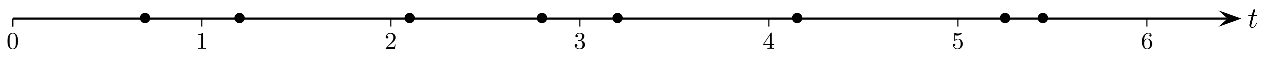
Poisson-Prozess

Punktförmige Signale werden in zufälliger Aufeinanderfolge ausgesendet.
Wir wollen diese Punktverteilungen auf der Zeitachse untersuchen.



Das Intervall $I = [0 \mid t]$ teilen wir in n gleiche Teile und wählen n so groß, dass jeder Abschnitt höchstens einen Punkt enthält. Wir nehmen an, dass pro Zeiteinheit im Schnitt λ Signale gesendet werden. Der Erwartungswert für I beträgt daher $\mu = \lambda \cdot t$ Punkte. Pro Abschnitt wird mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{\lambda \cdot t}{n}$ ein Signal gesendet. Der Prozess ist zeitinvariant, also von der Lage von I unabhängig.

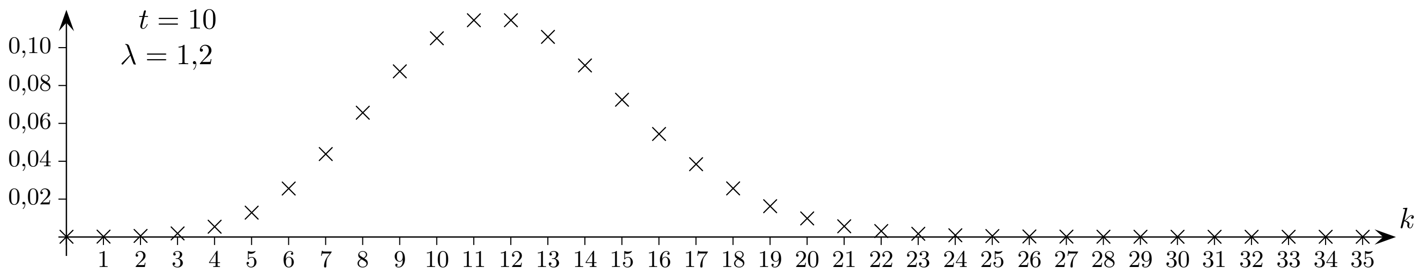
Für große n $(n \geq 100)$ und kleine p $(p \leq 0{,}1)$ fand Poisson eine überraschend gute Näherung für die Binomialverteilung (siehe Poisson-Verteilung). Dies führte zu der Definition:

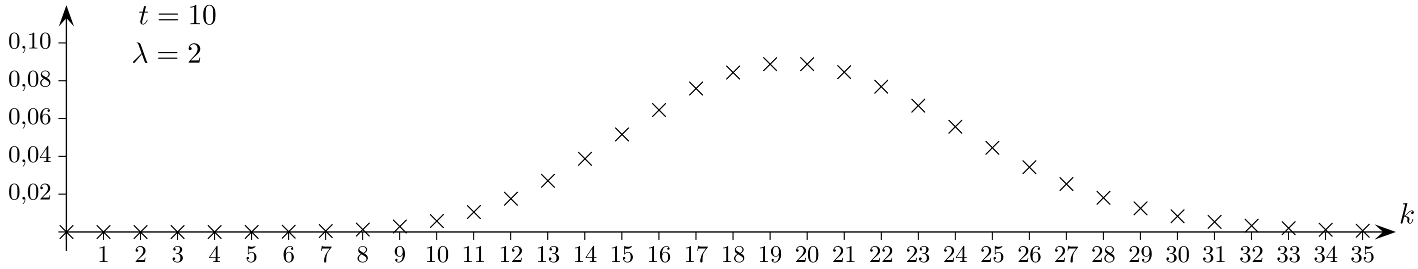
Eine Zufallsgröße X heißt poissonverteilt, falls die Wahrscheinlichkeiten für $k = 0, 1, 2, \ldots$ Treffer mit

$$P(X = k) \;=\; \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu} \quad \textit{berechnet werden, } \mu = n \cdot p.$$

