

1. Potenzgerade
2. Konstruktion der Potenzgeraden
3. Orthogonales Kreisbüschel
4. Gemeinsame Punkte des orthogonalen Kreisbüschels
5. Satz von Brianchon
6. Kreis und Winkel
7. Zusammenhang Kreise/parallele Geraden
8. Satz von Pascal
9. Spiegelung am Kreis, Inversion
10. Spiegelung am Kreis/Spiegelung an einer Geraden
11. Inversion im Komplexen $z \rightarrow 1/\bar{z}$
12. Abbildung eines Kreises
13. Geometrische Begründung Gerade \rightarrow Kreis
14. Geometrische Begründung Kreis \rightarrow Kreis, Inversion an einer Kugel
15. Die Inversion ist winkeltreu.
16. Kreise, die auf sich abgebildet werden
17. Inversion und Erhaltung der Symmetrie, Symmetrieprinzip
18. Kreiskette
19. Problem des Apollonios
20. Abstände
21. Satz von Ptolemäus
22. Geschlossene Kreiskette
23. Inversor von Peaucellier
24. Lemniskate von Bernoulli
25. Kardioide

26. Inversion einer Ellipse
27. Möbiustransformation $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$
28. Eigenschaften der Möbiustransformation
29. Orientierung
30. Möbiustransformation ermitteln, mehrere Seiten
31. Geometrische Bedeutung von $T_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$
32. Veranschaulichung elliptisch, hyperbolisch, loxodromisch
33. Berechnung des Multiplikators m
34. Alternatives Vorgehen
35. Parabolische Transformation
36. Möbiustransformation iteriert
37. a, a^{-1}, b, b^{-1} iteriert
38. Schottky-Gruppe
39. Indras Perlen
40. Stereographische Projektion
41. Stereographische Projektion als Inversion
42. Stereographischer Zusammenhang
43. Stereographische Projektion und Inversion
44. Übertragung von $z \rightarrow 1/z$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$
45. Riemannsche Zahlenkugel (Einheitssphäre)
46. Rotation
47. Hintereinanderausführung von Rotationen
48. Drehung der Riemannschen Zahlenkugel
49. Fixpunkte der induzierten Möbiustransformation
50. Matrix der elliptischen Möbiustransformation

51. Matrix zur gedrehten Riemannschen Zahlenkugel
52. Räumliche Drehung Beispiel
53. Bezug zu Quaternionen
54. Drehung $D_{\mathbf{a}}^{\varphi}$
55. Hintereinanderausführung zweier Drehungen
56. Matrixdarstellung von \mathbb{C} und \mathbb{H}

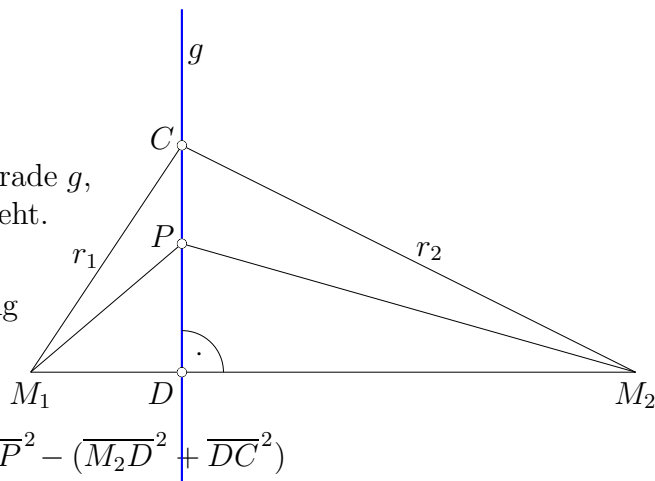
↑ Potenzgerade

Für das Dreieck $\triangle M_1 M_2 C$ gibt es genau eine Gerade g , die durch C verläuft und senkrecht auf $\overline{M_1 M_2}$ steht. Ein Punkt P liegt genau dann auf g , falls gilt:

$$\overline{M_1 P}^2 - r_1^2 = \overline{M_2 P}^2 - r_2^2 \quad \text{sog. Potenzbedingung}$$

Sei $P \in g$. Äquivalent zur Bedingung ist:

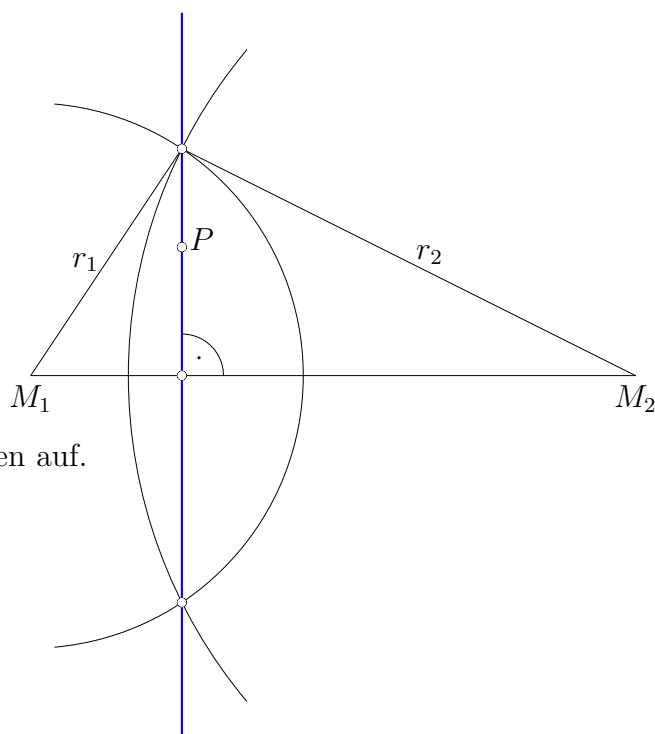
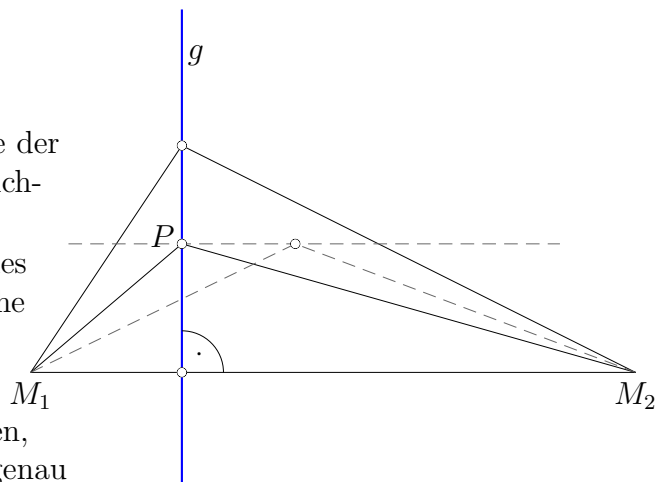
$$\begin{aligned} \overline{M_1 D}^2 + \overline{DP}^2 - (\overline{M_1 D}^2 + \overline{DC}^2) &= \overline{M_2 D}^2 + \overline{DP}^2 - (\overline{M_2 D}^2 + \overline{DC}^2) \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$



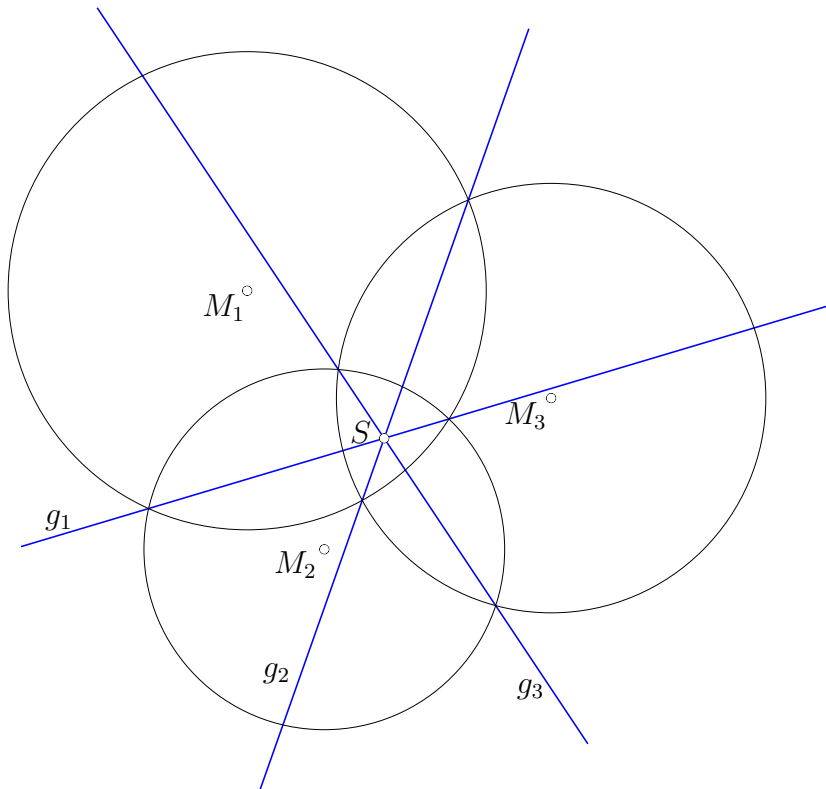
Wird P horizontal verschoben, so wird eine Seite der Potenzbedingung größer, die andere kleiner. Gleichheit besteht dann nicht mehr.

Dies erinnert an den Nachweis der Umkehrung des Satzes von Pythagoras. Punkt C wird in der Höhe variiert und die Summe der Kathetenquadrate wird größer, bzw. kleiner.

Alternativ können Koordinaten eingeführt werden, so dass g auf der y -Achse liegt. $P(x | y)$ erfüllt genau dann die Potenzbedingung, wenn $x = 0$ ist.



Die Potenzgerade g tritt beim Schnitt von Kreisen auf.



Die Potenzgeraden schneiden sich in einem Punkt.

g_1 und g_2 schneiden sich in S , dann gilt:

$$\overline{M_1 S}^2 - r_1^2 = \overline{M_2 S}^2 - r_2^2$$

$$\overline{M_1 S}^2 - r_1^2 = \overline{M_3 S}^2 - r_3^2$$

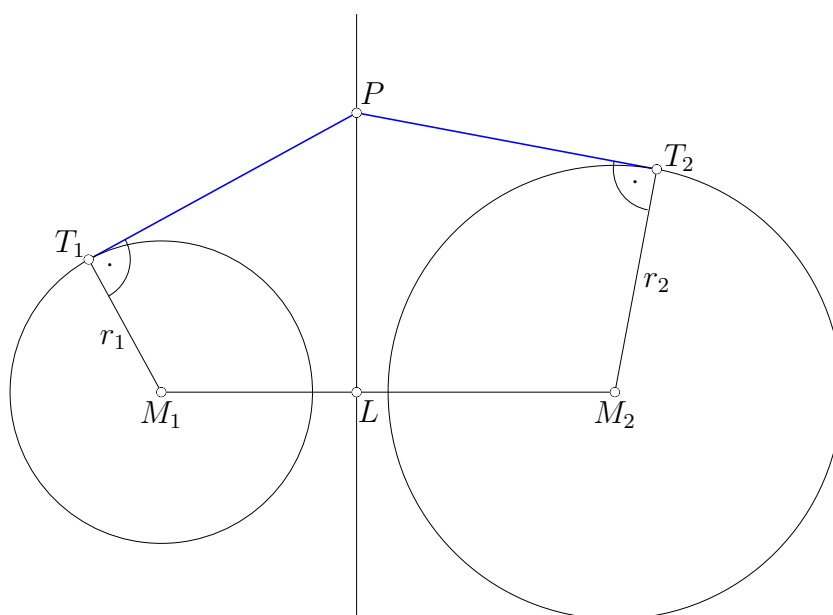
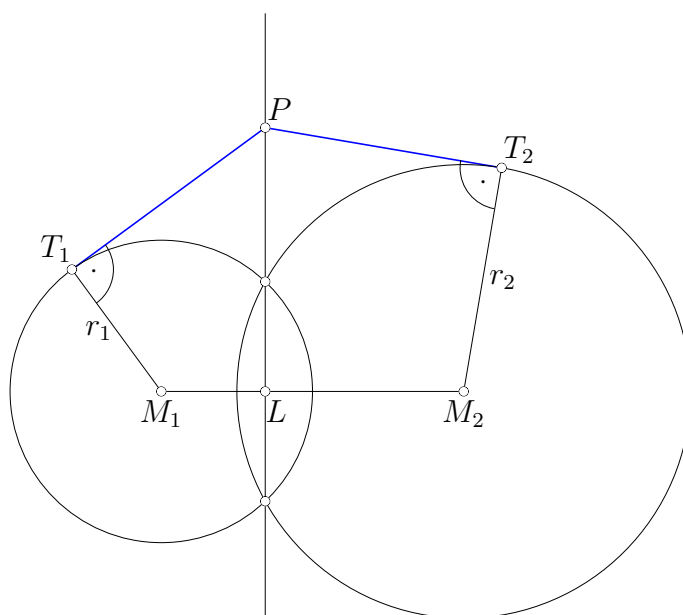
\implies

$$\overline{M_2 S}^2 - r_2^2 = \overline{M_3 S}^2 - r_3^2$$

$$\implies S \in g_3$$

Dies Vorgehen erinnert an den Nachweis, dass sich die Mittelsenkrechten bzw. die Winkelhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.

↑ Potenzgerade



$$\overline{M_1P}^2 - r_1^2 = \overline{M_2P}^2 - r_2^2 \iff \overline{T_1P} = \overline{T_2P} \quad \text{gleichlange Tangentenabschnitte}$$

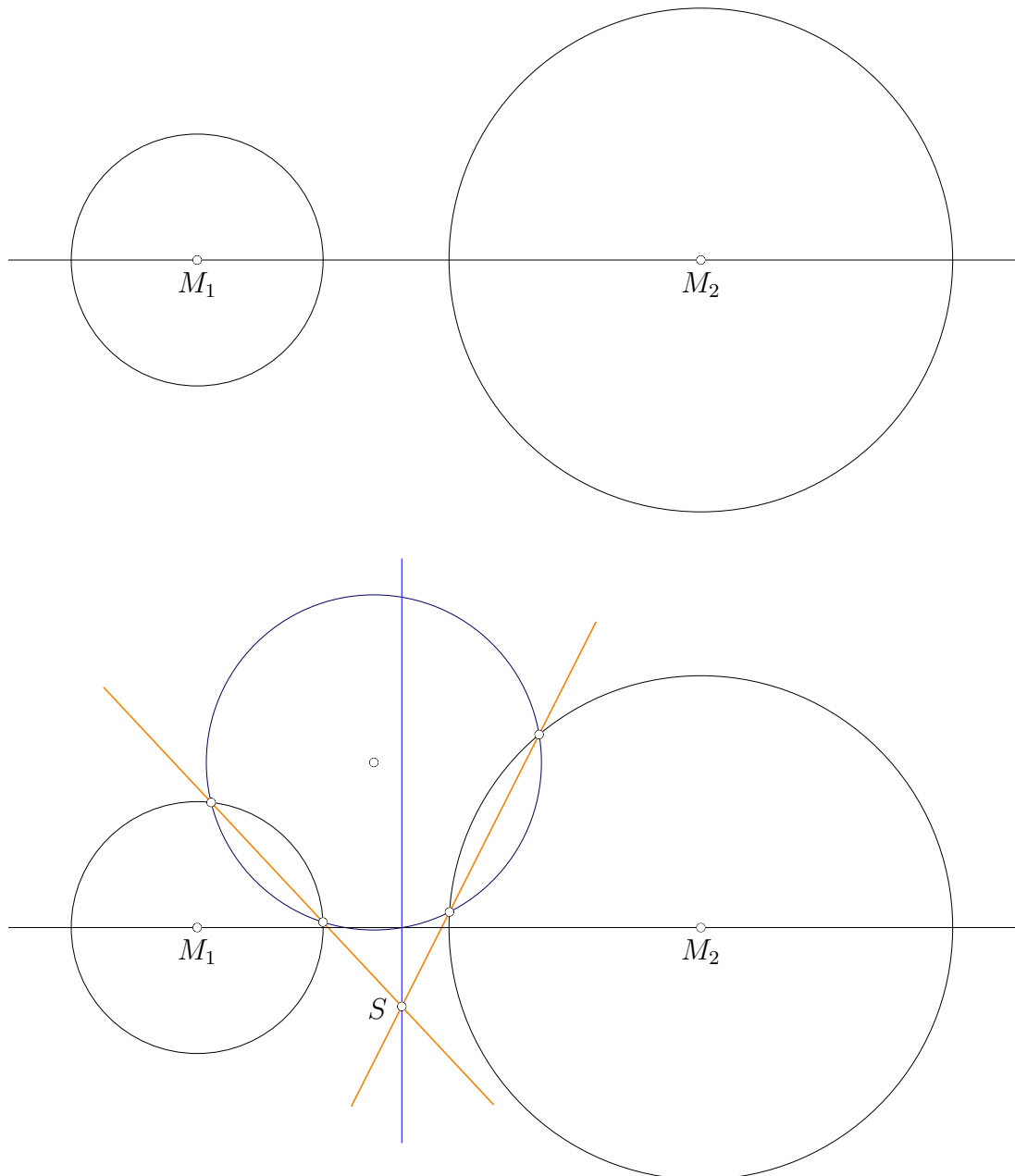
Mit den Ortsvektoren \vec{p} , \vec{m}_1 , \vec{m}_2 der Punkte P , M_1 , M_2 heißt das:

$$(\vec{p} - \vec{m}_1)^2 - r_1^2 = (\vec{p} - \vec{m}_2)^2 - r_2^2 \iff 2\vec{p} \cdot (\vec{m}_2 - \vec{m}_1) - (\vec{m}_2^2 - \vec{m}_1^2 + r_1^2 - r_2^2) = 0$$

Die Umformung ergibt eine Normalengleichung einer Geraden, auf der $\vec{m}_2 - \vec{m}_1$ als Normalenvektor senkrecht steht. Für die Hessesche Normalenform ist durch $2|\vec{m}_2 - \vec{m}_1| = 2d$ zu dividieren.

