

Potenzmenge

Die Potenzmenge $P(M)$ einer Menge M ist die Menge aller ihrer Teilmengen.

$$P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$P(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \quad \emptyset = \{ \}$$

Für eine Menge M mit n Elementen hat die Potenzmenge $P(M)$ 2^n Elemente.
Für jedes neue Element verdoppelt sich die Anzahl.

$$\begin{array}{l|l} \emptyset & \{3\} \\ \{1\} & \{1, 3\} \\ \{2\} & \{2, 3\} \\ \{1, 2\} & \{1, 2, 3\} \end{array}$$

$$|P(\{1, 2, 3\})| = |P(\{1, 2\})| \cdot 2$$

$P(\{1, 2, 3\})$ enthält die Teilmengen von $\{1, 2\}$ und die um das Element 3 vergrößerten Teilmengen von $\{1, 2\}$. Es gibt daher gleichviele Teilmengen von $P(\{1, 2, 3\})$ mit und ohne 3.

Eine Menge mit 175 Elementen besitzt mehr Teilmengen als die Erde Atome. Das ist jedoch kein Problem. Einzelne Teilmengen können wir angeben.

Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist von einfacher, linear verketteter Struktur (abzählbar unendlich). Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau einen Nachfolger $n + 1$. Die Mengen \mathbb{Z} , $2\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, aber auch \mathbb{Q} sind von gleicher Struktur. Ihre Elemente lassen sich linear anordnen, d. h. mit den natürlichen Zahlen indizieren. Anders formuliert, A ist abzählbar unendlich, wenn es eine Bijektion (umkehrbar eindeutige Zuordnung) von \mathbb{N} auf A gibt.

Georg Cantor (1845-1918) entdeckte, dass die Menge $P(\mathbb{N})$ nicht abzählbar unendlich ist, also von komplizierterer Struktur (überabzählbar). Der Versuch, $P(\mathbb{N})$ mit \mathbb{N} zu indizieren, führt zu einem Widerspruch. Nehmen wir also an, es liege eine Indizierung (Bijektion φ) vor.

$$\begin{array}{ll} 1 \xleftrightarrow{\varphi} \{ \dots \} & 1 \notin \varphi(1) \\ 2 \longleftrightarrow \{ \dots, 2, \dots \} & 2 \in \varphi(2) \\ 3 \longleftrightarrow \{ \dots, 3, \dots \} & \\ 4 \longleftrightarrow \{ \dots \} & \\ \dots & \\ q \longleftrightarrow \underbrace{\{ n \mid n \notin \varphi(n) \}}_{M = \varphi(q)} & \end{array}$$

Die Teilmengen enthalten ihren Index oder sie enthalten ihn nicht. Wir betrachten die Menge M aller Indizes, die jeweils nicht in der zugeordneten Menge enthalten sind. Als Teilmenge von \mathbb{N} ist M in der Aufreihung vorhanden. Sei ihr Index q . Gilt nun $q \in M$ oder $q \notin M$?

Aus $q \in M$ folgt $q \notin M$ und umgekehrt.

Um festzustellen, ob zwei endliche Mengen A und B gleichviele Elemente haben, kann auf das Nachzählen verzichtet werden. Es genügt, eine eindeutige Entsprechung (Bijektion) zwischen den Elementen der beiden Mengen zu finden.

$$\begin{aligned}\oplus &\longleftrightarrow \triangle \\ \ominus &\longleftrightarrow \nabla \\ \otimes &\longleftrightarrow \sqcap \\ \otimes &\longleftrightarrow \sqcup\end{aligned}$$

Mengen, die bijektiv aufeinander abgebildet werden können, heißen *gleichmächtig*. Die häufig beobachtbare bijektionsbedingte Übertragung des Begriffs Anzahl auf unendliche Mengen verführt zu Irritationen. Unendliche Mengen unterscheiden sich in der Komplexität der Konstruktion, nicht in der Anzahl ihrer Elemente.

1874 bewies Cantor, dass die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} zu den natürlichen Zahlen \mathbb{N} nicht gleichmächtig ist (Sprechweise: \mathbb{R} hat eine größere Mächtigkeit als \mathbb{N}). Bis an sein Lebensende versuchte Cantor zu beweisen, dass jede unendliche Teilmenge von \mathbb{R} entweder die Mächtigkeit von \mathbb{N} oder die von \mathbb{R} hat. Dies ist die sogenannte *Kontinuumshypothese*. Dieser Sachverhalt konnte erst durch die Ergebnisse von Gödel (1938) und Cohen (1963) endgültig geklärt werden. Danach kann die Kontinuumshypothese in der Mengenlehre weder bewiesen noch widerlegt werden. Sie kann, ebenso gut wie ihre Negation, als neues Axiom verwendet werden.

An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die Zahl 3 (z.B.) nur in unserem Geist existiert, in unserer Umgebung finden wir 3 Hühner, 3 Tische usw., die Zahl 3 suchen wir hier vergebens. In Gedanken können wir uns unendlich viele Zahlen vorstellen. Wir können in Gedanken Vielfältiges fantasievoll konstruieren (Potenzmenge, Potenzmenge einer Potenzmenge, verschiedene Zahlbereiche) und erwarten lediglich, dass es zu keinen Widersprüchen führt. Diese Theorien sind von der beobachtbaren Realität zu unterscheiden.

Alternative Begründungen

Den Teilmengen der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (z. B.) können in umkehrbar eindeutiger Weise 0/1-Folgen der Länge 5 zugeordnet werden.

$$\begin{aligned}\{ \} &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0) \\ \{1\} &\longleftrightarrow (1, 0, 0, 0, 0) \\ \{2\} &\longleftrightarrow (0, 1, 0, 0, 0) \\ \{1, 4\} &\longleftrightarrow (1, 0, 0, 1, 0) \\ \{2, 4, 5\} &\longleftrightarrow (0, 1, 0, 1, 1) \\ \{1, 2, 3, 4\} &\longleftrightarrow (1, 1, 1, 1, 0) \\ &\dots\end{aligned}$$

Für jede Stelle in der 0/1-Folge bestehen 2 Möglichkeiten, daher gibt es 2^5 Teilmengen von A . Allgemein sind es für eine n -elementige Menge 2^n Teilmengen.

Die Zuordnung kann für $A = \mathbb{N}$ auf unendliche 0/1-Folgen erweitert werden.

$$\begin{aligned}\{ \} &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ \{2, 4, 6, 8, \dots\} &\longleftrightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \\ &\dots\end{aligned}$$

Mit einem Diagonalargument ist zu erkennen, dass die unendlichen 0/1-Folgen nicht abzählbar sind. Das muss dann auch für $P(\mathbb{N})$ gelten. Nehmen wir an, die 0/1-Folgen wären abzählbar und erzeugen einen Widerspruch.

$$\begin{aligned}1 &\longleftrightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) \\ 2 &\longleftrightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \\ 3 &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots) \\ 4 &\longleftrightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots) \\ 5 &\longleftrightarrow (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \\ 6 &\longleftrightarrow (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots) \\ &\dots\end{aligned}$$

Von der Folge der Diagonalelemente

$(0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ bilden wir die komplementäre Folge:

$(1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ Sie stimmt mit keiner Folge überein.

Die Aufreihung ist somit nicht vollständig. Würde man die komplementäre Folge ergänzen, könnte der Diagonalschluss wiederholt werden.

Die 0/1-Folgen können als unendlicher Binärbaum veranschaulicht werden. Der strukturelle Unterschied zu \mathbb{N} wird sichtbar.

