Satz vom Nullprodukt

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \textit{oder} \quad b = 0$$

Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.

Dieser Satz gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ (und allgemeiner für Elemente eines Körpers,
einer algebraischen Struktur also, in der dieselben Rechengesetze wie in $\mathbb{R}$ gelten).
Das (math.) *oder* ($\vee$) ist vom *entweder oder* zu unterscheiden.
Auf diesem Satz beruht das Lösen von Gleichungen wie:

a) $(x-3)(x+4) = 0$ $\qquad x_1 = 3,\ x_2 = -4$

b) $x(x-5) = 0$ $\qquad x_1 = 0,\ x_2 = 5$

c) $x^3 + x^2 = 0$ $\qquad x^2(x+1) = 0,\ \ x_1 = 0,\ x_2 = -1$

d) $e^{2x} - x^2 e^{2x} = 0$ $\qquad e^{2x}(1-x^2) = 0,\ \ x_{1/2} = \pm 1$

Auf der einen Seite steht ein Produkt - evt. erst durch Ausklammern - und auf der anderen eine null.
Eine Erweiterung der Lösungsmethode auf Zahlen ungleich null ist nicht möglich.

Beweis
Zwei Richtungen sind zu begründen.

$\Longleftarrow$

Sei $b = 0$, dann ist $a \cdot 0 = 0$ zu zeigen, d. h.
wenn ein Faktor null ist, so ist das Produkt null.

Hierzu rechnen wir $a \cdot (0+0)$ auf zwei Arten aus, distributiv und mit $c + 0 = c$.

$$\begin{aligned} a \cdot \underbrace{(0+0)}_{0} &= a \cdot 0 + a \cdot 0 \quad | \ -a \cdot 0 \\ 0 &= a \cdot 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

Sei $a \cdot b = 0$ und $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \quad | \ \cdot \frac{1}{a} \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ ist nullteilerfrei