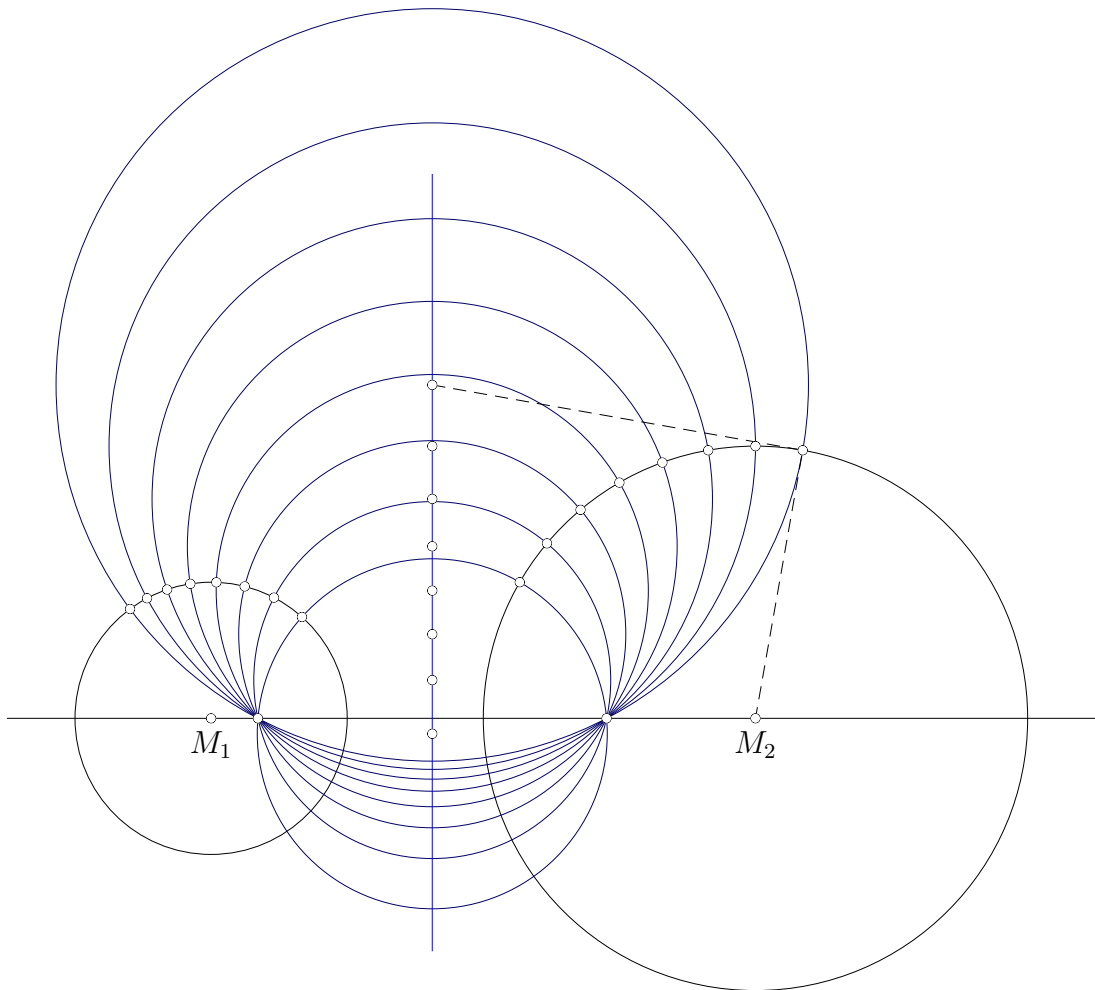
Für die Berechnung von $\overline{M_1L}$ (siehe hier, beachte $-\lambda$) wird \vec{m}_1 zweckmäßigerweise in die linke Gleichung in der Form $\dots/2d = 0$ eingesetzt, Ergebnis $\overline{M_1L} = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$, $d = |M_1M_2|$.

↑ Konstruktion der Potenzgeraden



Die Potenzgeraden dreier Kreise schneiden sich in einem Punkt, falls die Mittelpunkte der Kreise nicht auf einer Geraden liegen. Diese Eigenschaft gibt die Möglichkeit, die Potenzgerade von zwei sich nicht schneidenden Kreisen zeichnerisch zu bestimmen: Man zeichne einen dritten Kreis, der die gegebenen Kreise schneidet. Damit lassen sich zwei Potenzgeraden (orange) zeichnen. Die Lotgerade zu $\overline{M_1M_2}$ durch den Schnittpunkt S ist die gesuchte Potenzgerade.

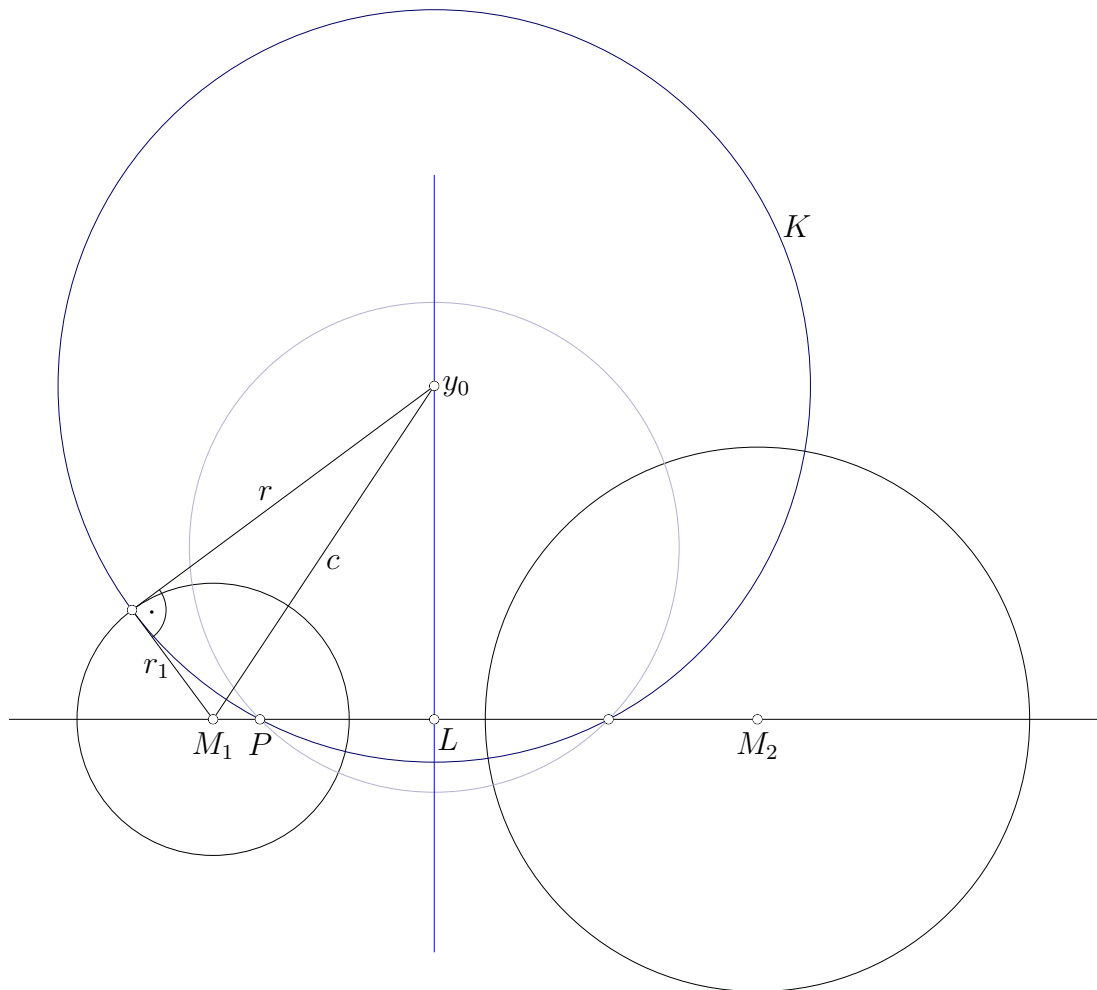
↑ Orthogonales Kreisbüschel



Zu einem (beliebigen) Punkt auf dem Kreis um M_2 wird die Tangente gezeichnet. Der Kreis um den Schnittpunkt mit der Potenzgerade durch den Berührungspunkt schneidet die Kreise um M_1 und M_2 rechtwinklig.

↑ Gemeinsame Punkte des orthogonalen Kreisbüschels

Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass M_1 und M_2 auf der x -Achse liegen und die Potenzgerade auf der y -Achse. Ein Kreis des Büschels ist durch den y_0 -Wert festgelegt, der Radius r kann berechnet werden.



$$d = \overline{M_1 M_2}$$

$$d_1 = \overline{M_1 L} = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$$

$$c^2 = d_1^2 + y_0^2$$

$$r^2 = d_1^2 + y_0^2 - r_1^2$$

$$x^2 + (y - y_0)^2 = d_1^2 + y_0^2 - r_1^2$$

$$x^2 = d_1^2 - r_1^2$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{d_1^2 - r_1^2} = \pm \overline{PL}$$

bekannt siehe Potenzgerade

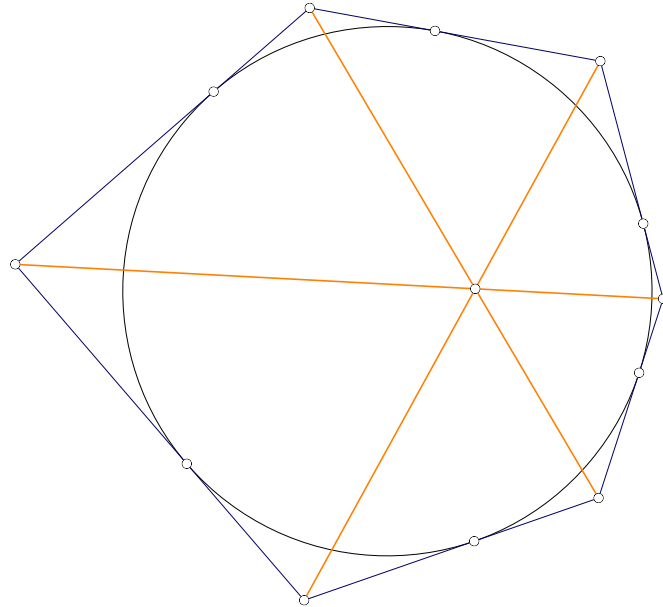
K Kreisgleichung

Schnitt mit der x -Achse, $y = 0$

Die Schnittstellen sind unabhängig von y_0 .

↑ Satz von Brianchon 1783-1864

In jedem einem Kreis umschriebenen Sechseck (Tangentensechseck) schneiden sich die Diagonalen, die gegenüberliegende Eckpunkte des Sechsecks verbinden, in einem gemeinsamen Punkt.

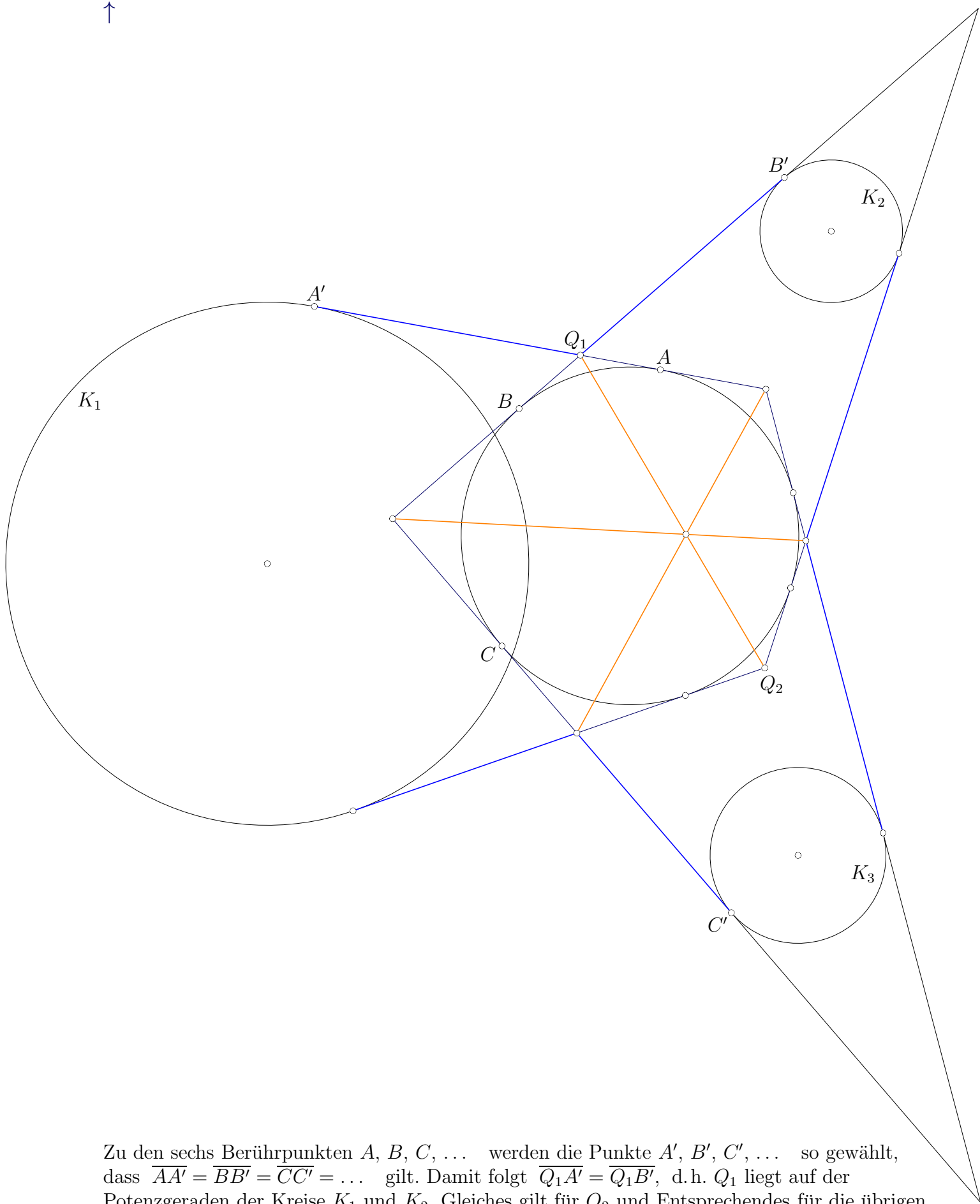


Beweisidee

Die Diagonalen sind die Potenzlinien dreier Kreise.

Für ihre Konstruktion werden die Sechseckseiten verlängert.

Für jeden Eckpunkt sind jeweils die Entfernungen zu den beiden nächstliegenden, tangentialen Berührungspunkten gleich.



Zu den sechs Berührungspunkten A, B, C, \dots werden die Punkte A', B', C', \dots so gewählt, dass $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \dots$ gilt. Damit folgt $\overline{Q_1A'} = \overline{Q_1B'}$, d.h. Q_1 liegt auf der Potenzgeraden der Kreise K_1 und K_2 , Gleiches gilt für Q_2 und Entsprechendes für die übrigen Kreispaaire (K_1, K_3) und (K_2, K_3) .

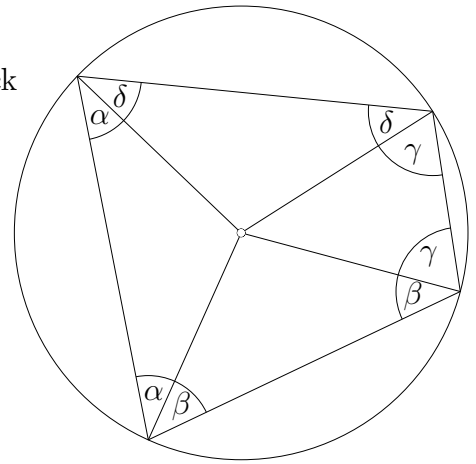
↑ Kreis und Winkel

Gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck

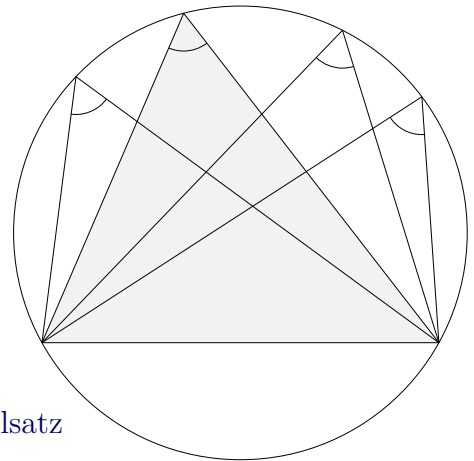
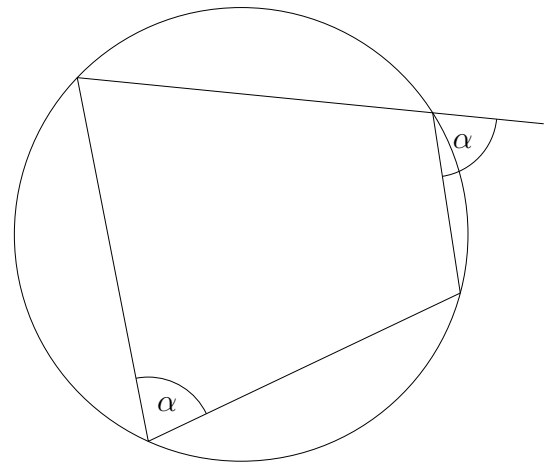
$$2(\alpha + \beta) + 2(\gamma + \delta) = 360^\circ$$

$$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ$$

ergänzen sich zu 180° .



