Proportionalität

Ein Körper mit der Masse m, an dem eine Kraft F angreift, erfährt eine Beschleunigung a.
In der Physik wird experimentell nachgewiesen:

$$F \sim a \quad \text{falls } m \text{ konstant ist, d.h. es gibt ein } k_m \text{ mit } F = k_m \cdot a$$
$$F \sim m \quad \text{falls } a \text{ konstant ist, d.h. es gibt ein } k_a \text{ mit } F = k_a \cdot m$$

Hieraus folgt: $F \sim m \cdot a$, d.h. es gibt ein k mit $F = k \cdot m \cdot a$

Diese Schlussweise wollen wir im Folgenden untersuchen. Es gilt der allgemeine Sachverhalt:

Ist eine Größe proportional zu zwei anderen Größen,
so ist sie auch proportional zum Produkt der Größen.

Beweis:

Die Größe F kann als Funktion von m und a aufgefasst werden, etwas allgemeiner:

Die Größe f kann als Funktion von x und y aufgefasst werden. Die Schreibweise $f(x, y)$ bringt dies zum Ausdruck.

Es ist $f(x, 1) = k_{y=1} \cdot x$ Bei festem $y = 1$ ist f proportional zu x.
$f(1, y) = k_{x=1} \cdot y$ Bei festem $x = 1$ ist f proportional zu y.

$\Longrightarrow \quad f(1, 1) = k_{y=1} = k_{x=1} = k$ abgekürzt

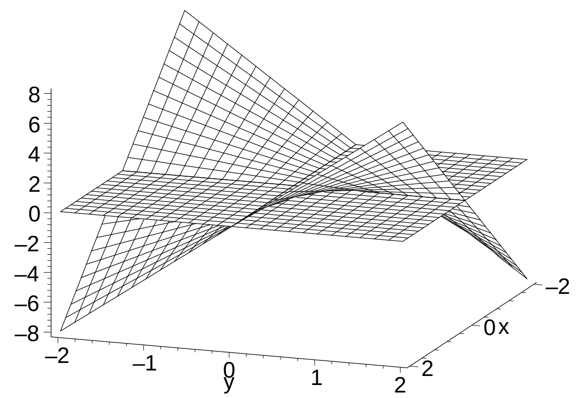
Es ist $f(x, a) = k_{y=a} \cdot x$ Bei festem $y = a$ ist f proportional zu x.

$\Longrightarrow \quad f(1, a) = k_{y=a} = k_{x=1} \cdot a = k \cdot a$

$\Longrightarrow \quad f(x, a) = k \cdot a \cdot x \quad \Longrightarrow \quad f(x, y) = k \cdot x \cdot y \quad (a = y)$

Wird in der Physik die Einheit von F gerade so gewählt, dass für die Maßzahlen $F(1, 1) = 1$ gilt, so erhalten wir $F = m \cdot a$.

Erläutere an dem Graph von $f(x, y) = 2 \cdot x \cdot y$ die proportionalen Zusammenhänge.



Maple: plot3d($f(x,y)$, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, axes = frame);