Cournot-Nash-Gleichgewicht

Die konkurrierenden Hersteller A und B bieten jeweils ein Produkt von nahezu gleicher Beschaffenheit und Qualität zu den Preisen x und y an. Der Absatz pro Zeiteinheit für das Produkt von A ist von x und y abhängig. Der Zusammenhang wird durch

$$(x, y) \longrightarrow Q - ax + by$$

erfasst. Q ist hierbei die sogenannte Grundnachfrage. Wird x um 1 (€) erhöht, so verringert sich die Nachfrage um a. Erhöht der Anbieter B den Preis um y, so steigt die Nachfrage für A. Sei z.B. $b = 0{,}4$. Eine Preiserhöhung um 5 (€) von B bedingt eine Nachfragesteigerung um 2 Stück für A.
Für die Absatzfunktion für B sind x und y zu vertauschen:

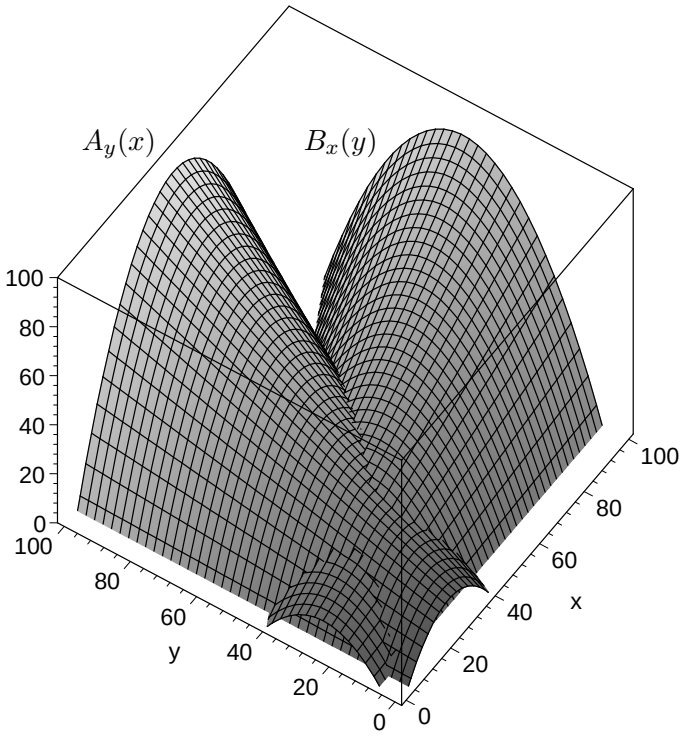
$$(x, y) \longrightarrow Q - ay + bx.$$

Bei gleichen Preisen stimmen die Absätze überein.
Der Gesamtabsatz beider Anbieter beträgt $2Q - (x + y)(a - b)$. $a < b$ wäre nicht sinnvoll, da steigende Preise stets zu erhöhtem Umsatz führten.

Mit den Stückkosten d_1 und d_2 ergeben sich die Gewinnfunktionen der Hersteller

$$A_y(x) = (Q - ax + by)(x - d_1)$$
$$B_x(y) = (Q - ay + bx)(x - d_2)$$

y ist Parameter für $A_y(x)$, x ist Parameter für $B_x(y)$. Auf die Preisgestaltung des Konkurrenten haben die Anbieter keinen direkten Einfluss, A kann also nur x, B nur y variieren.
Die grafische Darstellung beinhaltet die Symmetrie der Absätze.