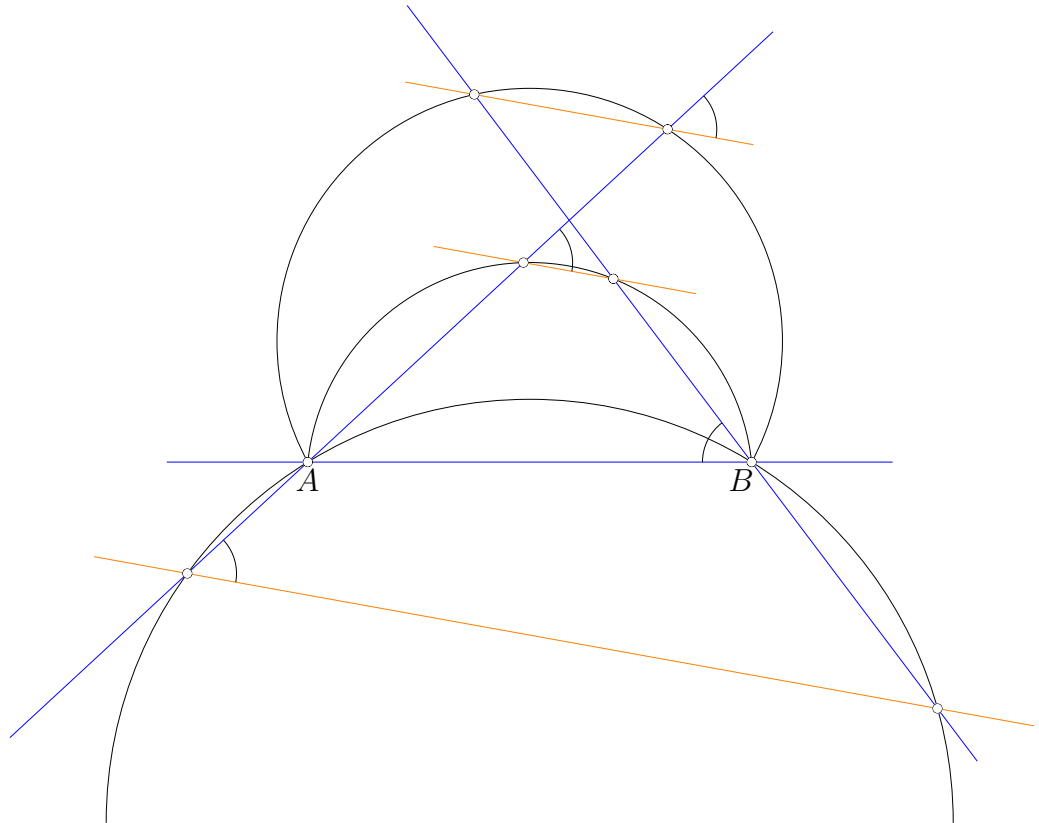
Aussage etwas abgewandelt



↑ Umfangswinkelsatz

Damit kann leicht begründet werden:

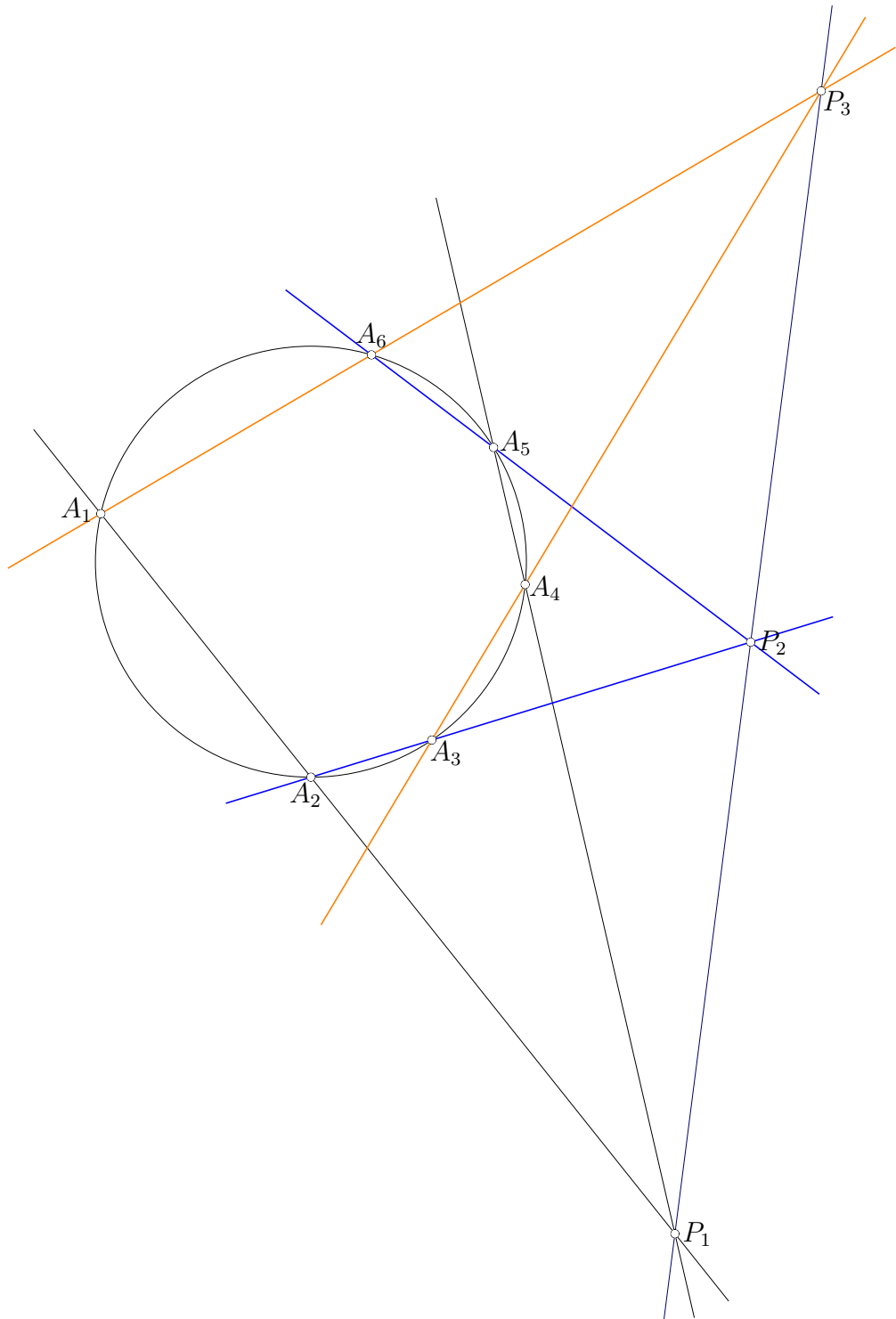
↑ Zusammenhang Kreise/parallele Geraden

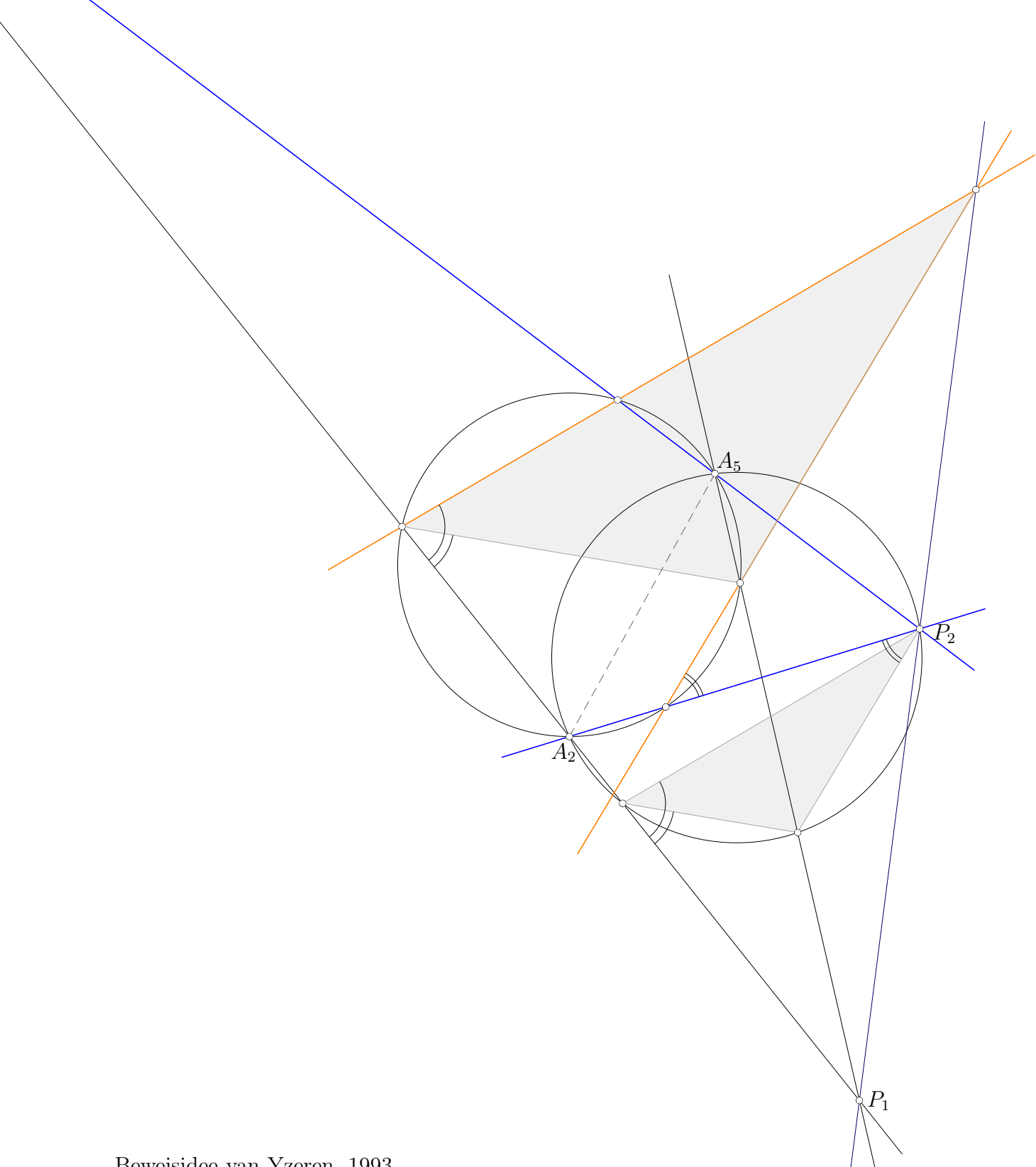


Die Kreise haben die gemeinsame Sehne AB .
Ihre Schnittpunkte mit den Dreiecksgeraden (blau) definieren parallele Geraden.

↑ Satz von Pascal 1623-1662

Verlängert man in einem Sehnensechseck eines Kreises je zwei gegenüberliegende Seiten bis zum Schnitt, so liegen die Schnittpunkte auf einer Geraden.





Beweisidee van Yzeren, 1993

Die grau gefärbten Dreiecke gehen durch Streckung am Zentrum P_1 auseinander hervor. Für die Konstruktion des kleineren Dreiecks wird der Umkreis des Dreiecks $\triangle A_2 P_2 A_5$ benötigt. Zu zeigen:

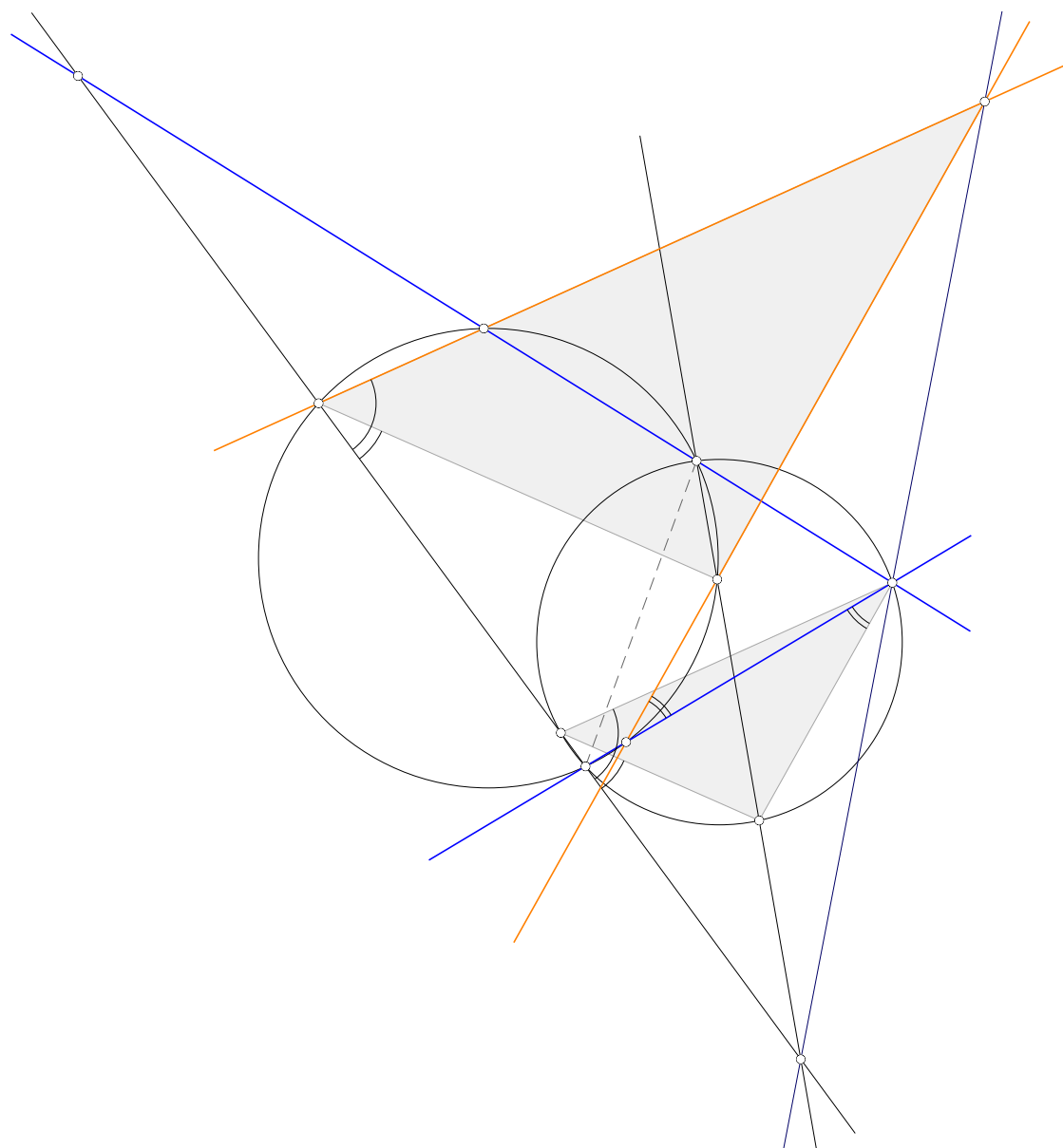
Die Dreiecksseiten verlaufen paarweise parallel zueinander.

Das kann durch dreimalige Anwendung des Zusammenhangs Kreise/parallele Geraden unmittelbar nachgewiesen werden. Es verlaufen drei Geradenpaare durch A_2 und A_5 .

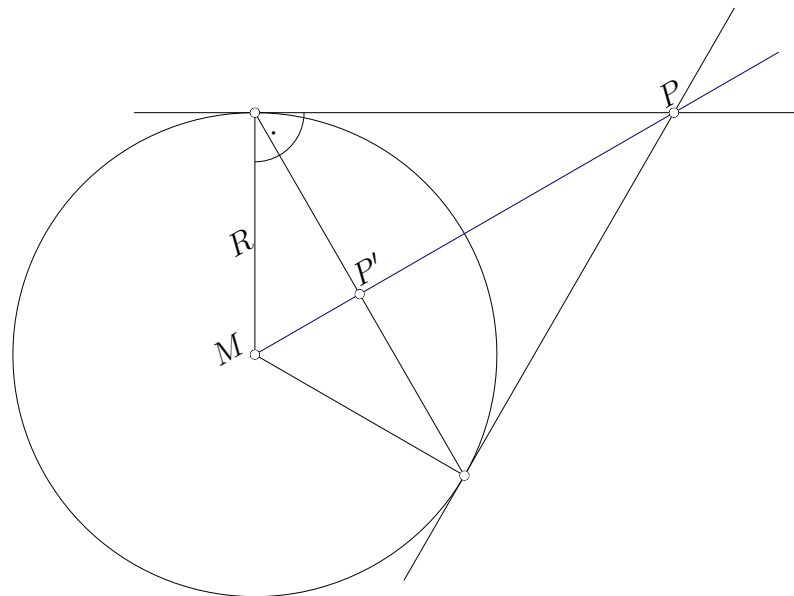
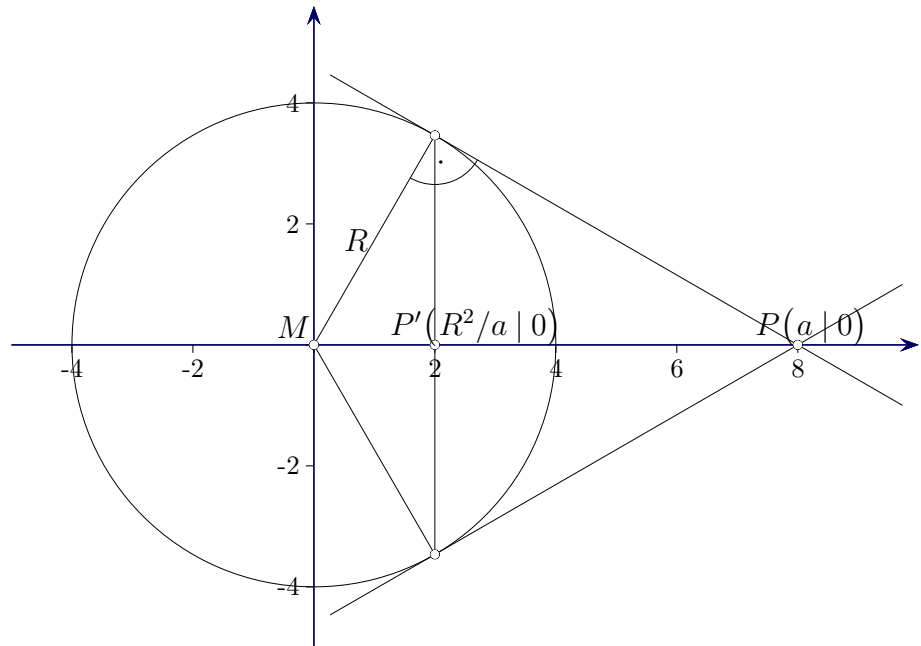
Ein Paar zusätzlich durch P_1 , eines (blau) zusätzlich durch P_2 , der Schnittpunkt des dritten Paares liegt links oben außerhalb der Abbildung.