Auf unsere Modellierung angewendet gilt dann:

$$P_t(X = k) \;=\; \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$





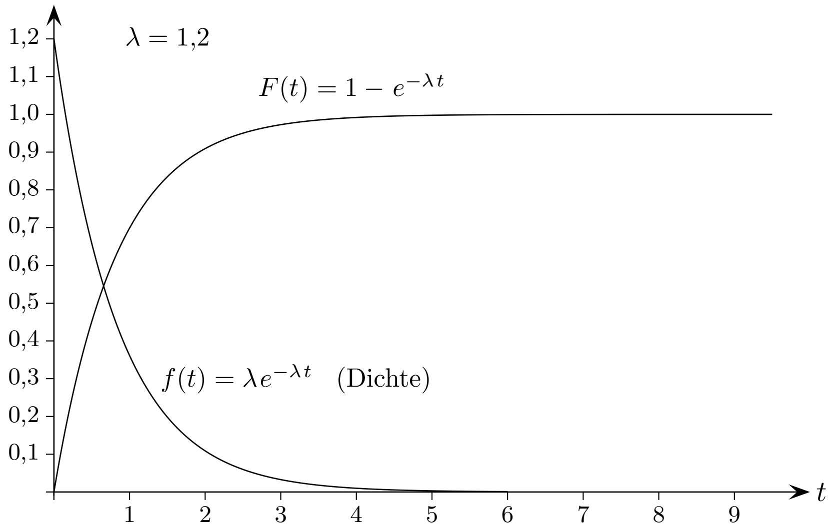
Poisson-Prozess

Die Wahrscheinlichkeit für kein Signal in einem Intervall der Länge t beträgt

$$P_t(X = 0) = e^{-\lambda t}$$

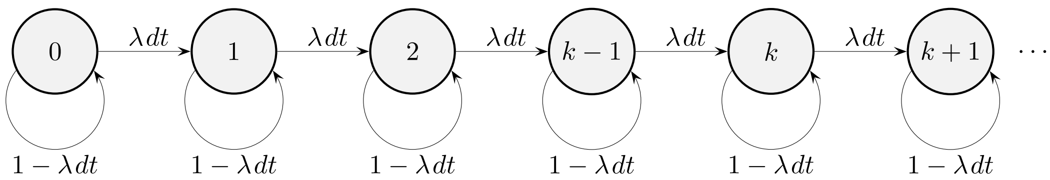
und für mindestens ein Signal

$P_t(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}$.   Diese Wahrscheinlichkeiten sind Funktionen von t.



Betrachten wir nun auch $P_k(t) = \dfrac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ als Funktion von t, k ist der Parameter.

Die Ableitung nach t ergibt $P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t), \quad k \geq 1$



P_k' kann veranschaulicht werden.
Die Wahrscheinlichkeit für ein Signal in der Zeit dt ist $P_1(dt) = \lambda dt$.

