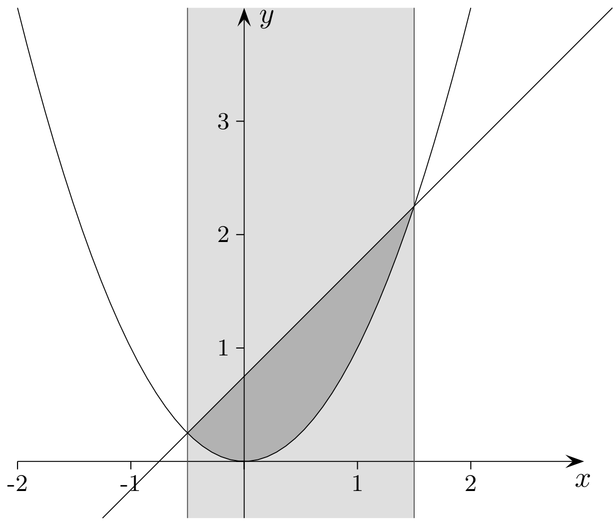
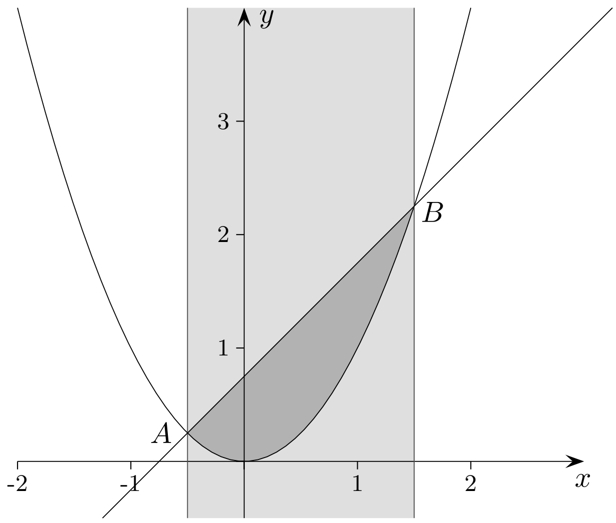
Parabelsegment

Gegeben ist die Normalparabel $f(x) = x^2$.
Ein zur y-Achse paralleler Streifen der Breite $d = 2$ wandert auf der x-Achse entlang und legt damit ein Parabelsegment fest. Für welchen Streifen ist die Fläche des Segments maximal?



Maximales Parabelsegment

Gegeben ist die Normalparabel $f(x) = x^2$.
Ein zur y-Achse paralleler Streifen der Breite $d = 2$ wandert auf der x-Achse entlang und legt damit ein Parabelsegment fest. Für welchen Streifen ist die Fläche des Segments maximal?



Lösung:

$A\big(u \mid u^2\big)$, $B\big(u + d \mid (u + d)^2\big)$

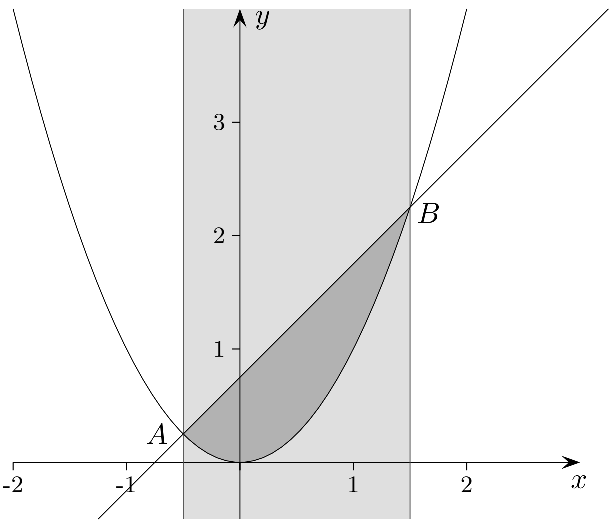
Sekante $y = (2u + d)x - u(u + d)$ Die Betrachtung eines Trapezes reicht.