↑

↑ Satz von Pascal



↑ Spiegelung am Kreis, Inversion



Die Inversion ist rotationssymmetrisch und involutorisch (selbstinvers).

Das Äußere des Kreises wird auf das Innere abgebildet und umgekehrt.

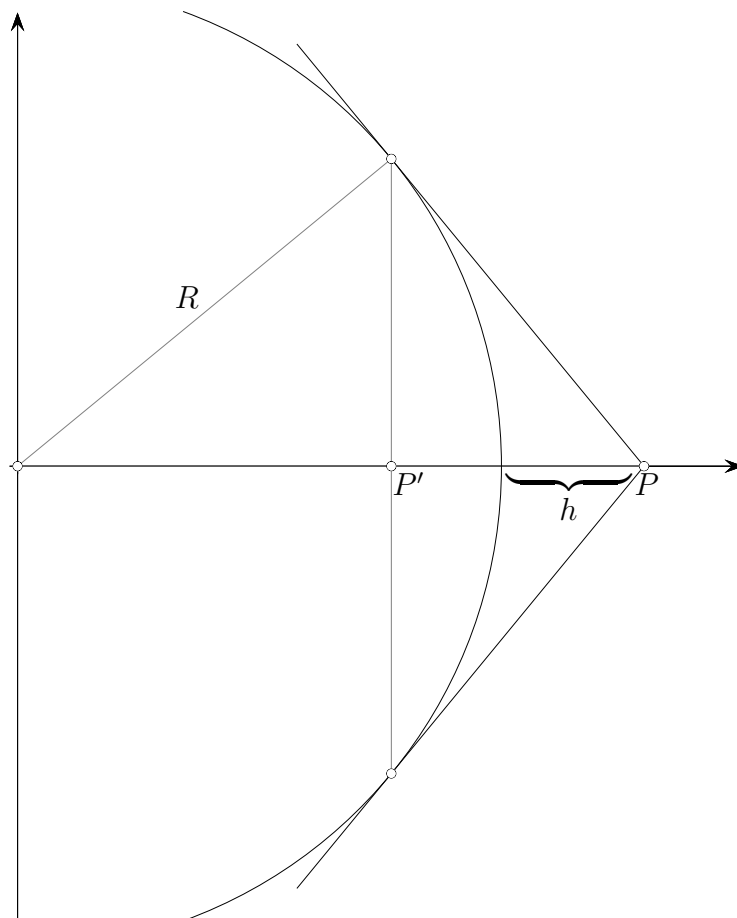
$$R^2 = \overline{MP} \cdot \overline{MP'}$$

$$\overline{MP'} = R^2 / \overline{MP}$$

Für $R = 1$ und $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt für die Abbildung:

$$\mathbf{x} \rightarrow \frac{1}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{x}|} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{Der Einheitsvektor von } \mathbf{x} \text{ wird mit } 1/|\mathbf{x}| \text{ multipliziert.}$$

↑ Spiegelung am Kreis/Spiegelung an einer Geraden



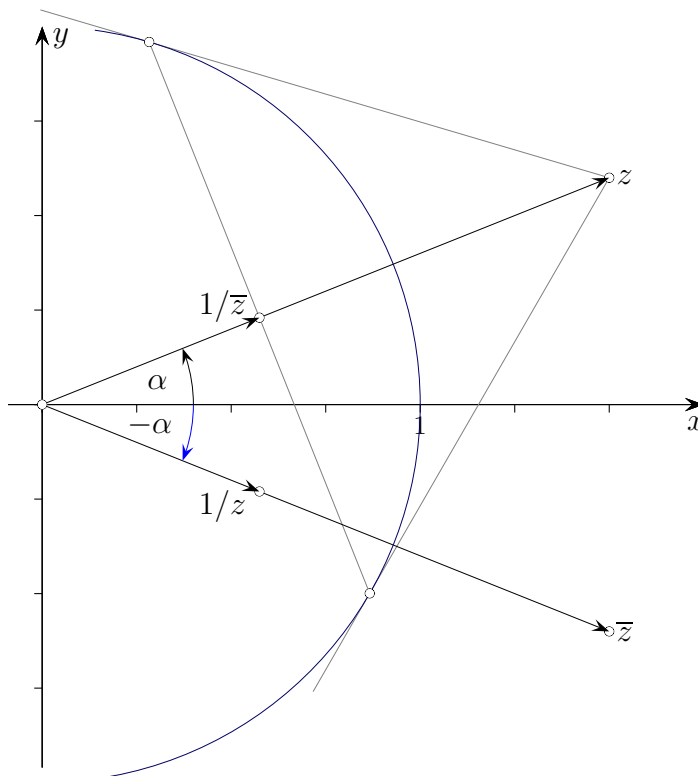
1

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OP'} &= R^2 \\ (R+h) \cdot (R+h)' &= R^2 && | \overline{OP} = R+h \\ (R+h)' &= \frac{R^2}{R+h} \\ &= R-h + \underbrace{\frac{1}{R}h^2 - \frac{1}{R^2}h^3 + / - \dots} \end{aligned}$$

Reihe alternierend, Summanden streben gegen null, Intervallschachtelung

Wenn sich P in Richtung Kreis bewegt, gleichen sich die Abstände von P und P' zum Kreis an. Für hinreichend kleines h sind Spiegelung am Kreis und Spiegelung an einer Geraden (Kreis mit unendlich großem Radius) nahezu identisch.

↑ Inversion im Komplexen $z \rightarrow 1/\bar{z}$



Für das Verständnis der Abbildung:

Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert. Die Konjugation $z = x + yi \rightarrow \bar{z} = x - yi$ ist eine Spiegelung an der x -Achse.

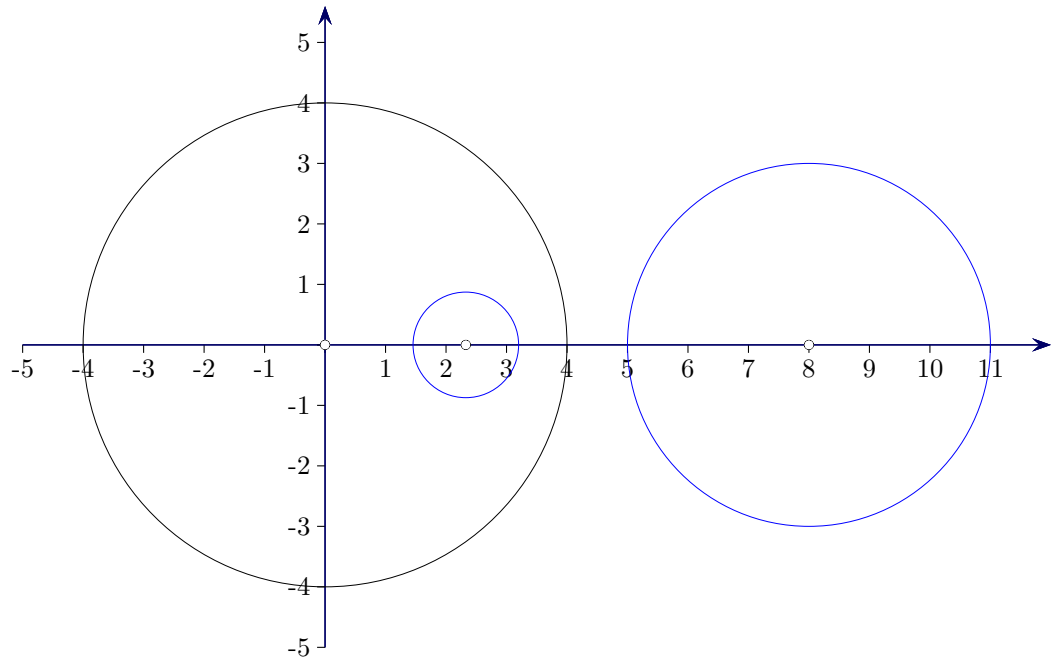
Mit $z = x + yi \in \mathbb{C}$ gilt: $z \rightarrow z' = \frac{R^2}{z\bar{z}} z \stackrel{R=1}{=} \frac{z}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$, $z'\bar{z} = 1$

Für einen Kreis um c mit dem Radius R gilt: $z \rightarrow z' = c + \frac{R^2}{\overline{z-c}}$, $(z' - c)\overline{(z - c)} = R^2$

Für $z \neq 0$ existiert $w = 1/z$.

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x+yi)} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

↑ Abbildung eines Kreises



$$\mathbf{x} \rightarrow \frac{R^2}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R = 4$$

Wir suchen das Bild vom Kreis $(x - 8)^2 + y^2 = 9$, allgemein $(x - m)^2 + y^2 = r^2$.

Da das Bild gleichzeitig auch Urbild ist, erhalten wir:

$$\left(\frac{R^2 x}{x^2+y^2} - 8\right)^2 + \left(\frac{R^2 y}{x^2+y^2}\right)^2 = 9 \quad | \text{Klammern auflösen, } \cdot (x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 - \frac{256}{55}x + \frac{256}{55} = 0$$

$$\left(x - \frac{128}{55}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{48}{55}\right)^2$$

$$\left(\frac{R^2 x}{x^2+y^2} - m\right)^2 + \left(\frac{R^2 y}{x^2+y^2}\right)^2 = r^2 \quad \text{allgemein}$$

$$(x^2 + y^2)(-m^2 + r^2) + 2R^2 m x = R^4$$

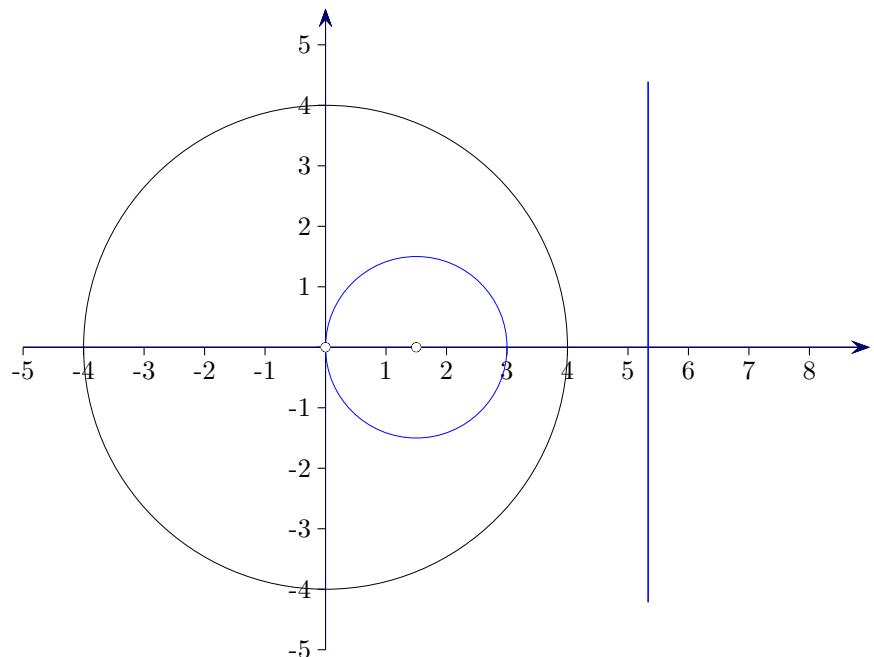
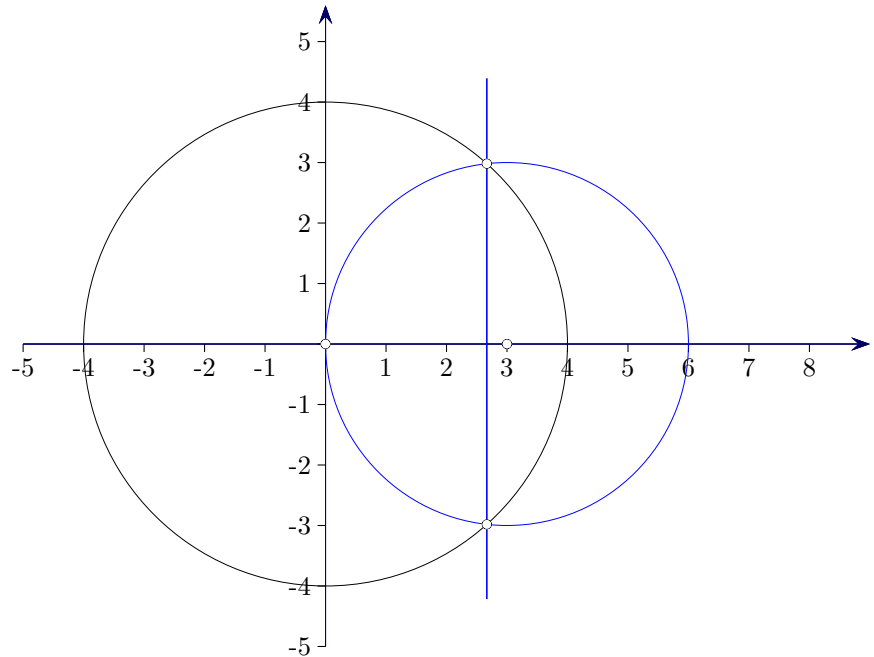
Die Schnittstellen von $k: (x - m)^2 + y^2 = r^2$ mit der x -Achse sind $n_{1/2} = m \pm r$, sie werden auf $n'_{1/2} = \frac{R^2}{m \pm r}$ abgebildet. Der Radius von k' ist somit $r^* = \frac{n'_2 - n'_1}{2}$,

und die x -Koordinate des Mittelpunkts $m^* = \frac{n'_1 + n'_2}{2}$.

Die Mittelpunkte sind nicht invers zueinander.

$$(x^2 + y^2)(-m^2 + r^2) + 2R^2mx = R^4$$

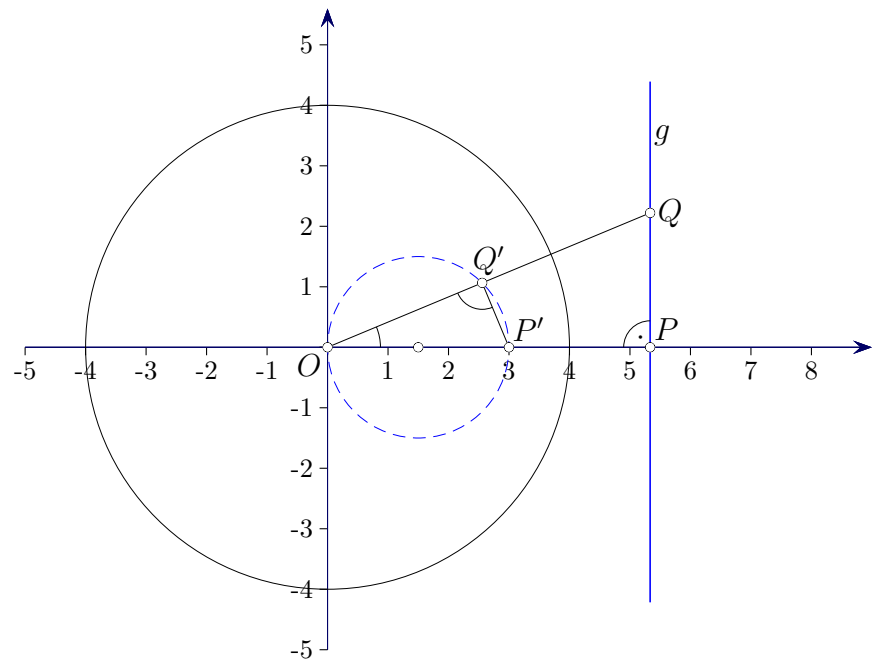
Mit $-m^2 + r^2 = 0$, d.h. $m = r$, der Kreis verläuft durch den Ursprung, erhalten wir die Gerade $x = \frac{R^2}{2r}$, hier $x = \frac{16}{2 \cdot 3} = \frac{8}{3}$.



Eine Gerade, die nicht durch den Ursprung verläuft, wird auf einen Kreis abgebildet, der den Ursprung enthält.



↑ Geometrische Begründung Gerade \rightarrow Kreis



Strebt Q auf der Geraden g gegen Unendlich, so strebt sein Bild gegen O .

P' hat den maximalen Abstand zu O , da P den kleinsten Abstand zu O hat.

