Fixpunktfreie Permutationen

Montmort 1708

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4 ist ein Fixpunkt der Permutation, weil 4 seinen Platz beibehält.
Wie viele fixpunktfreie Permutationen von n Elementen gibt es?
Die Anzahl sei a_n. Durch Probieren ermitteln wir a_n bis $n = 4$.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 1 \\ a_3 &= 2 \\ a_4 &= 9 \\ a_5 &= 44 \\ a_6 &= 265 \end{aligned}$$

Die beiden Rekursionsformeln könnten vermutet werden:

$$\begin{aligned} &1. \quad a_n = (n-1)\,(a_{n-1} + a_{n-2}) \\ &2. \quad a_n = n\,a_{n-1} + (-1)^n \end{aligned}$$

Zunächst leiten wir die 1. Formel her, aus ihr ergibt sich durch Umformen die 2.
und aus dieser schließlich eine explizite Darstellung für a_n.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \bullet & 1 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Wir zählen zunächst alle fixpunktfreien Permutationen mit $1 \rightsquigarrow 2$, d. h. 1 wechselt auf den 2. Platz.

Mit $2 \rightsquigarrow 1$ sind dann a_{n-2} fixpunktfreie Permutationen möglich.
Falls $2 \rightsquigarrow 1$ nicht vorliegt, sind $n-1$ Elemente fixpunktfrei auf $n-1$ Plätze zu verteilen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \bullet & . & . & . \end{pmatrix}$$

Dies kann auf a_{n-1} Arten erfolgen.
Für den Fall $1 \rightsquigarrow 2$ gibt es also $a_{n-2} + a_{n-1}$ fixpunktfreie Permutationen.
Dasselbe gilt für den Fall $1 \rightsquigarrow 3$. Für die 1 stehen $n-1$ Plätze zur Verfügung.
Somit erhalten wir die 1. Rekursionsformel.

Fixpunktfreie Permutationen

Die scheinbar einfachere 2. Rekursionsformel $a_n = n\,a_{n-1} + (-1)^n$ kann vermutlich nicht direkt eingesehen werden. Sie besagt, dass $a_n - n\,a_{n-1}$ abwechseln $+1$ oder -1 ist.
Dies kann leicht nachgewiesen werden:

$$\begin{aligned}
a_n &= (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \\
a_n &= (n-1)\,a_{n-1} + (n-1)\,a_{n-2} \\
a_n &= n\,a_{n-1} - a_{n-1} + (n-1)\,a_{n-2} \\
a_n - n\,a_{n-1} &= -(a_{n-1} - (n-1)\,a_{n-2}) \quad \text{Diese Gleichung beweist den Wechsel.} \\
& \qquad \text{Mit dem Anfang für } n = 2 \text{ folgt alles Weitere.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 - 2a_1 &= 1 \quad \Longrightarrow \quad a_3 - 3a_2 = -1 \quad \text{usw., d.h.} \\
a_n - n\,a_{n-1} &= (-1)^n
\end{aligned}$$

Für a_n finden wir nun eine explizite Darstellung sowie die Näherung $a_n \approx \frac{n!}{e}$.

$$a_n = n\,a_{n-1} + (-1)^n$$

Division durch $n!$

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}$$

wiederholte Verwendung dieser Beziehung

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

rechte Seite genähert (-1 in die e^x-Reihe einsetzen)

$$\approx e^{-1}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine fixpunktfreie Permutationen beträgt also $\frac{1}{e} \approx 37\,\%$,
für mindestens einen Fixpunkt: $1 - \frac{1}{e} \approx 63\,\% \approx \frac{2}{3}$.

n Kinder wichteln anonym. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kind sein eigenes Geschenk bekommt? Antwort: ungefähr $\frac{2}{3}$.

Anzahl der Fixpunkte einer Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Diese Permutation hat 2 Fixpunkte.
Wir bestimmen den Erwartungswert der Anzahl der Fixpunkte und definieren hierzu auf der Menge der n-Permutationen die Zufallsvariablen X_i.
Sei $X_i = 1$, falls an der Stelle i ein Fixpunkt vorliegt, sonst sei $X_i = 0$.

Die Gesamtzahl der Fixpunkte einer Permutation ist dann durch

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad \text{gegeben.}$$

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad E(S_n) = 1$$

Für die Varianz gilt:

$$\begin{aligned} V(S_n) &= E(S_n^2) - \left[E(S_n)\right]^2 \\ &= E\Big((X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2 \Big) - 1 \\ &= \underbrace{E\Big(\sum X_i^2 \Big)}_{1} + E\Big(\sum_{i \neq j} X_i X_j \Big) - 1 \end{aligned}$$

Sei $i \neq j$

$$E(X_i X_j) = P(X_i X_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\Longrightarrow \qquad V(S_n) = n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

Beachtenswert ist, dass der Erwartungswert und die Varianz unabhängig von n sind.

Verteilung von S_n

Wir ermitteln die Verteilung von S_n, gesucht sind also die Wahrscheinlichkeiten $P(S_n = k)$, $k = 0, \dots, n$.
k Fixpunkte können auf $\binom{n}{k}$ Stellen entstehen, die übrigen $n - k$ Stellen müssen dann fixpunktfrei sein.
Es ist daher:

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)! \cdot \Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \Big) \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \Big) \qquad \text{beachte: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &\approx \frac{e^{-1}}{k!} \end{aligned}$$

Dies ist die Poisson-Verteilung mit $\lambda = 1$.
Die Näherungsformel geeignet sich sehr gut für $n - k \geq 5$.

Zur Verwendung der Verteilung von S_n in der Statistik folgendes Beispiel (A. Engel):

Ein Grafologe (neue Rechtschreibung) bewirbt sich um eine Stelle. Um seine Fähigkeiten zu testen, werden ihm von 10 Personen je eine Charakterbeschreibung und eine Schriftprobe vorgelegt.
Er soll herausfinden, welche Schriftprobe zu welchem Charakter gehört. Der Bewerber erzielt 4 Treffer.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch bloßes Raten ein solches Ergebnis zu erzielen?

Lösung mit der Poisson-Näherung:

$P(S_{10} \geq 4) = 1 - P(S_{10} \leq 3) = 0{,}019$

Dieses Ergebnis allein begründet noch keine besonderen Fähigkeiten.
Der Bewerber wird nicht blind geraten haben. Möglicherweise sind einige Kombinationen bei gängigem Wissen von größerer Wahrscheinlichkeit, bzw. einige sind auszuschließen.