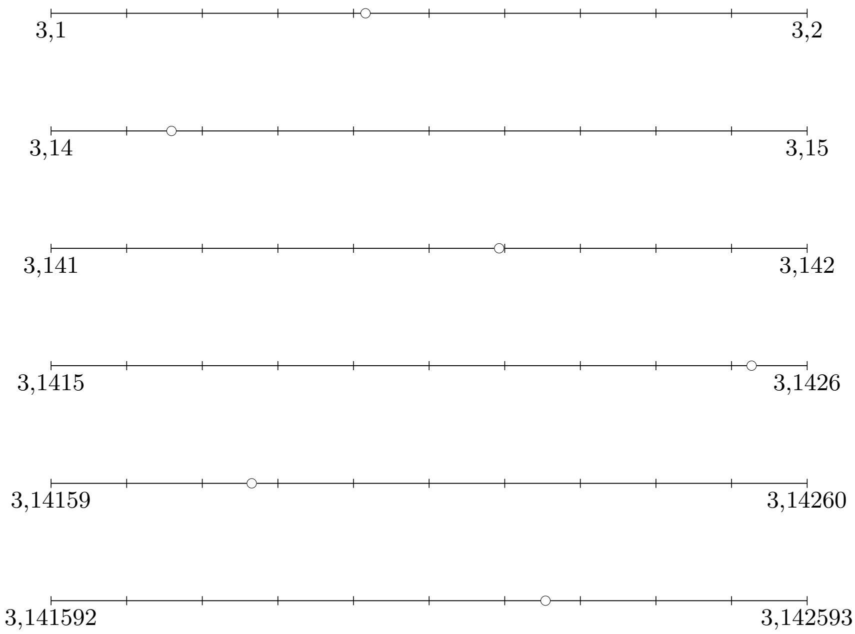
Was ist ein Punkt?

Schauen wir uns den Punkt $(\pi;0)$ an.

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626\ldots$$



Für eine genauere Betrachtung wird der Abschnitt wiederholt jeweils 10-fach gezoomt.



Dieses Vorgehen können wir uns wegen der Irrationalität von π in der Theorie unbegrenzt fortgesetzt denken. Der Punkt $(\pi;0)$ und die Zahl π sind - wie jede Zahl - keine realen Objekte. Die Zahl 3 (z. B.) existiert nur in unserem Geist, in unserer Umgebung finden wir 3 Hühner, 3 Tische usw., die Zahl 3 suchen wir hier vergebens.