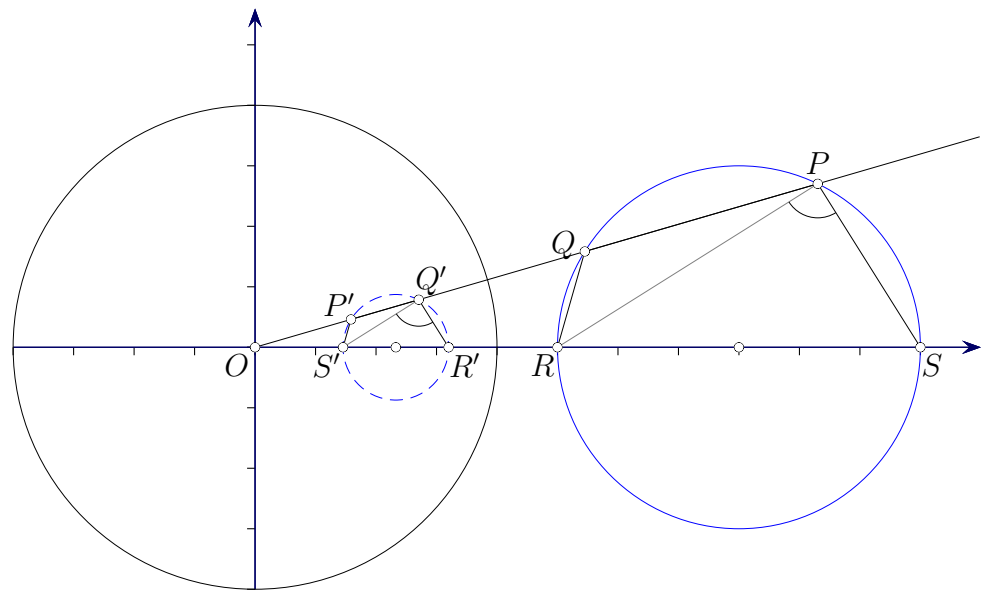
Um zu zeigen, dass das Bild von g ein Kreis ist, also der Thaleskreis über OP' , ist für jeden Punkt Q auf g nachzuweisen, dass das Dreieck $\triangle OP'Q'$ rechtwinklig ist.

Die Dreiecke $\triangle OP'Q'$ und $\triangle OQP$ sind ähnlich, da sie bereits einen gemeinsamen Winkel und gleiche Streckenverhältnisse haben:

$$\overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = R^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}$$

$$\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}$$

↑ Geometrische Begründung Kreis \rightarrow Kreis



$$\begin{array}{ll} \overline{OP'} \cdot \overline{OP} = \overline{OS'} \cdot \overline{OS} & \text{Inversion} \\ \overline{OP'} \cdot \overline{OQ'} = \overline{OS'} \cdot \overline{OR'} & \text{Sekantensatz} \end{array}$$

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}, \quad \overline{Q'R'} \parallel \overline{PS}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{OQ'} \cdot \overline{OQ} = \overline{OR'} \cdot \overline{OR} & \text{Inversion} \\ \overline{OQ'} \cdot \overline{OP'} = \overline{OR'} \cdot \overline{OS'} & \text{Sekantensatz} \end{array}$$

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS'}}, \quad \overline{P'S'} \parallel \overline{QR}$$

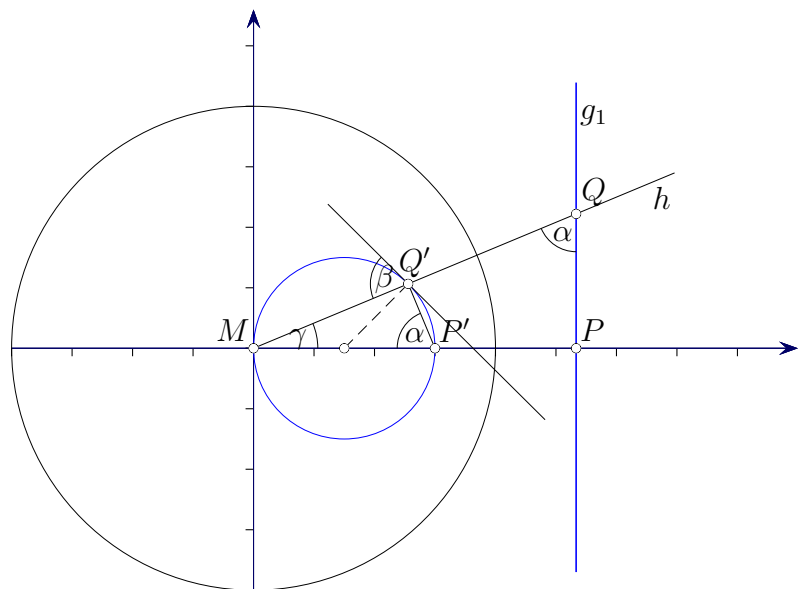
Damit sind die beiden Sehnenvierecke ähnlich und die Winkel (hier auf dem Thaleskreis) sind gleich.

↑ Inversion an einer Kugel

Die Übertragung der Inversion von der Ebene auf den Raum liegt nahe. Drehen wir die letzten beiden Figuren im Raum um die Symmetrieachse (hier x -Achse), so wird aus dem Inversionskreis eine Inversionskugel und wir erkennen: Eine Kugel und eine Ebene gehen durch Inversion in eine Kugel oder eine Ebene über. Jeder im Raum liegende Kreis kann als Schnitt zweier Kugeln angesehen werden, so dass auch Kreise in Kreise übergehen. Dieses Ergebnis ist für die stereographische Projektion von Belang, die als Inversion an einer Kugel aufgefasst werden kann.

↑ Die Inversion ist winkeltreu.

Die Inversion bildet Winkel zwischen Kurven auf gleichgroße Winkel zwischen den Bildern der Kurven ab. Hierzu betrachten wir zunächst zwei Geraden, von denen eine durch den Ursprung verläuft, somit auf sich selbst abgebildet wird, $h = h'$, und den Winkel α einschließen. Der Bildkreis (Tangente) und die Bildgerade schließen den Winkel β ein.

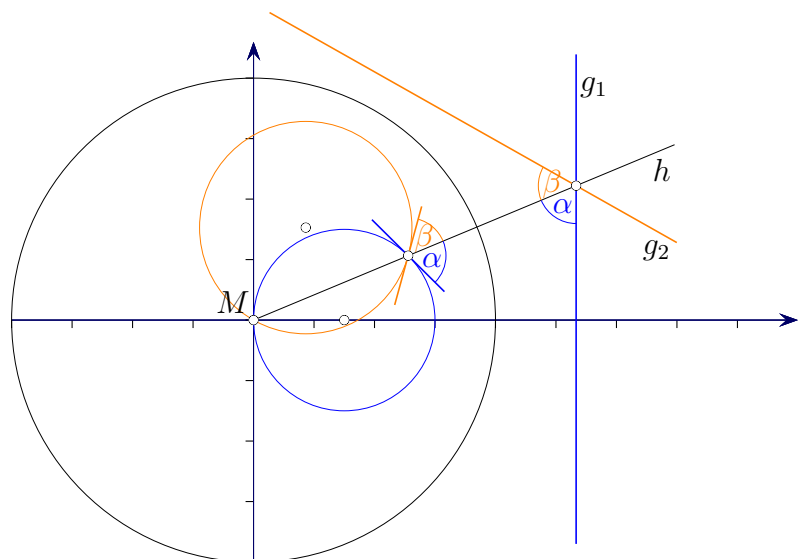


Wir hatten gesehen, dass die Dreiecke $\triangle MP'Q'$ und $\triangle MQP$ ähnlich sind.

Beide haben einen gemeinsamen Winkel α .

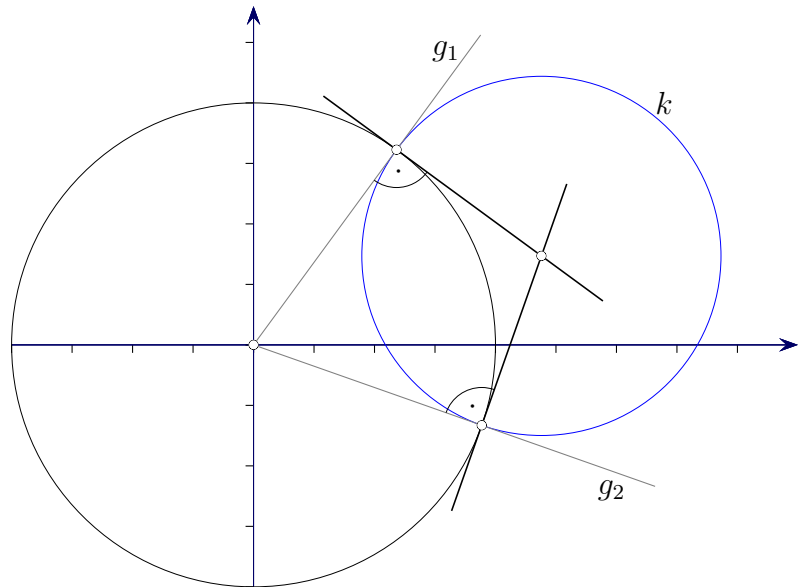
(Die Ähnlichkeit liegt auch mit einem beliebigen Punkt P auf g vor.)

Aus dem Tangentenwinkelsatz ($\alpha + \gamma = 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ - \gamma$, $\beta = 90^\circ - \gamma$) folgt $\alpha = \beta$.



Die Winkel(größen) α und β bleiben bei der Inversion erhalten, also auch $\alpha + \beta$.

↑ Kreise, die auf sich abgebildet werden

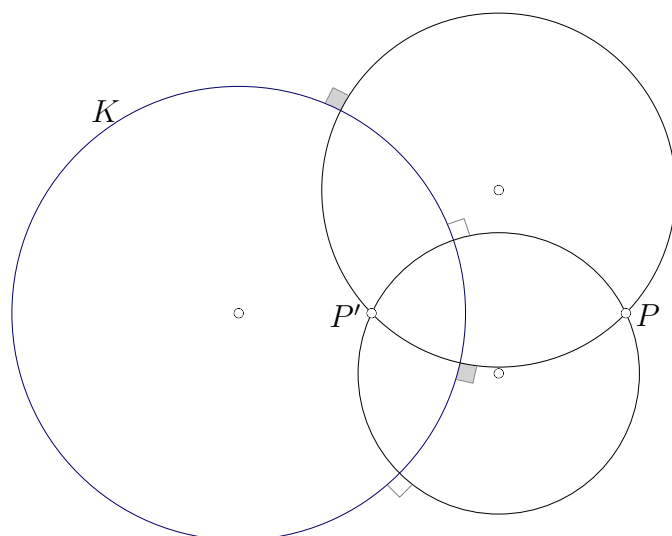


Ein Kreis k , der zum Inversionskreis orthogonal ist, wird auf sich abgebildet.

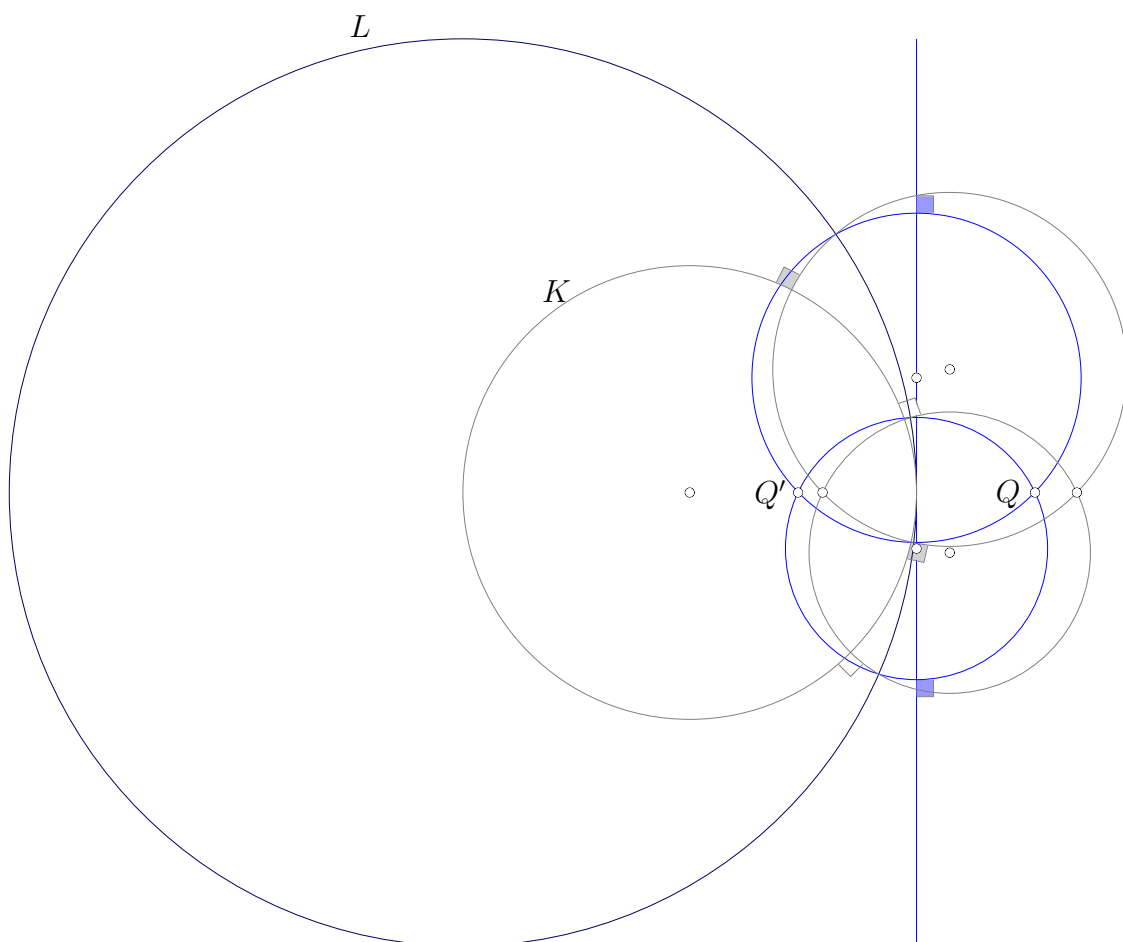
Die Ursprungsgeraden g_1 und g_2 sowie die Berührungspunkte werden jeweils auf sich abgebildet.

Bei der Inversion bleibt die Berühreigenschaft erhalten. k' verläuft also durch die Berührungspunkte und die Ursprungsgeraden verlaufen tangential zu k' . k' ist daher k .

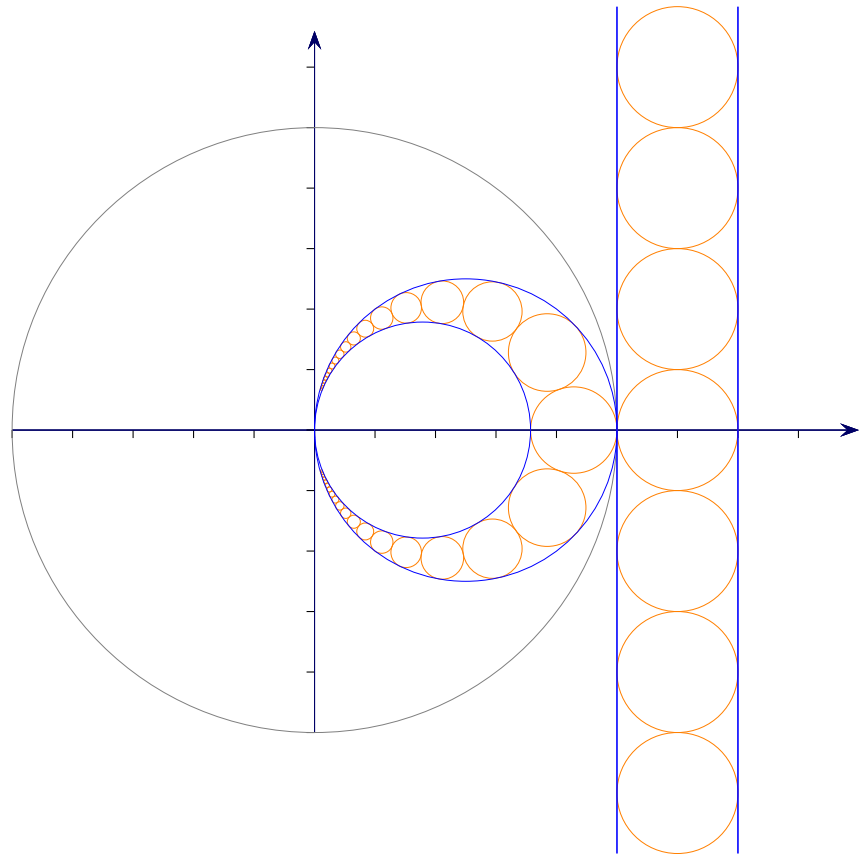
↑ Inversion und Erhaltung der Symmetrie, Symmetrieprinzip



P und P' sind hinsichtlich der Spiegelung an K symmetrisch. Der Inversionspunkt von P kann auch mit orthogonalen Kreisen konstruiert werden, da sie auf sich abgebildet werden. Wird diese Figur an L invertiert, geht K in eine Gerade über, bezüglich der die Bildkreise (blau gezeichnet) mit den Schnittpunkten Q und Q' spiegelsymmetrisch sind.