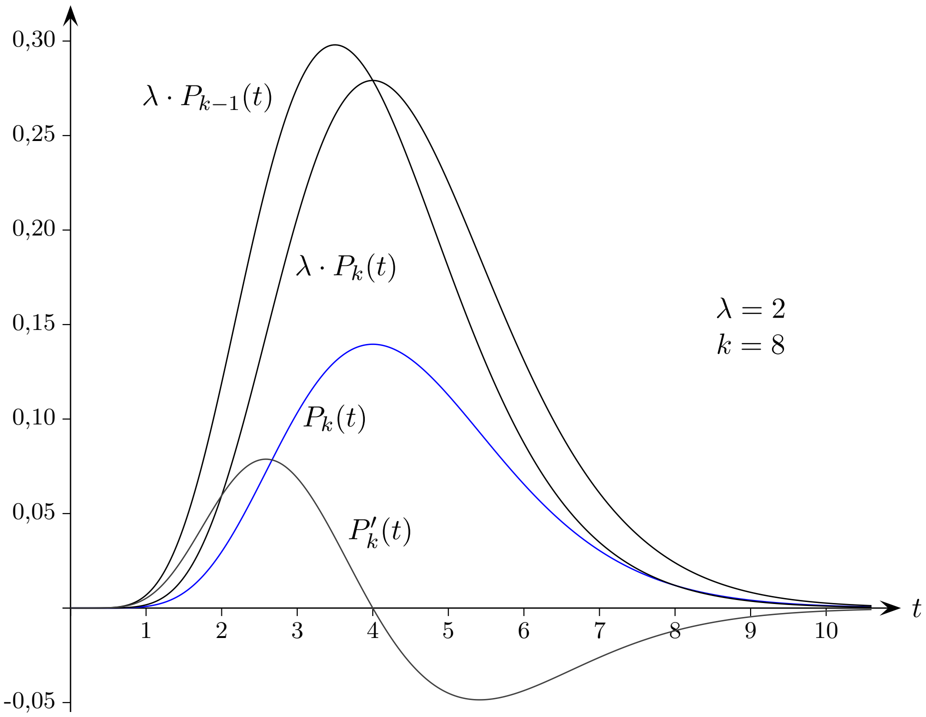
$$\begin{aligned}
P_k(t + dt) &= P_k(t) \cdot P_0(dt) + P_{k-1}(t) \cdot P_1(dt) \\
&= P_k(t) \cdot (1 - \lambda dt) + P_{k-1}(t) \cdot \lambda dt \\
P_k(t + dt) - P_k(t) &= -P_k(t) \cdot \lambda dt + P_{k-1}(t) \cdot \lambda dt \\
P_k'(t) &= P_{k-1}(t) \cdot \lambda - P_k(t) \cdot \lambda
\end{aligned}$$

Die Änderung dP_k besteht aus einem Zufluss $P_{k-1}(t) \cdot \lambda dt$ von $k - 1$ vermindert um einen Abfluss $P_k(t) \cdot \lambda dt$ nach $k + 1$.

Poisson-Prozess

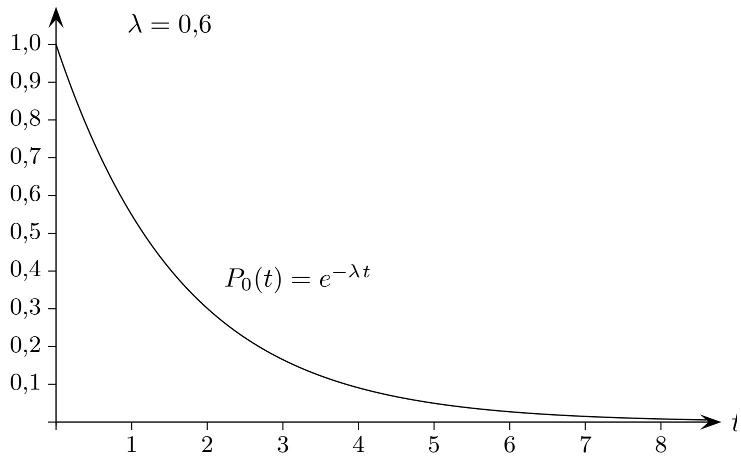
$$P_k(t) \;=\; \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$P_k'(t) \;=\; \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t), \quad k \geq 1$$



Wartezeit

Aus $\quad P_k(t) \;=\; \dfrac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad$ folgt $\quad P_0(t) \;=\; e^{-\lambda \cdot t}.$



