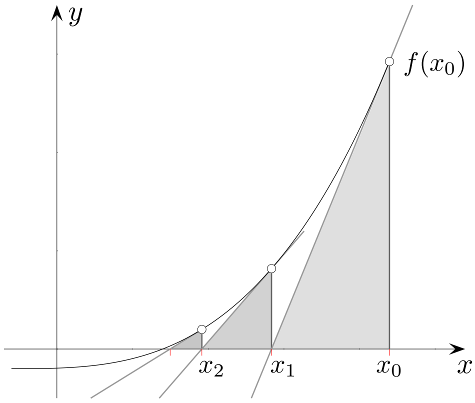
Newton-Verfahren mehrdimensional



Betrachtet man die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren
aus einem bestimmten Blickwinkel, so erscheint die Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^n$ plausibel.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{Startwert } x_0$$

$$\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{\Delta x_n = z} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x_n) \cdot z = -f(x_n)$$

Die letzte Zeile ist eine Gleichung für z, die zu lösen ist.
Der neue Wert ergibt sich zu $x_{n+1} = x_n + z$.

Z. B. führt die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x,y)$ auf das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$$

Es ist daher ein Gleichungssystem der Art

$$f_1(x,y) = 0$$

$$f_2(x,y) = 0$$

zu lösen. Dies kann iterativ erfolgen. In jedem Schritt ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_n,y_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_n,y_n)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_n,y_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_n,y_n)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_n, y_n) \\ -f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix} \qquad \text{Startvektor } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Der neue Vektor ergibt sich zu $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Newton-Verfahren mehrdimensional

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y, z)$ führt auf das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = 0$$

Es ist daher ein Gleichungssystem der Art

$$f_1(x, y, z) = 0$$
$$f_2(x, y, z) = 0$$
$$f_3(x, y, z) = 0$$

zu lösen. Dies kann iterativ erfolgen. In jedem Schritt ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_n,y_n,z_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_n,y_n,z_n)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(x_n,y_n,z_n)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(x_n,y_n,z_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_n,y_n,z_n)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(x_n,y_n,z_n)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3(x_n,y_n,z_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(x_n,y_n,z_n)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(x_n,y_n,z_n)}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_n, y_n, z_n) \\ -f_2(x_n, y_n, z_n) \\ -f_3(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}$$

Der neue Vektor ergibt sich zu $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Newton-Verfahren Beispiel

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

An welcher Stelle $(x \mid y)$ ist die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt?

Startvektor sei $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Newton-Verfahren Beispiel

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

An welcher Stelle $(x \mid y)$ ist die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt?

Startvektor sei $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \qquad\qquad 3x^2 - 3y = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad\qquad 3y^2 - 3x = 0$$

$$f_1(x,y) = 3x^2 - 3y$$
$$f_2(x,y) = 3y^2 - 3x$$

Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} \\ -\frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{16}{15} \\ \frac{16}{15} \end{pmatrix}$ Die Lösung $(1 \mid 1)$ war auch schon vorher sichtbar. Die Rechnung dient der Erläuterung.

Gedämpfte Newtonsche Iterationsmethode

$$\vec{\boldsymbol{x}}^{(n+1)} = \vec{\boldsymbol{x}}^{(n)} + \lambda\,\vec{\boldsymbol{z}}^{(n)}, \qquad \text{mit} \quad \vec{\boldsymbol{z}}^{(n)} = \boldsymbol{J}^{-1}\big(\vec{\boldsymbol{x}}^{(n)}\big)\,\nabla f\big(\vec{\boldsymbol{x}}^{(n)}\big)$$

Mit einem $\lambda,\ 0 < \lambda < 1,$ kann durch eine kleinere Schrittweite
die Konvergenz möglicherweise verbessert werden.

In das dargestellte Verfahren wird also lediglich der Dämpfungsparameter λ eingefügt.