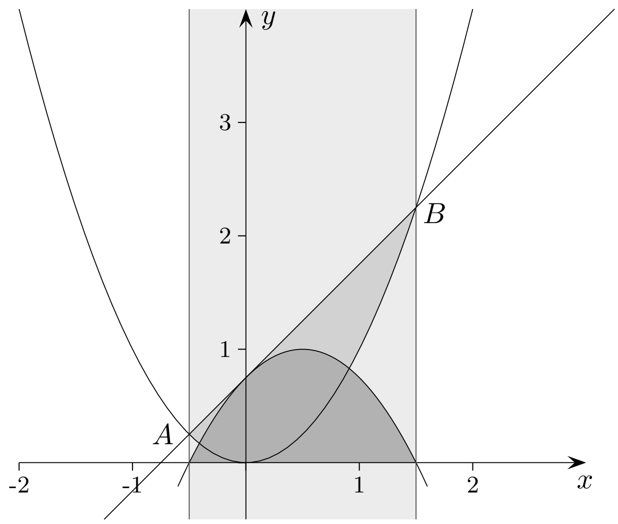
$A = \frac{1}{6}d^3$

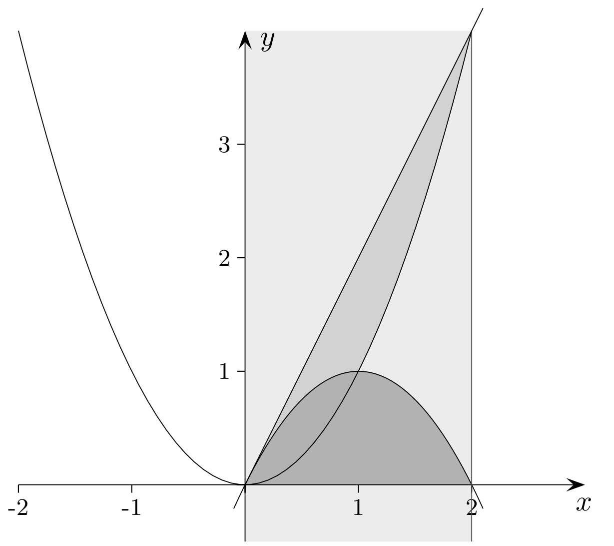
Alle Segmente sind gleich groß.

Lösung eleganterer Art

Gegeben ist die Normalparabel $f(x) = x^2$.
Ein zur y-Achse paralleler Streifen der Breite $d = 2$ wandert auf der x-Achse entlang und legt damit ein Parabelsegment fest. Für welchen Streifen ist die Fläche des Segments maximal?







Lösung:

Die Differenzfunktion lautet aufgrund der Nullstellen

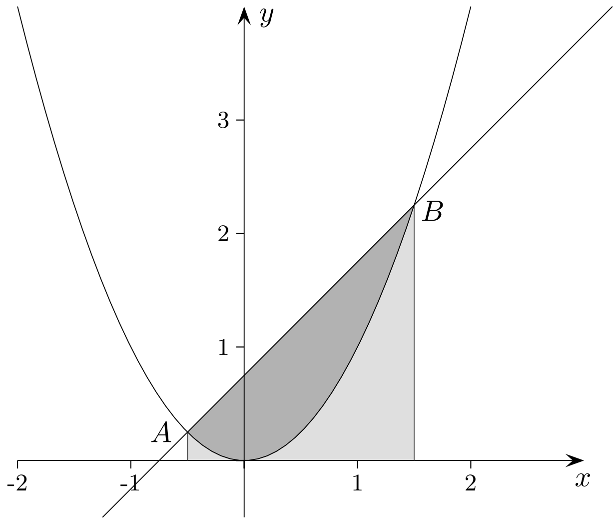
$g(x) = -(x - u)(x - (u + d))$

Durch eine Verschiebung um u bleibt der Flächeninhalt erhalten.

$g^*(x) = -x(x - d) = -x^2 + dx$

Durch Integration in den Grenzen 0 und d erhalten wir:

$A = \frac{1}{6}d^3$



Der Inhalt des Parabelsegmentes hängt nur d ab. Diese Eigenschaft war schon Archimedes bekannt. Aus der Linearität des Integrals folgt sofort, dass diese Eigenschaft allgemein für jede quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt.

Gibt es weitere Funktionen mit dieser Eigenschaft?