$P_0(t)$ (t fest) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Intervall der Länge t ohne Signal ist.
Sei T die Wartezeit bis zum ersten Signal. T ist eine stetige Zufallsvariable, sie gibt auch die Wartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Signalen an. Es gilt $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Die Verteilungsfunktion von T lautet dann $F(t) = P(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$ und besitzt die Dichte $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Erwartungswert und Varianz von T

$$\mu = E(X) \;=\; \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = t\Big(-\tfrac{\lambda}{\lambda}\,e^{-\lambda t}\Big)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt \qquad \lim_{t\to\infty}(te^{-\lambda t}) = 0$$

$$= \;0 - 0 - \tfrac{1}{\lambda}\,e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = \tfrac{1}{\lambda}$$

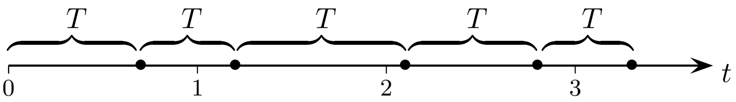
$$\mu = E(X) \;=\; \int_0^\infty t f(t)\,dt = \underbrace{-t\big(1 - F(t)\big)\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty \big(1 - F(t)\big)\,dt \qquad \lim_{t\to\infty} t\big(1 - F(t)\big)\,dt = 0$$

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 \;=\; \int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}\,dt - \mu^2 = -t^2 e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2t(-e^{-\lambda t})\,dt - \tfrac{1}{\lambda^2}$$

$$= \;0 - 0 + \tfrac{2}{\lambda}\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,dt - \tfrac{1}{\lambda^2} \;=\; \tfrac{2}{\lambda^2} - \tfrac{1}{\lambda^2} \;=\; \tfrac{1}{\lambda^2}$$

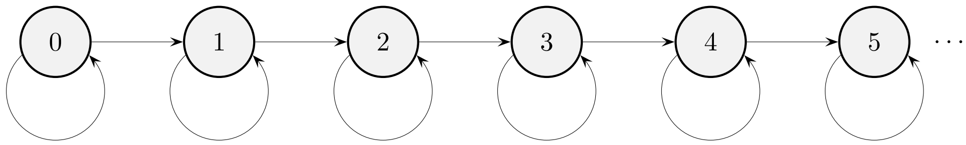
Poisson-Prozess

Die Wartezeit T bis zum ersten Signal ist exponentiell verteilt mit $P(T > t) = e^{-\lambda t}$, desgleichen die Wartezeit vom ersten zum zweiten Signal, usw.



λ Signale pro Zeiteinheit, $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$, $\sigma = \dfrac{1}{\lambda}$

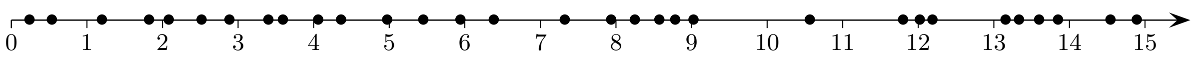
Andere Sichtweise des Poisson-Prozesses



Ein Teilchen startet in 0, verweilt dort die Zeit T_1 und springt dann nach 1.
Im Zustand 1 verweilt es die Zeit T_2 und springt dann nach 2 usw.
Die Verweilzeiten T sind exponentiell verteilt, siehe oben.

Poisson-Prozess Simulation

$\lambda = 2$



Exponentiell verteilte Wartezeiten lassen sich überraschend leicht simulieren.
Ist X gleichverteilt in $(0,1)$, dann ist $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln X$ exponentiell verteilt mit dem Parameter λ (und umgekehrt).