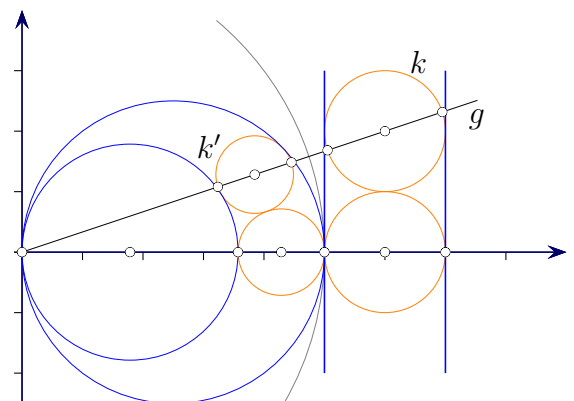


↑ Kreiskette

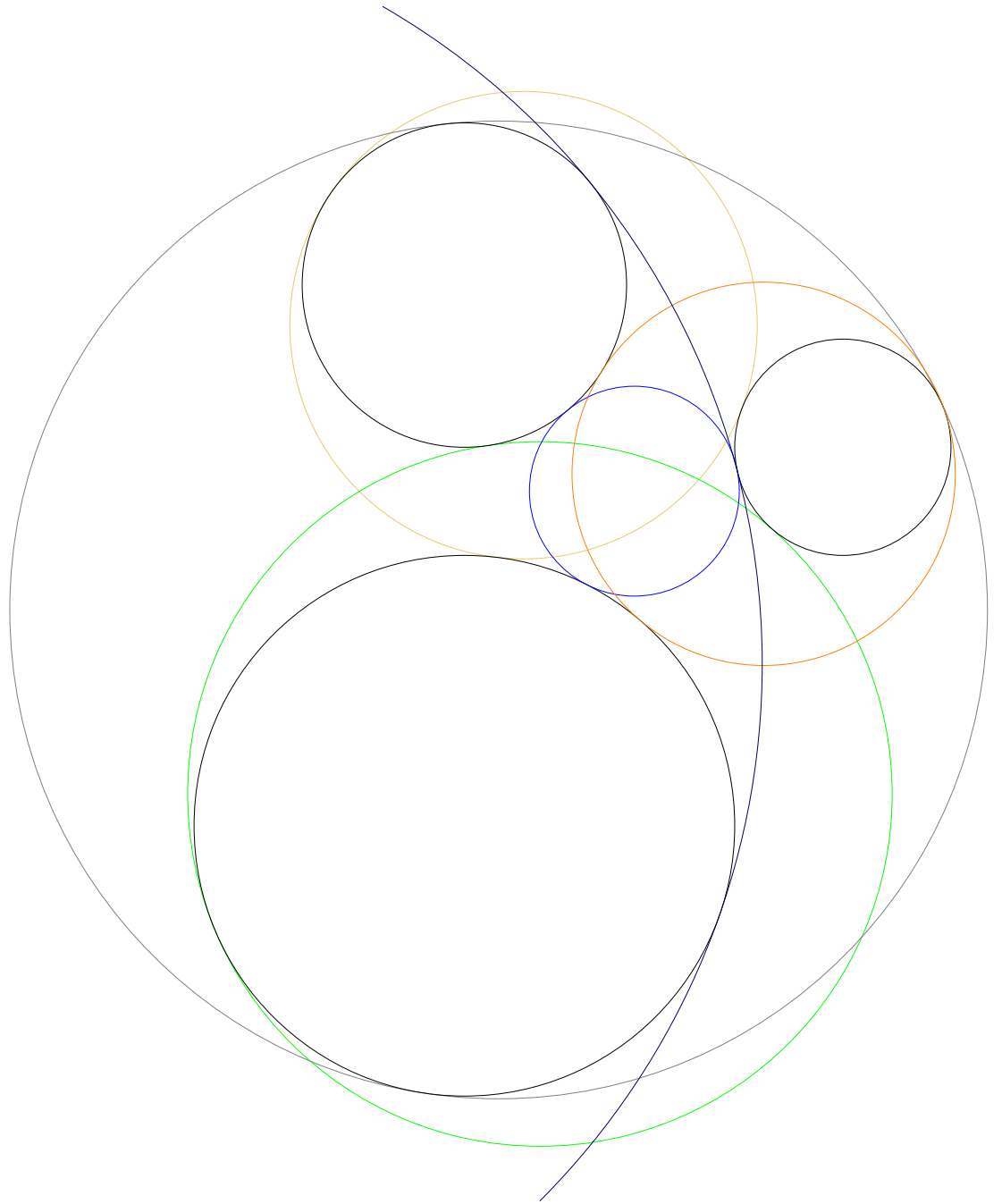


Hinweis zur Anfertigung

g verläuft durch den Mittelpunkt von k .
 Mit den Bildern der Schnittpunkte von g und k werden Mittelpunkt und Radius von k' ermittelt.

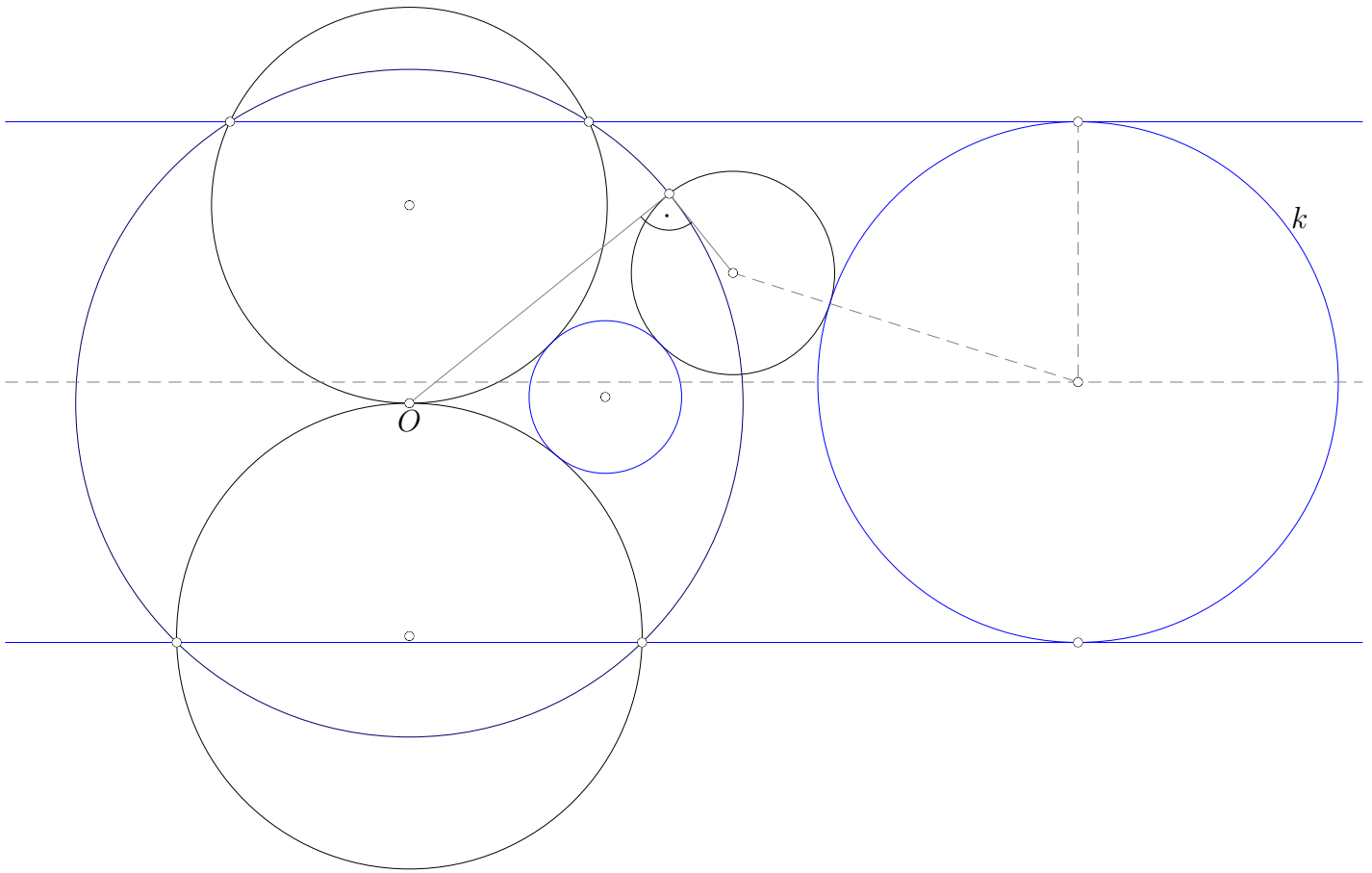


↑ Problem des Apollonios



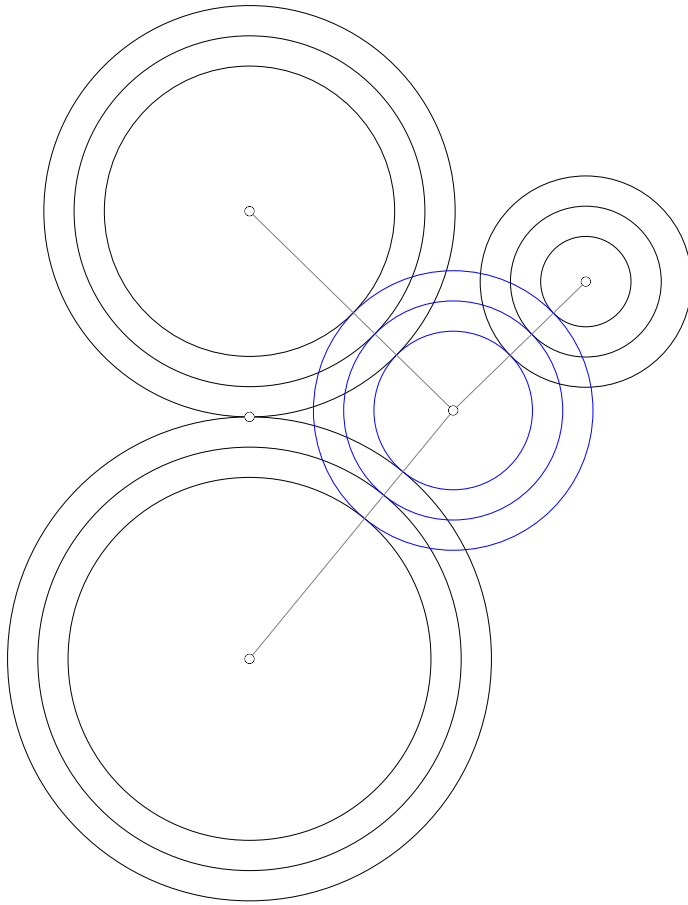
Gesucht ist ein Kreis, der drei Kreise berührt, innen oder außen.
Von den acht Möglichkeiten sind sechs abgebildet.

↑ Problem des Apollonios



Wenn zwei Kreise sich berühren, kann ein Inversionskreis gefunden werden, der zwei Kreise in Geraden und den dritten Kreis auf sich abbildet. Für die drei Bilder wird ein Kreis k konstruiert (leicht, siehe Abbildung), der diese berührt. Schlussendlich wird dieser Kreis invertiert.

↑ Problem des Apollonios

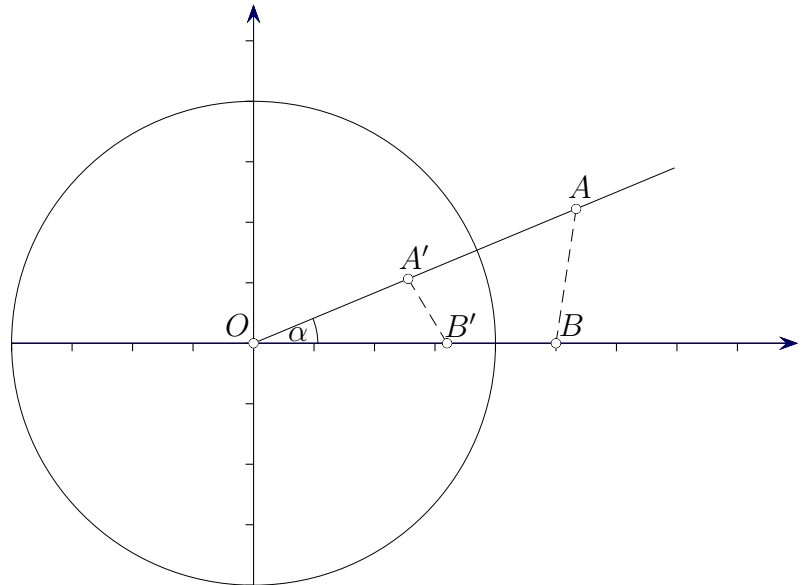


Im allgemeinen Fall werden die Radien der Kreise soweit vergrößert, bis zwei Kreise sich berühren. Der Radius des Lösungskreises wird dann im gleichen Maße vergrößert.

↑ Abstände

Welche Beziehung besteht bei einer Inversion zwischen den Abständen \overline{AB} und $\overline{A'B'}$?

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \frac{R^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$$



Die Dreiecke $\triangle OBA$ und $\triangle OA'B'$ sind ähnlich, da sie bereits einen gemeinsamen Winkel und gleiche Streckenverhältnisse haben:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$$

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}}$$

Ähnlichkeit

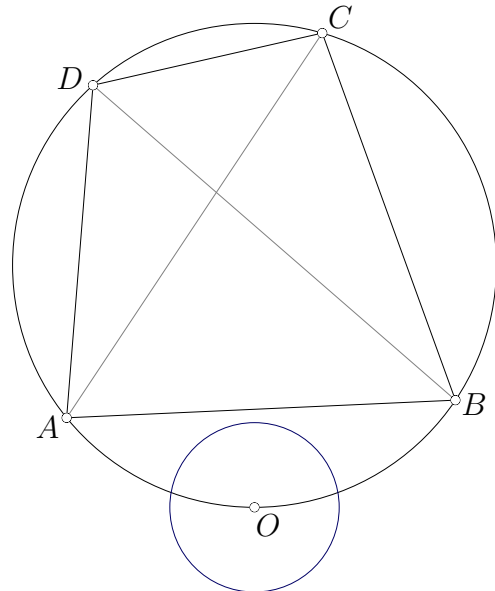
$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} \quad | \text{ mit } \overline{OB} \text{ erweitern}$$

$$= \overline{AB} \frac{R^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \quad | R^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$$

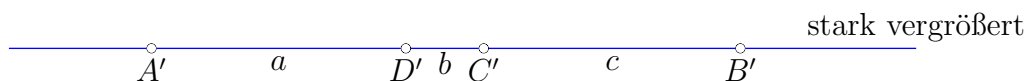
↑ Satz von Ptolemäus

Die Ecken eines Vierecks $ABCD$ liegen auf einem Kreis.

Dann gilt: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.



Nach geeigneter Inversion wird der Kreis auf eine Gerade abgebildet.



$$\overline{A'D'} = a, \quad \overline{D'C'} = b, \quad \overline{C'B'} = c.$$

$$1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} \quad \text{zu zeigen}$$

$$= \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'}}{\overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}} + \frac{\overline{A'D'} \cdot \overline{B'C'}}{\overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}}$$

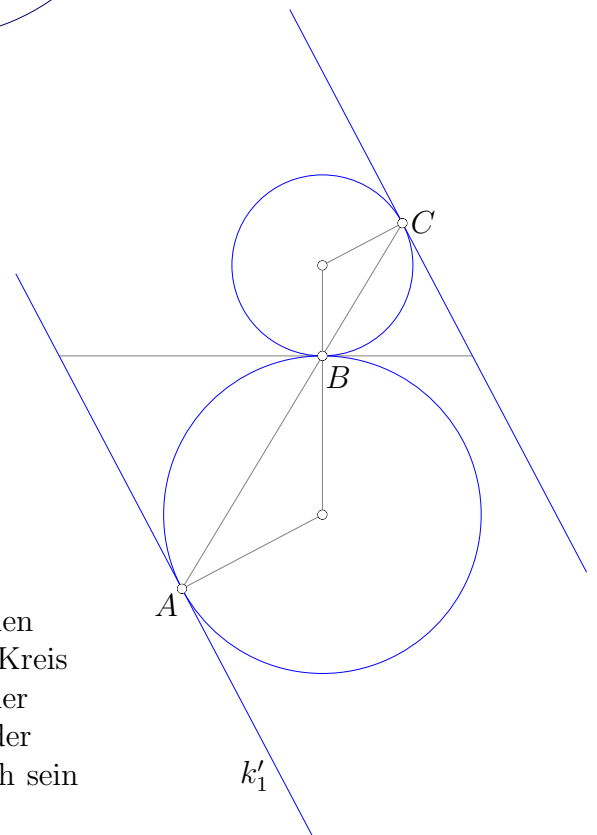
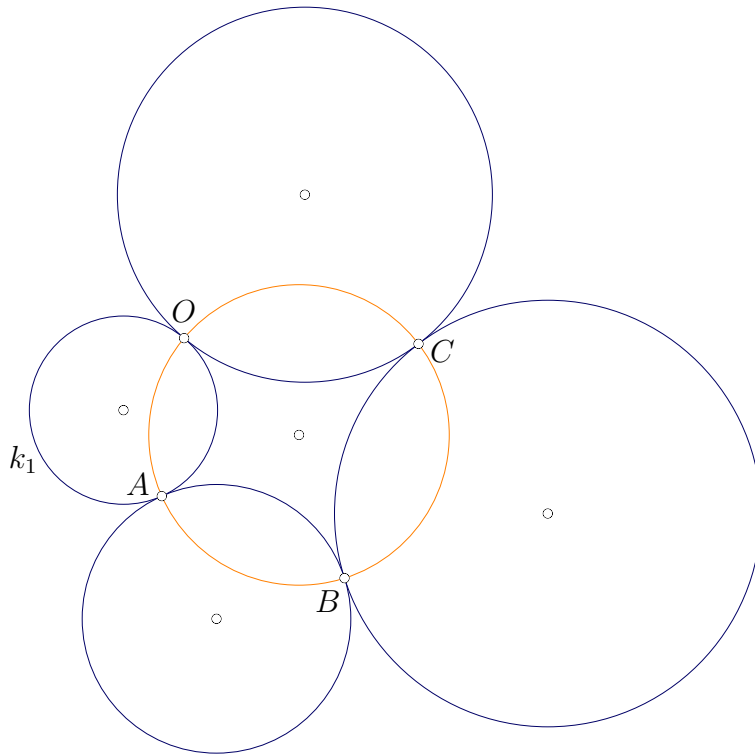
R^2 und die Nenner heben sich sämtlich auf.

$$= \frac{(a+b+c)b+ac}{(a+b)(b+c)}$$

$$= \frac{ab+b^2+bc+ac}{ab+b^2+ac+bc} = 1$$

↑ Geschlossene Kreiskette

Die Berührungspunkte der Kreise liegen auf einem Kreis.