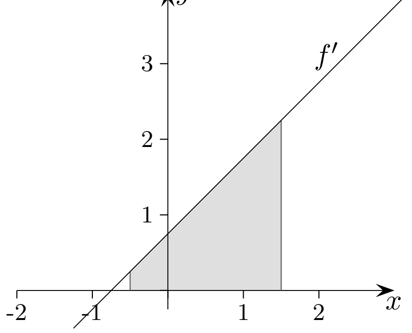
Für diese Funktionen müsste gelten:

$$\underbrace{\frac{d}{2}\big[f(x)+f(x+d)\big]}_{\text{Trapezfläche}} \quad - \quad \underbrace{\big[F(x+d)-F(x)\big]}_{\text{Fläche unter dem Graphen von } f} \quad = \quad C \qquad\qquad F' = f$$

Wir leiten auf beiden Seiten ab.

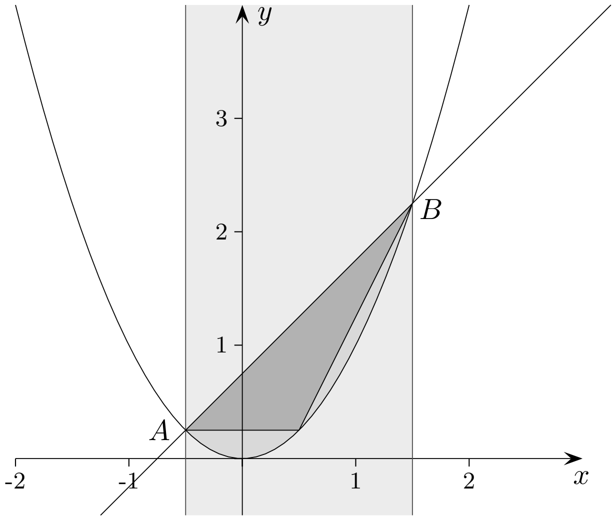
$$\begin{aligned} \frac{d}{2}\big[f'(x)+f'(x+d)\big] - \big[f(x+d)-f(x)\big] &= 0 \\ \underbrace{\frac{d}{2}\big[f'(x)+f'(x+d)\big]}_{\text{Trapezfläche von } f'} &= \underbrace{\big[f(x+d)-f(x)\big]}_{\text{Fläche unter dem Graphen von } f'} \end{aligned}$$

Man führe sich die Bedeutung der letzten Zeile vor Augen.
Die Trapezfläche soll mit der Fläche unter dem Graphen von f' übereinstimmen.
Das kann nur für lineare Funktionen von f' gelten, d. h. f muss quadratisch sein.



Segmentdreieck

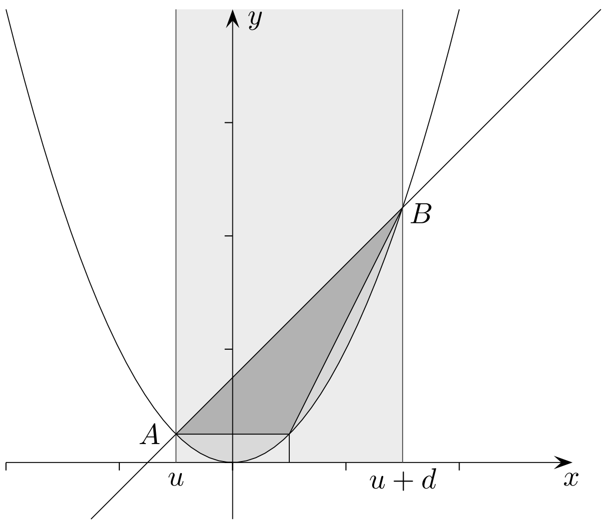
Gegeben ist die Normalparabel $f(x) = x^2$.
Ein zur y-Achse paralleler Streifen der Breite $d = 2$ wandert auf der x-Achse entlang und legt damit ein Segmentdreieck fest. Die Spitze halbiert d.
Für welchen Streifen ist die Fläche des Segmentdreiecks maximal?