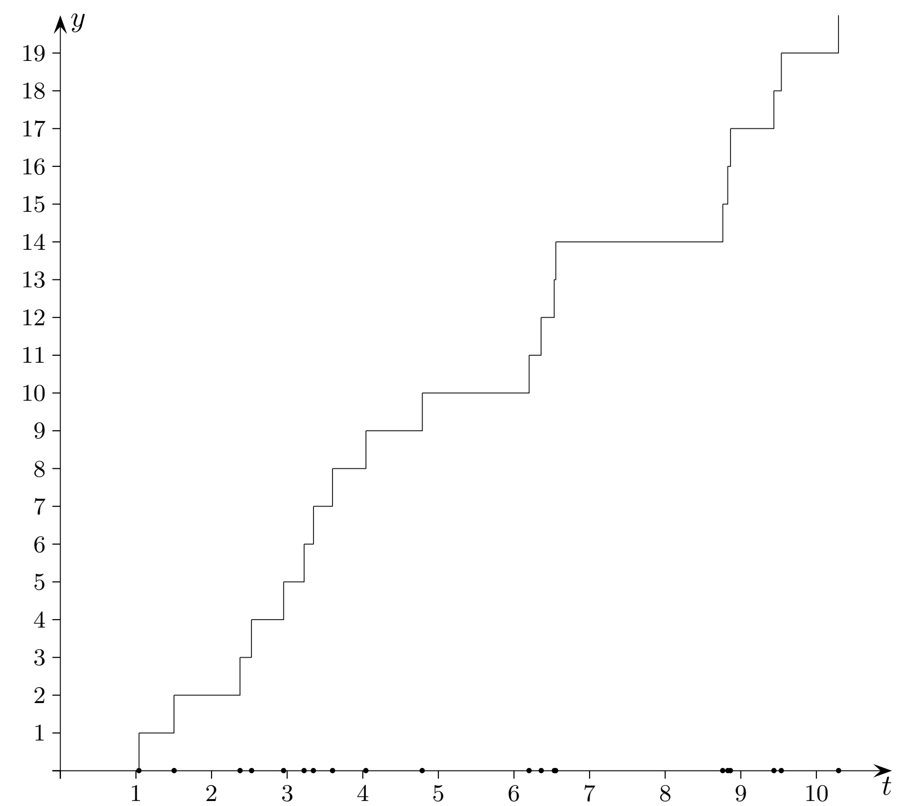
$$Y = -\frac{1}{\lambda}\ln X \qquad X \text{ sei gleichverteilt auf } (0,1)$$

$$P(Y \le t) = P(-\tfrac{1}{\lambda}\ln X \le t)$$

$$= P(X \ge e^{-\lambda t}) \,=\, 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{nach Voraussetzung über } X$$