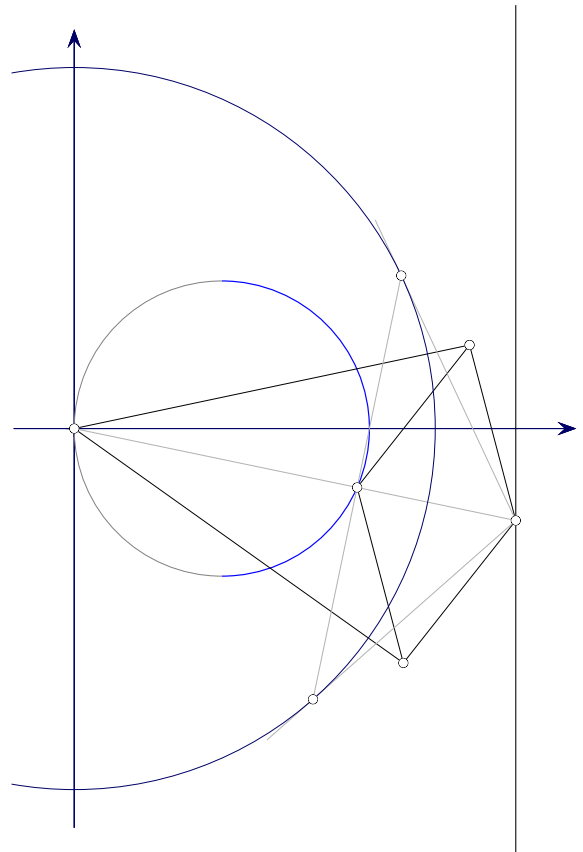
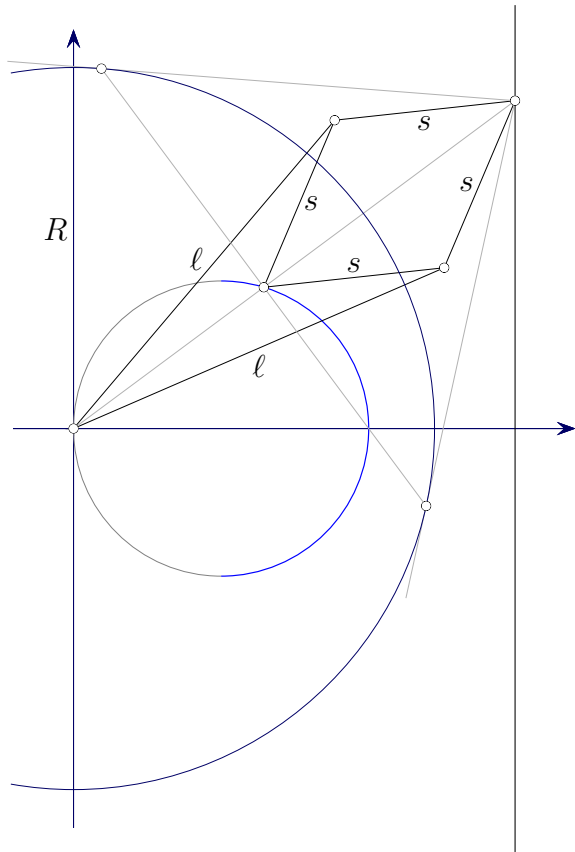


Bei einer geeigneten Inversion mit Zentrum in O werden die Kreise wie rechts abgebildet. Der orange gefärbte Kreis verläuft durch O , A und C . Zu zeigen ist, dass auch der Berührungspunkt B auf dem Kreis liegt, d. h. dass B auf der Geraden durch A und C liegt. Das dürfte offensichtlich sein (ähnliche Dreiecke usw.).

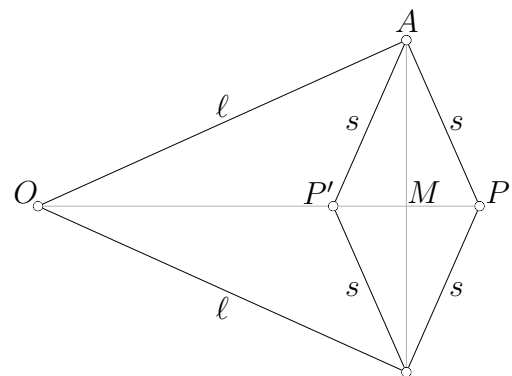
Die Lagebeziehung bleibt erhalten, falls die Tangente durch B parallel zu den Bildgeraden verläuft.

↑ Inversor von Peaucellier 1864

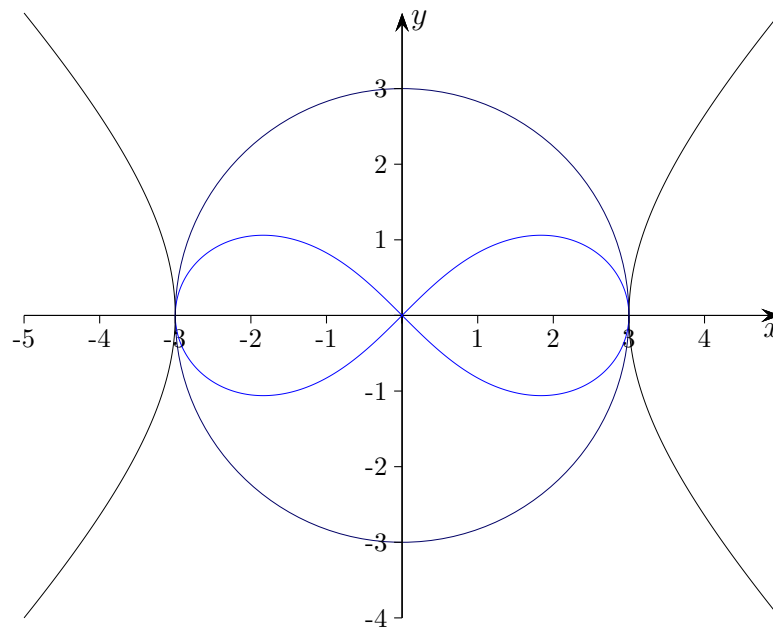
Mit dieser Konstruktion aus Gelenkstangen kann eine Bewegung auf einem Kreisbogen in eine Bewegung auf einer Geraden überführt werden und umgekehrt. Der Inversor beruht auf der Inversion am Kreis.



$$\begin{aligned}
 \overline{OP} \cdot \overline{OP'} &= (\overline{OM} - \overline{MP})(\overline{OM} + \overline{MP'}) \\
 &= (\overline{OM} - \overline{MP})(\overline{OM} + \overline{MP}) \\
 &= \overline{OM}^2 - \overline{MP}^2 \\
 &= (\overline{OA}^2 - \overline{MA}^2) - (\overline{PA}^2 - \overline{MA}^2) \\
 &= \overline{OA}^2 - \overline{PA}^2 \\
 &= \ell^2 - s^2 = R^2
 \end{aligned}$$



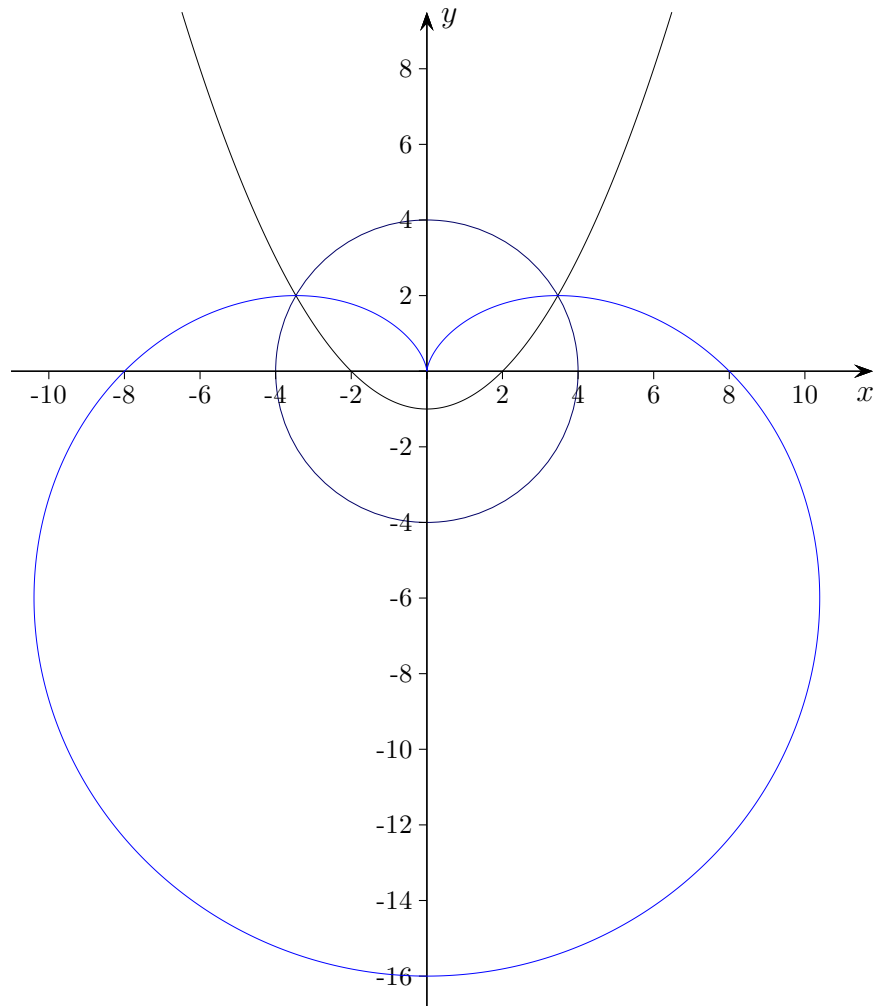
↑ Lemniskate von Bernoulli



Die Lemniskate $a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ ist die am Kreis um den Ursprung, Radius $R = a$, invertierte Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$.

Zum Nachweis wird $(x, y) \rightarrow \frac{R^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in die Hyperbelgleichung eingesetzt.

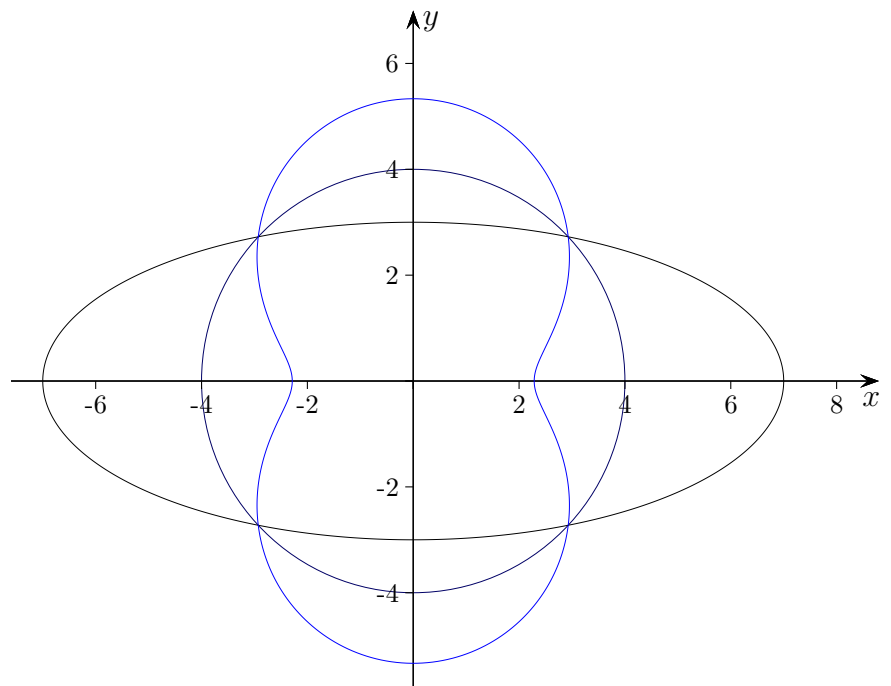
↑ Kardioide



Die Kardioide $4ay(x^2 + y^2) = 4a^2x^2 - (x^2 + y^2)^2$, $a = 4$, ist die am Kreis um den Ursprung, Radius $R = 4$, invertierte Kurve der Parabel $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

Zum Nachweis wird $(x, y) \rightarrow \frac{R^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in die Parabelgleichung eingesetzt.

↑ Inversion einer Ellipse



↑ Möbiustransformation $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$

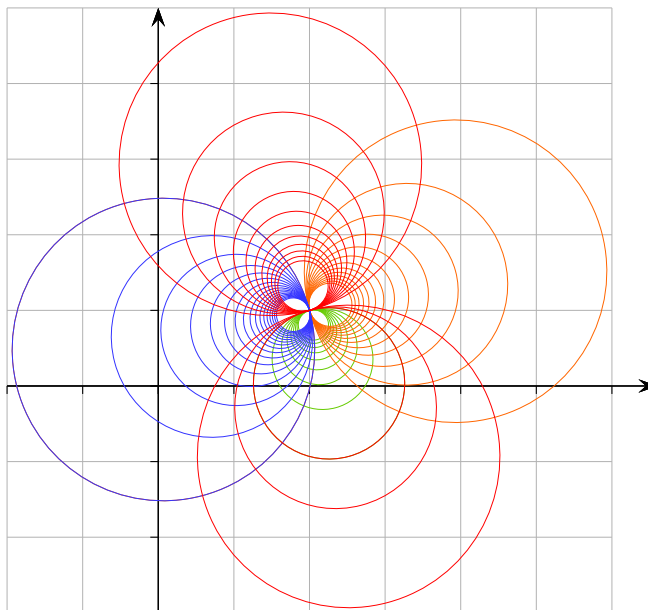


Abbildung eines Quadratgitters
(nur Ausschnitt abgebildet)

Eine Möbiustransformation (Zähler und Nenner mit unterschiedlichen Nullstellen, d.h. $ad \neq bc$) ist die Hintereinanderausführung einer linearen Funktion (Drehstreckung und Verschiebung), einer Reziproktfunktion (Inversion und Spiegelung an der x -Achse) und einer weiteren linearen Funktion:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c} \cdot (cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{-ad+bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$$

$$z \rightarrow w_1 = cz + d \rightarrow w_2 = \frac{1}{w_1} \rightarrow w = \frac{bc-ad}{c} \cdot w_2 + \frac{a}{c}$$

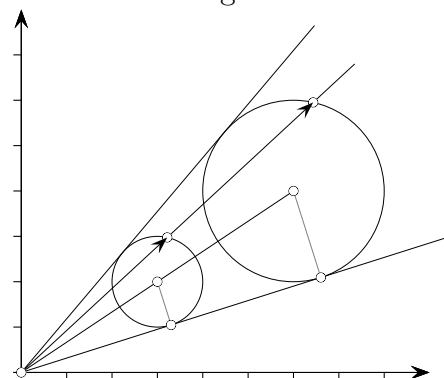
Neben der Translation $z \rightarrow z + d$ ist auch eine Drehstreckung $z \rightarrow cz$ kreistreu, siehe Abbildung Streckung. Daher gilt: Die Möbius-Transformation bildet Kreise und Geraden (verallgemeinerte Kreise) wieder auf Kreise oder Geraden ab.

Zusammengefasst:

$$z \rightarrow \frac{\rho e^{i\theta}}{z+\alpha} + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \rho, \theta \in \mathbb{R}$$

Für eine normierte Darstellung gilt $\Delta = ad - bc = 1$. Das ist mit einer Division jedes Summanden durch $\sqrt{\Delta}$ zu erreichen und ergibt die Vereinfachung $w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)}$.

Die Streckung ist ein Zoomen.



↑ Eigenschaften der Möbiustransformation

Für eine Möbiustransformation $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad \neq bc$, $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gilt:

- a) $T(-\frac{b}{a}) = 0$, $T(-\frac{d}{c}) = \infty$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$ (Division von Zähler und Nenner durch z)
- b) T ist bijektiv, Umkehrabbildung $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{a-cz}$, $M_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$, $M_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$
- c) Die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe, $M_2 \circ M_1(z) = \frac{(a_2a_1+b_2c_1)z + (a_2b_1+b_2d_1)}{(c_2a_1+d_2c_1)z + (c_2b_1+d_2d_1)}$
- d) $T(z)$ hat (außer der Identität) einen oder zwei Fixpunkte.

Der Ansatz $T(z) = z$ führt zu einer quadratischen Gleichung, $z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$.

- e) Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ paarweise verschieden, dann gibt es genau eine Möbiustransformation mit $z_1 \rightarrow w_1$, $z_2 \rightarrow w_2$, $z_3 \rightarrow w_3$.

Hierzu ist die Dreipunkteformel $\frac{\frac{w-w_1}{w-w_2}}{\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}} = \frac{z-z_1}{z-z_2}$ nach w umzustellen.

Wird z_i rechts eingesetzt, so besteht Gleichheit nur für w_i auf der linken Seite.

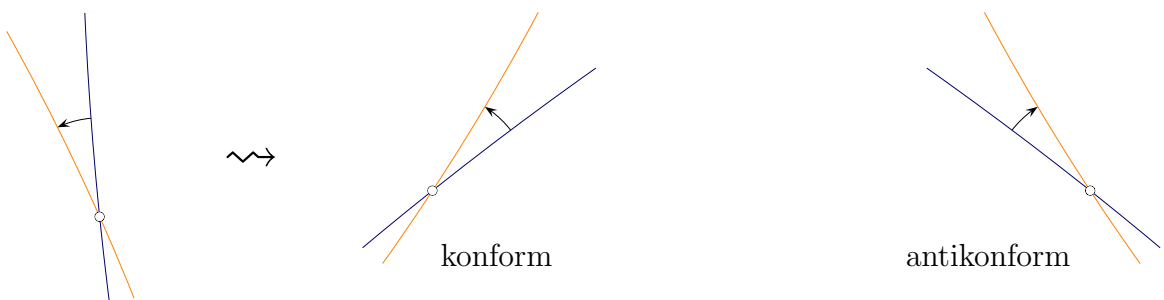
Bildet auch M die Punkte auf die Bildpunkte ab, so hat $M^{-1} \circ T$ drei Fixpunkte $M^{-1} \circ T(z_i) = z_i$ und ist somit die Identität. Hieraus folgt $T = M$.

- f) Wird ein Kreis A auf einen Kreis B abgebildet, so wird entweder das Äußere oder das Innere von A auf das Innere von B abgebildet. Die gegenteilige Situation kann durch Vertauschen der Bildpunkte, (siehe e), hergestellt werden.