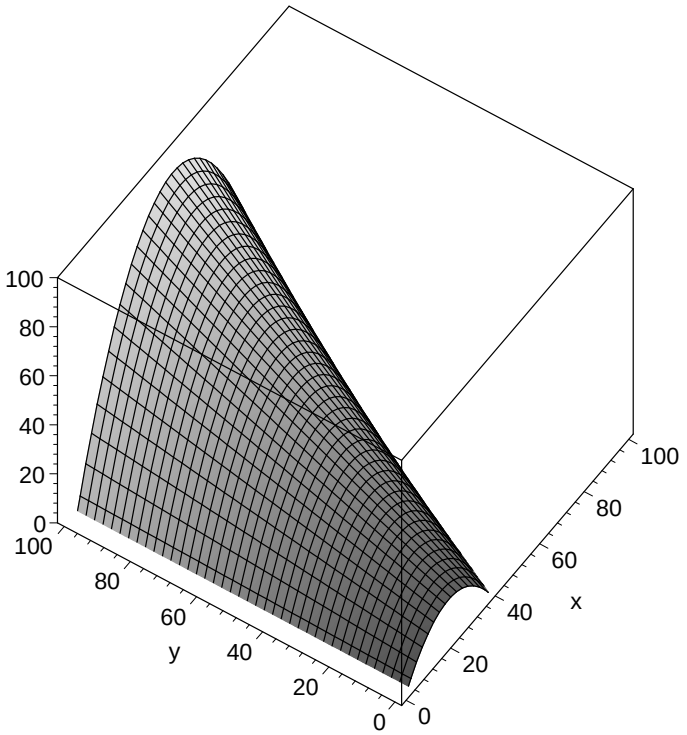
$$A_y(x) = (40 - x + 0{,}5y)(x - 4)$$
$$B_x(y) = (40 - y + 0{,}5x)(x - 6)$$

(Die z-Koordinate wurde mit 0,05 multipliziert.)

Roolfs

Cournot-Nash-Gleichgewicht

Der anfängliche Preis für das Produkt von B sei y_0. A kann seinen Preis x_0 nun so festlegen, dass sein Gewinn maximal wird. Hierzu ist lediglich der Scheitel der quadratischen Funktion $A_{y_0}(x)$ zu ermitteln.

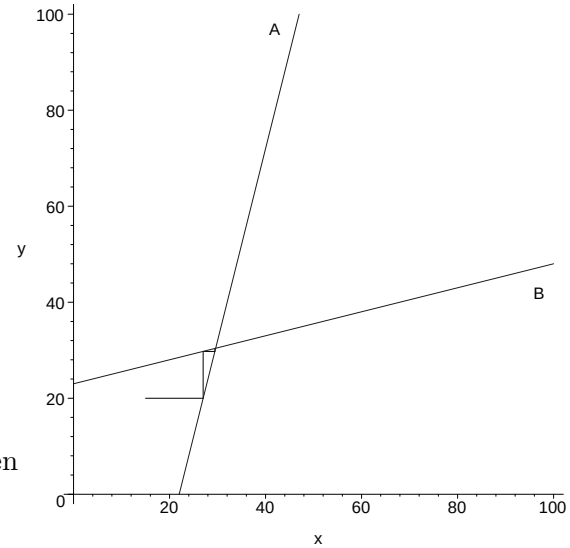


B kann daraufhin seinen Preis so anpassen, dass sein Gewinn maximal wird. Dies kann mit $B'_{x_0}(x) = 0$ erfolgen. Das sukzessive wechselseitige Reagieren auf das Verhalten des Konkurrenten wird durch die sogenannten Reaktionsgleichungen

$$A'_y(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2ax - by = Q + ad_1$$
$$B'_x(y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2ay - bx = Q + ad_2$$

festgelegt, im Beispiel durch die Geradengleichungen:

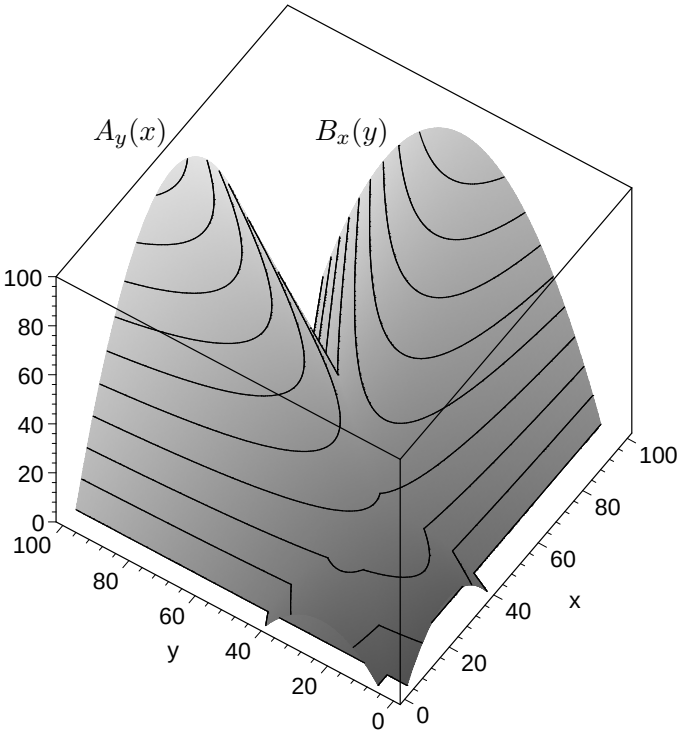
$$x = 0{,}25y + 22$$
$$y = 0{,}25x + 23$$

