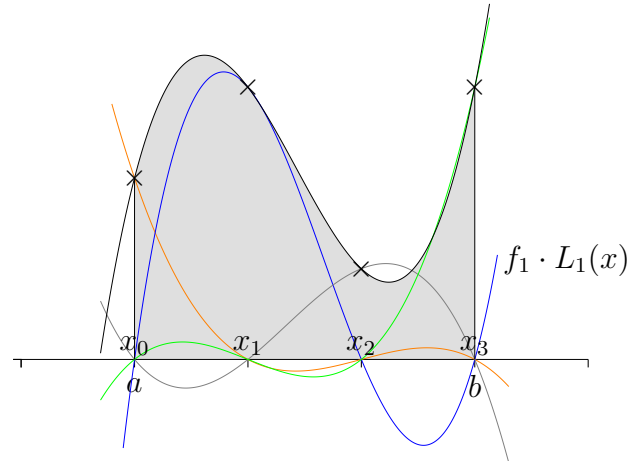
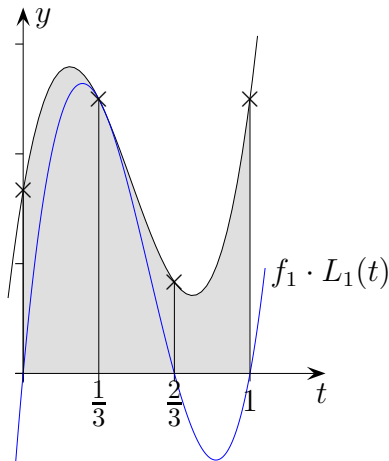


3/8-Regel



Die Regel hat die Form (4 Stützstellen):

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)[w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3]$$

Um die Gewichte w_i zu ermitteln, approximieren wir f durch eine Summe von Lagrange-Polynomen.

$$f(x) \approx f_0 \cdot L_0(x) + f_1 \cdot L_1(x) + f_2 \cdot L_2(x) + f_3 \cdot L_3(x)$$

mit
$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}, \quad L_1, \quad L_2, \quad L_3$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b [f_0 \cdot L_0(x) + f_1 \cdot L_1(x) + f_2 \cdot L_2(x) + f_3 \cdot L_3(x)] dx \\ &= (b-a) \int_0^1 [f_0 \cdot L_0(t) + f_1 \cdot L_1(t) + f_2 \cdot L_2(t) + f_3 \cdot L_3(t)] dt \end{aligned}$$

(Substitution, d.h. Verschiebung, Streckung)

$$w_k = \int_0^1 L_k(t) dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=3} \frac{3t-j}{k-j} dt \quad \text{es wurde mit 3 erweitert}$$

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(t - \frac{1}{3})(t - \frac{2}{3})(t - \frac{3}{3})}{(0 - \frac{1}{3})(0 - \frac{2}{3})(0 - \frac{3}{3})} \\ &= \frac{(3t-1)(3t-2)(3t-3)}{(-1)(-2)(-3)}, \quad \int_0^1 L_0(t) dt = \dots = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

3/8-Regel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + f(b) \right]$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3]$$

$$w_3 = \int_0^1 L_3(t) dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^{j=3} \frac{3t-j}{3-j} dt = \int_0^1 \frac{3t \cdot (3t-1) \cdot (3t-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} dt = \frac{1}{8}$$

$$w_2 = \int_0^1 L_2(t) dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^{j=3} \frac{3t-j}{2-j} dt = \int_0^1 \frac{3t \cdot (3t-1) \cdot (3t-3)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} dt = \frac{3}{8}$$

allgemein für Polynome vom Grad N ($N+1$ Stützstellen)

$$w_k = \int_0^1 L_k(t) dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=N} \frac{Nt-j}{k-j} dt$$

Grad $N = 3$:

$$k = 1, \quad L_1 = \frac{Nt(\cancel{Nt-1})(Nt-2)(Nt-3)}{k(\cancel{k-1})(k-2)(k-3)}$$

$$k = 2, \quad L_2 = \frac{Nt(Nt-1)(\cancel{Nt-2})(Nt-3)}{k(k-1)(\cancel{k-2})(k-3)}$$

Nächste Newton-Cotes-Regel (5 Stützstellen), Milne-Regel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{90} \left[7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + 2\frac{b-a}{4}\right) + 32f\left(a + 3\frac{b-a}{4}\right) + 7f(b) \right]$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{90} [7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4]$$

$$w_1 = \int_0^1 L_1(t) dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{j=4} \frac{4t-j}{1-j} dt = \int_0^1 \frac{4t \cdot (4t-2) \cdot (4t-3) \cdot (4t-4)}{1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)} dt = \frac{32}{90}$$

Siehe auch: [Numerische Integration](#)
[Lagrange-Interpolation](#)
[Startseite](#)