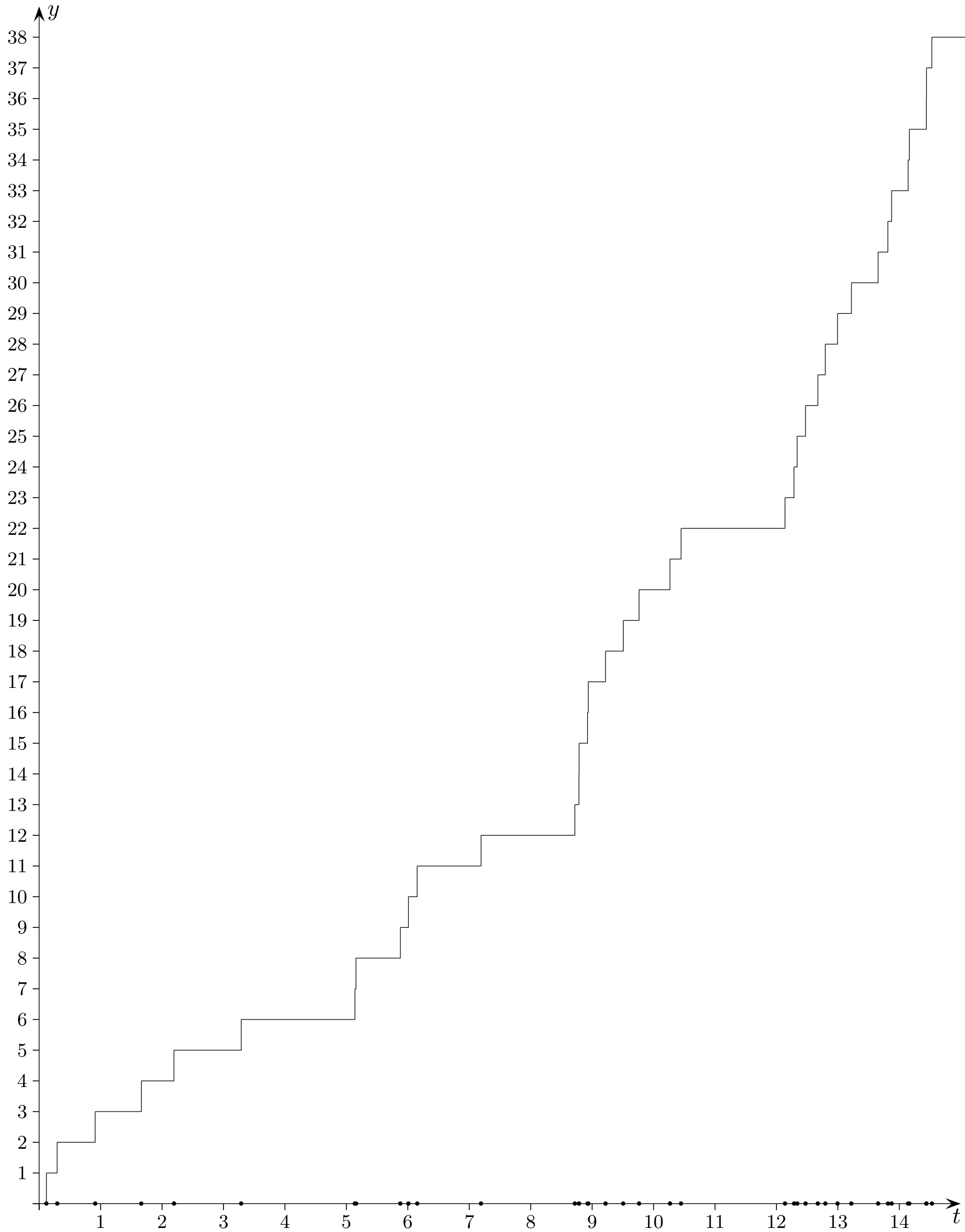
Y ist damit exponentiell verteilt.

Geogebra
$N = 50$
$\lambda = 2$
L1=Folge[−1/λ ln(ZufallszahlGleichverteilt[0, 1]), n, 1, N]
L2=Folge[(Summe[L2, n], 0), n, 1, N]



Inhomogener Poisson-Prozess

Ein inhomogener Poisson-Prozess liegt dann vor, wenn λ von der Zeit abhängt, z. B. $\lambda = 0{,}25t + 1$.



Poisson-Prozess

Wir betrachten einen vom Zufall gesteuerten Sender, der punktförmige Signale aussendet.
Die Zeitpunkte markieren wir auf der Zeitachse. Ein Poisson-Prozess liegt vor,
falls folgende Eigenschaften angenommen werden können:

a) Die Wahrscheinlichkeit $p_n(t)$ für genau n Signale im Zeitintervall der Länge t hängt nicht von der Lage des Intervalls auf der Zeitachse ab.

b) Die Anzahlen von Signalen in disjunkten Zeitintervallen sind paarweise unabhängige Zufallsvariable.

c) Die Wahrscheinlichkeit für mehr als ein Signal in einem kleinen Zeitintervall der Länge h ist von kleinerer Größenordnung als h, d. h. diese Wahrscheinlichkeit ist $o(h)$ für $h \longrightarrow 0$.

   Die Punkte liegen also isoliert auf der Achse.

   $o(h)$ ist eine Funktion, für die $\frac{o(h)}{h} \longrightarrow 0$ für $h \to 0$ gilt, z. B. $o(h) = t^2$ oder $o(h) = t^{1,5}$.