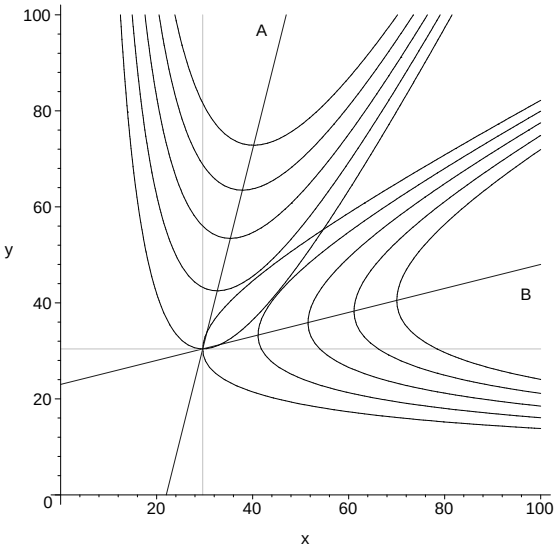


Das Verfahren endet im Schnittpunkt $S(29{,}6 \mid 30{,}4)$.
A könnte durch eine einseitige Preisänderung seinen Gewinn nicht weiter steigern, das Gleiche gilt für B (Cournot-Nash-Gleichgewicht). Die möglicherweise durch Absprache entstandene Preisgestaltung $(35 \mid 35)$ z. B. erbringt für beide Anbieter im Vergleich zum Gleichgewichtspunkt einen höheren Gewinn. Wenn sie jedoch wieder im Wechsel die Preise verändern, um ihren Gewinn zu vergrößern (eine verschärfte Kostenentwicklung könnte dies auch erzwingen), mündet die Entwicklung wieder in der Gleichgewichtssituation.

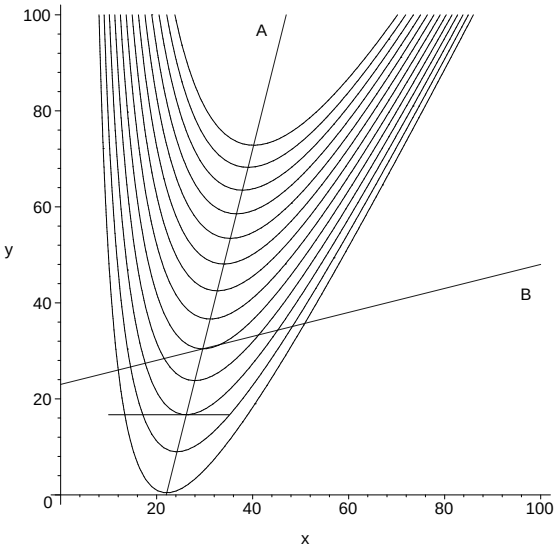
Cournot-Nash-Gleichgewicht

Die Lage des Gleichgewichtspunktes kann auch durch Höhenlinien charakterisiert werden.





Augenscheinlich liegen die Extrema auf den Reaktionsgeraden.
Die Höhenlinie $A_y(x) = z_0$ kann als Graph der Funktion $x \longrightarrow y$ aufgefasst werden.
Implizites Differenzieren unter Beachtung von $y' = 0$ führt zu

$$Q - 2ax + ad_1 + by = 0$$

Die Punkte mit waagerechter Tangente (Extrema) liegen also auf einer Reaktionsgeraden. Entsprechendes gilt für $B_x(y) = z_0$. Im Gleichgewichtspunkt schneiden sich die Höhenlinien daher rechtwicklig.
A sucht für die optimale Reaktion die Höhenlinie auf, die bei konstantem y-Wert tangiert wird.