Segmentdreieck

Durch eine Betrachtung dreier Trapeze ergibt sich

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{d^3}{8}.$$



$$A \;=\; \frac{d}{2}\left[\,(u+d)^2 + u^2\,\right]$$

$$A_1 \;=\; \frac{d}{4}\left[\,(u+\frac{d}{2})^2 + u^2\,\right]$$

$$A_2 \;=\; \frac{d}{4}\left[\,(u+\frac{d}{2})^2 + (u+d)^2\,\right]$$

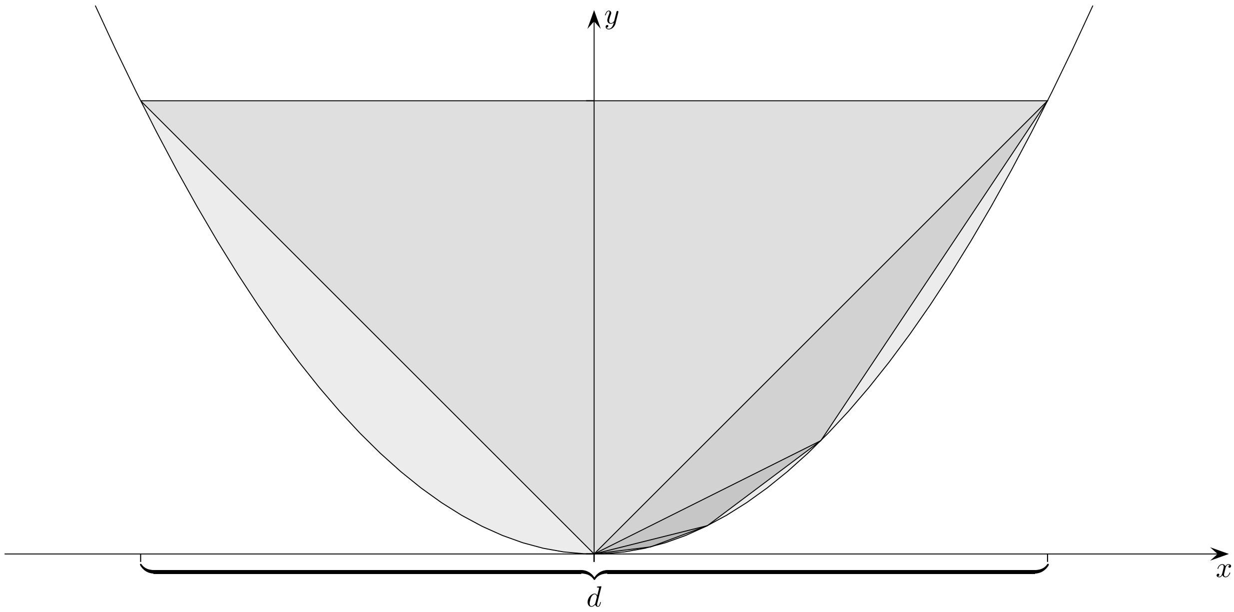
$$A_{\text{Dreieck}} \;=\; A - A_1 - A_2$$

Mit $A_{\text{Segment}} = \dfrac{d^3}{6}$
erhalten wir den Zusammenhang

$$\frac{4}{3}A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{Segment}}.$$

Archimedes Quadratur der Parabel

Archimedes (287 bis 212 v. Chr.) hatte die Idee, ein Parabelsegment durch Segmentdreiecke auszuschöpfen. Dadurch gelang ihm die Bestimmung von Parabelflächen.



Wir benötigen nur $A_{\text{Dreieck}} = \frac{d^3}{8}$ für $d,\ \frac{d}{2},\ \frac{d}{4},\ \frac{d}{8},\ \dots$ und berücksichtigen die Vielfachheit der Dreiecke.

$$
\begin{aligned}
A_{\text{Segment}} &= \frac{1}{8}\left[d^3 + 2\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^3 + 4\cdot\left(\frac{d}{4}\right)^3 + 8\cdot\left(\frac{d}{8}\right)^3 + \dots\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[d^3 + \frac{d^3}{4} + \frac{d^3}{16} + \frac{d^3}{64} + \dots\right] \\
&= \frac{d^3}{8}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \qquad \text{unendliche geometrische Reihe} \\
&= \frac{d^3}{6}
\end{aligned}
$$