Wir leiten eine Formel für die Verteilung $p_n(t) = P(Z(t) = n),\ n = 0, 1, 2, 3, \dots$
der Zufallsvariablen $Z(t)$, Anzahl der Punkte im Intervall $[0, t)$, her. a) und b) liefern für t und h

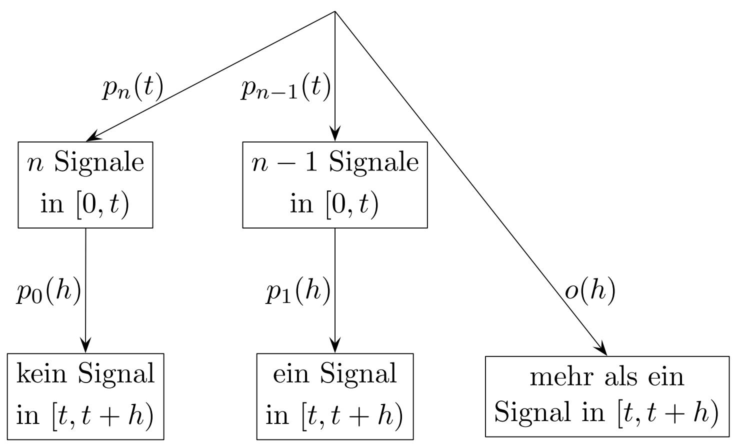
$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(h)$$

(1) $$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0$$ (einzige) Lösung, $p_0(t)$ monoton fallend

(2) $$p_0(h) = 1 - \lambda h + o(h)$$ Tangente an der Stelle $h = 0$

(3) $$p_1(h) = 1 - p_0(h) + o(h) = \lambda h + o(h)$$ c), (2)

Das Ereignis des Eintretens von n Signalen im Zeitintervall $[0, t+h)$ kann in die drei Pfade zerlegt werden.



(4) $$p_n(t+h) = p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + o(h), \quad n \geq 1$$ b), c)

$$= (1 - \lambda h)p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h)$$ (2), (3)

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)] + \frac{o(h)}{h}$$

(5) $$p_n'(t) = \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)]$$ $h \to 0$

$$
\begin{aligned}
(5)\quad p_n'(t) &= \lambda[p_{n-1}(t) - p_n(t)] \\
(6)\quad q_n'(t) &= \lambda q_{n-1}(t) && \text{Ansatz} \quad p_n(t) = e^{-\lambda t} q_n(t) \qquad \text{Produktregel}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_0(t) &= 1 && (1) \quad p_0(t) = e^{-\lambda t} \\
q_n(0) &= 0 && p_n(0) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1(t) &= \lambda t && (6) \\
q_2(t) &= \frac{(\lambda t)^2}{2!} \\
q_n(t) &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} && \text{Induktion}
\end{aligned}
$$

Mit dem Ansatz erhalten wir die *Poisson-Verteilung*

$$
p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \qquad \lambda > 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots
$$

Die erzeugende Funktion lautet dann

$$
G(s,t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t s} = e^{-\lambda t(1-s)}
$$

$G'(s,t) = \lambda t G(s,t)$ Ableitung nach s

$G''(s,t) = (\lambda t)^2 G(s,t)$

$\mu = \lambda t, \quad \sigma^2 = \lambda t$ beachte $G(1,t) = 1$

Erzeugende Funktion

$$
\begin{aligned}
G(s,t) &= e^{-\lambda t(1-s)} && G(1,t) = 1 \\
G'(s,t) &= -\lambda(1-s)G(s,t) && \text{Ableitung nach } t \\
\frac{G(s,t+h)-G(s,t)}{h} &= -\lambda(1-s)G(s,t) + o(h) \\
G(s,t) &= G(s,t+h) + \lambda h(1-s)G(s,t) + o(h) \\
&= G(s,t)\cdot G(t,h) + \lambda h(1-s)G(s,t) + o(h) && * \\
&= G(s,t)\cdot(1-\lambda h+\lambda hs) + (\lambda h - \lambda hs)G(s,t) + o(h) \\
& \qquad \text{beachte } \; G(s,h) = 1-\lambda h+\lambda hs + o(h) && (2), (3) \\
&= G(s,t)
\end{aligned}
$$

Es ist also auch ein (trickreicher) Weg von unten nach oben zur erzeugenden Funktion und damit zur Verteilung möglich.