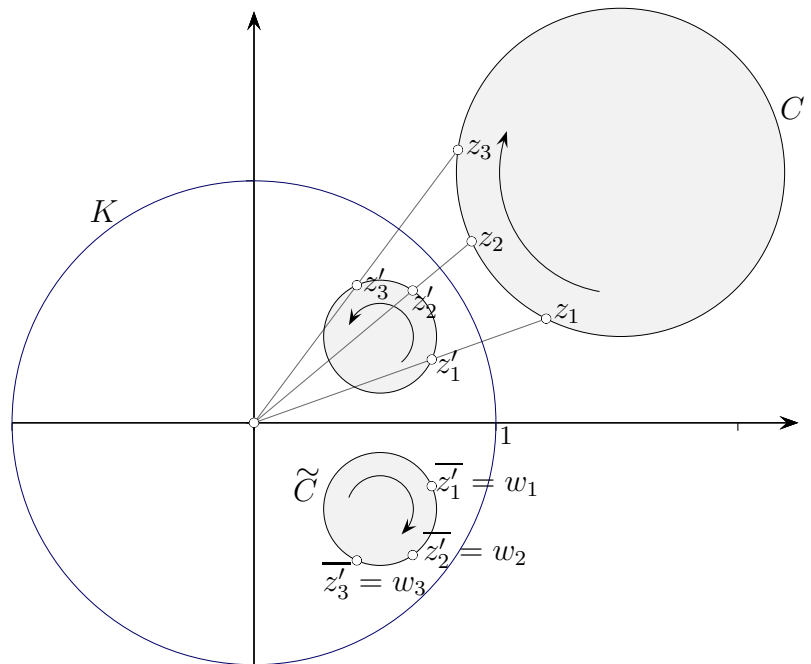
$$g) \quad T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \in \mathbb{C}, z \neq -d/c \\ \infty & z \neq -d/c \\ a/c & z = \infty \text{ und } c \neq 0 \\ \infty & z = \infty \text{ und } c = 0 \end{cases}$$

T ist eine Bijektion $\iff ac - bd \neq 0$

- h) Die Transformation ist konform (Winkel und Orientierung bleiben erhalten).
Die Inversion (Spiegelung am Kreis) ist antikonform, $z \rightarrow 1/z$ ist konform.



↑ Orientierung



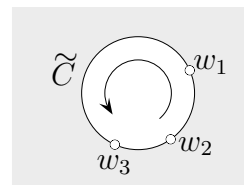
Die Aufeinanderfolge z_1, z_2, z_3 ist hier in Übereinstimmung mit der negativen Orientierung des Randes (im Uhrzeigersinn, Fläche liegt rechts). Das trifft dann auch für die Bilder w_1, w_2, w_3 der Reziprofunktion $w = 1/z$ zu. Die Kreisspiegelung bildet dann das Innere eines Kreises auf das Innere des Bildkreises ab, desgleichen die komplexe Konjugation. Eine Möbiustransformation T (sie kann neben der Reziprofunktion noch Translationen und eine Drehung enthalten) bildet mit $z_1 \rightarrow w_1, z_2 \rightarrow w_2, z_3 \rightarrow w_3$ die Kreisfläche C auf \tilde{C} ab.

Wie kann C auf das Äußere von \tilde{C} (mit Rand) abgebildet werden?

T wird mit der Reziprofunktion $w \rightarrow w' = m + \frac{r^2}{z-m}$, von \tilde{C} (Mittelpunkt m , Radius r) verkettet, die das Innere nach außen kehrt.

alternativ

Man ermittle die Möbiustransformation zu (z.B.) $z_1 \rightarrow w_2, z_2 \rightarrow w_1, z_3 \rightarrow w_3$.



Für die Aufeinanderfolge w_2, w_1, w_3 liegt die Bildfläche rechts.

Die Reziprofunktion $w = 1/z$ bildet das Innere des Einheitskreises E auf das Komplement von E ab. Die Aufeinanderfolge z_1, z_2, z_3 von Punkten auf E geht über in $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ mit geänderter Orientierung in Bezug auf E .

↑ Möbiustransformation ermitteln

1. Gesucht ist die Möbiustransformation mit $T(1) = i$, $T(-1) = 0$, $T(0) = 1$.

$$\frac{\frac{w-w_1}{w-w_2}}{\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}} = \frac{\frac{z-z_1}{z-z_2}}{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}} = \frac{\frac{w-i}{w}}{\frac{1-i}{1}} = \frac{\frac{z-1}{z+1}}{\frac{-1}{1}}, \quad w = T(z) = \frac{i(z+1)}{(2-i)z+i}$$

2. Gesucht ist die Möbiustransformation mit $T(0) = -1$, $T(1) = -i$, $T(\infty) = 1$.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \quad \text{Wir dividieren Zähler und Nenner durch } a. \quad T(z) = \frac{z+b'}{c'z+d'}$$

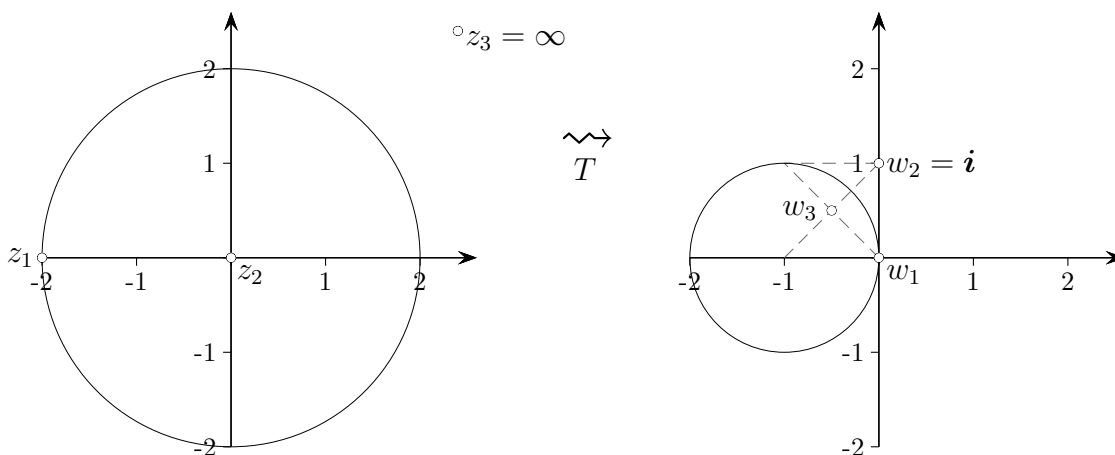
Mit $T(\infty) = 1$ folgt $\frac{1}{c'} = 1$, $c' = 1$.

$$T(0) = -1 \text{ ergibt } b' = -d', \text{ insgesamt erhalten wir } T(z) = \frac{z-d'}{z+d'}$$

$$T(1) = -i \text{ bedeutet } \frac{1-d'}{1+d'} = -i, \quad d' = \frac{1+i}{1-i} = i \quad (\text{erweitern, bin. Formeln}).$$

$$\text{Schließlich erhalten wir: } T(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

3. Gesucht ist die Möbiustransformation $w = T(z)$, die den Kreis $|z| = 2$ auf den Kreis $|w+1| = 1$ abbildet mit $T(-2) = 0$ und $T(0) = i$.



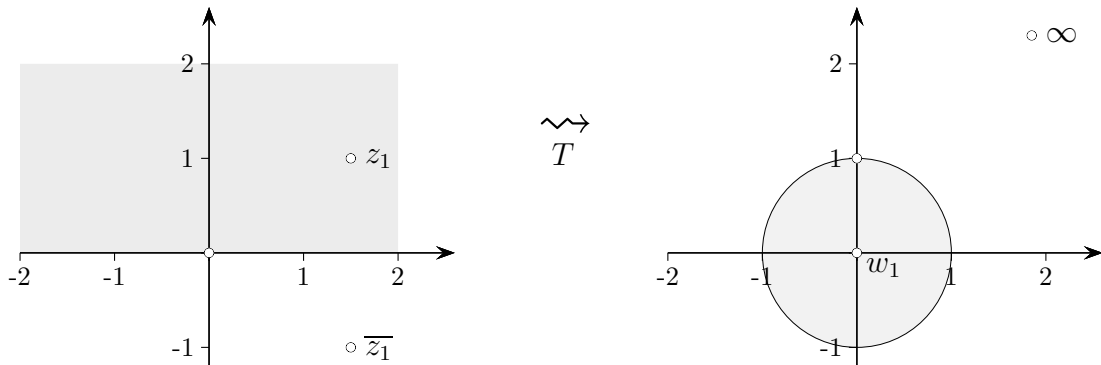
$z_2 = 0$ und $z_3 = \infty$ liegen symmetrisch zu $|z| = 2$. Daher müssen die Bilder $w_2 = i$ und $w_3 = T(\infty)$ symmetrisch zu $|w+1| = 1$ liegen. Aus $(w_2+1)\overline{(w_3+1)} = 1$ folgt $w_3 = \frac{1}{6}(-1+i)$. Eine Möbiustransformation erhält die ↑Symmetrie.

Mit der Dreipunkteformel erhalten wir

$$\frac{\frac{w-w_1}{w-w_2}}{\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}} = \frac{\frac{z-z_1}{z-z_2}}{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}} = \frac{\frac{w-0}{w-i}}{\frac{w_3-0}{w_3-i}} = \frac{\frac{z+2}{z-0}}{\frac{z_3+2}{z_3-0}}, \quad w = T(z) = -\frac{z+2}{(1+i)z+2i}$$

↑ Möbiustransformation ermitteln

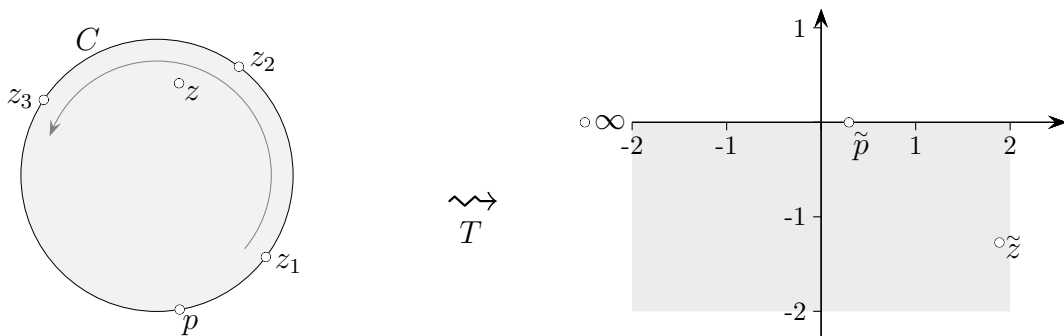
4. Gesucht ist die Möbiustransformation $w = T(z)$, die die obere Halbebene $\text{Im}(z) \geq 0$ auf die Kreisscheibe $|w| \leq 1$ abbildet und einen gegebenen Punkt z_1 mit $\text{Im}(z_1) > 0$ auf $w_1 = 0$.



Wegen der Erhaltung der Symmetrie muss \bar{z}_1 auf ∞ abgebildet werden.

Möglich ist $w = \frac{z-z_1}{z-\bar{z}_1}$ und mit einer Drehung um den Ursprung: $w = c \frac{z-z_1}{z-\bar{z}_1}$, $|c| = 1$

5. Gesucht ist die Möbiustransformation $w = T(z)$, die die Kreisscheibe durch z_1, z_2 und z_3 auf die untere Halbebene $\text{Im}(z) \leq 0$ abbildet.



Für eine Möbiustransformation mit $z_1 \rightarrow w_1 = 0$, $z_2 \rightarrow w_2 = \infty$, $z_3 \rightarrow w_3 = 1$ ergibt die linke Seite der Dreipunkteformel mühelos w .

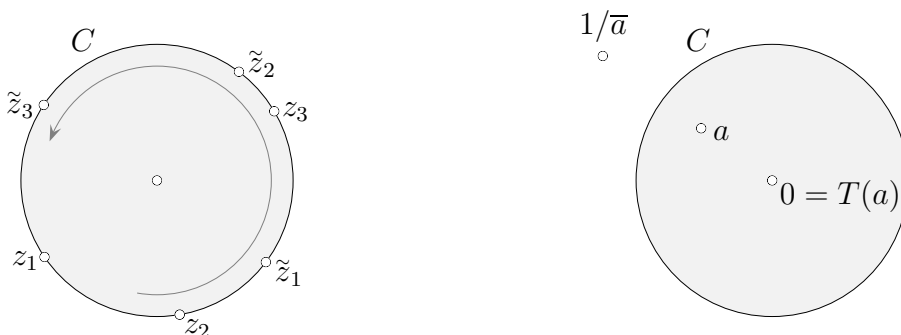
$$\frac{\frac{w-w_1}{w-w_2}}{\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}} = \frac{\frac{z-z_1}{z-z_2}}{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}} = \frac{\frac{w}{1-\infty}}{\frac{1}{1-\infty}} = w, \quad w = T(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

Mit w_1, w_2, w_3 liegt die gleiche Orientierung wie mit z_1, z_2, z_3 vor, die Fläche liegt links.

p liegt genau dann auf dem Kreis C , wenn $\text{Im}T(p) = 0$.

↑ Möbiustransformation ermitteln

6. Gesucht ist die Möbiustransformation $w = T(z)$, die die Einheitskreisscheibe durch z_1, z_2 und z_3 auf sich abbildet.



Eine Möbiustransformation T ist durch die Bilder von z_1, z_2 und z_3 eindeutig festgelegt. Da diese Bilder auf dem Kreis liegen, reichen drei reelle Zahlen für ihre Angabe aus.

Nehmen wir an, a wird auf 0 abgebildet. $1/\bar{a}$ ist in Bezug auf C symmetrisch zu a .

Nach dem Symmetrieprinzip sind $T(a) = 0$ und $T(1/\bar{a})$ symmetrisch in Bezug auf $\tilde{C} = C$.

Mit $T(1/\bar{a}) = \infty$ und im Zusammenhang mit einer Drehung um den Ursprung gelangen wir zu

$$w = T(z) = e^{i\varphi} \frac{z-a}{\bar{a}z-1}, \quad \text{beachte } T \text{ hat 3 Freiheitsgrade.}$$

Dieses Ergebnis kann durch Nachrechnen bestätigt werden.

Sei $|z|^2 = z\bar{z} = 1$.

$\varphi = 0$

$$|T(z)|^2 = T(z)\overline{T(z)} = \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}}{a\bar{z}-1} = \frac{1-z\bar{a}-a\bar{z}+a\bar{a}}{\bar{a}a-\bar{a}z-a\bar{z}+1} = 1$$

Sei $|z| < 1$. (a wird auf 0 abgebildet, somit wird die Kreisscheibe auf sich abgebildet.)

$$0 \leq |T(z)|^2 = T(z)\overline{T(z)} = \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}}{a\bar{z}-1} = \frac{|z|^2 - (z\bar{a} + a\bar{z}) + |a|^2}{|a|^2|z|^2 - (\bar{a}z + a\bar{z}) + 1} = 1 - \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|a|^2|z|^2 - (\bar{a}z + a\bar{z}) + 1} < 1 \quad \text{weil}$$

$$|a| < 1 \quad \text{und} \quad 1 - (\bar{a}z + a\bar{z}) + |a|^2|z|^2 = |1 - \bar{a}z|^2 > 0,$$

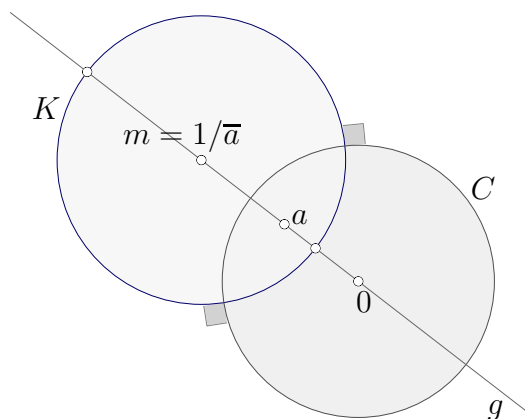
Bruch ist pos.

Zu je zwei inneren Punkten a und b der Einheitskreisscheibe gibt es eine Möbiustransformation T mit $T(a) = b$.

$T = T_b^{-1} \circ T_a$ mit $T_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ und $T_b(z) = \frac{z-b}{\bar{b}z-1}$ bildet a auf b ab.

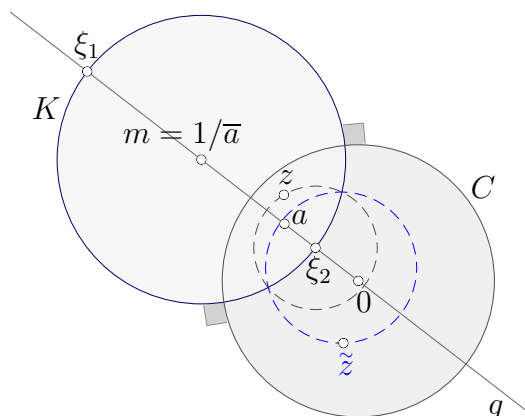
↑ Geometrische Bedeutung von $T_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$

Mit einer Spiegelung an einem orthogonalen Kreis K wird C auf sich abgebildet und für welchen Kreis K zusätzlich a auf 0 ?



a und $1/\bar{a}$ sind bezüglich C symmetrisch und nach dem Symmetrieprinzip sind es auch die Bilder a' und $(1/\bar{a})'$ bezüglich K . Damit $a' = 0$ ist, muss $(1/\bar{a})' = \infty$ sein und das trifft nur für den Mittelpunkt von K zu, somit ist $m = 1/\bar{a}$. Wir erhalten T_a die Spiegelung an K mit der Spiegelung an g verknüpft,

Ersichtlich: $0' = a$ und die Schnittpunkte von g mit K sind die Fixpunkte der Abbildung. Das Bild eines Kreises um einen Fixpunkt enthält den Fixpunkt.

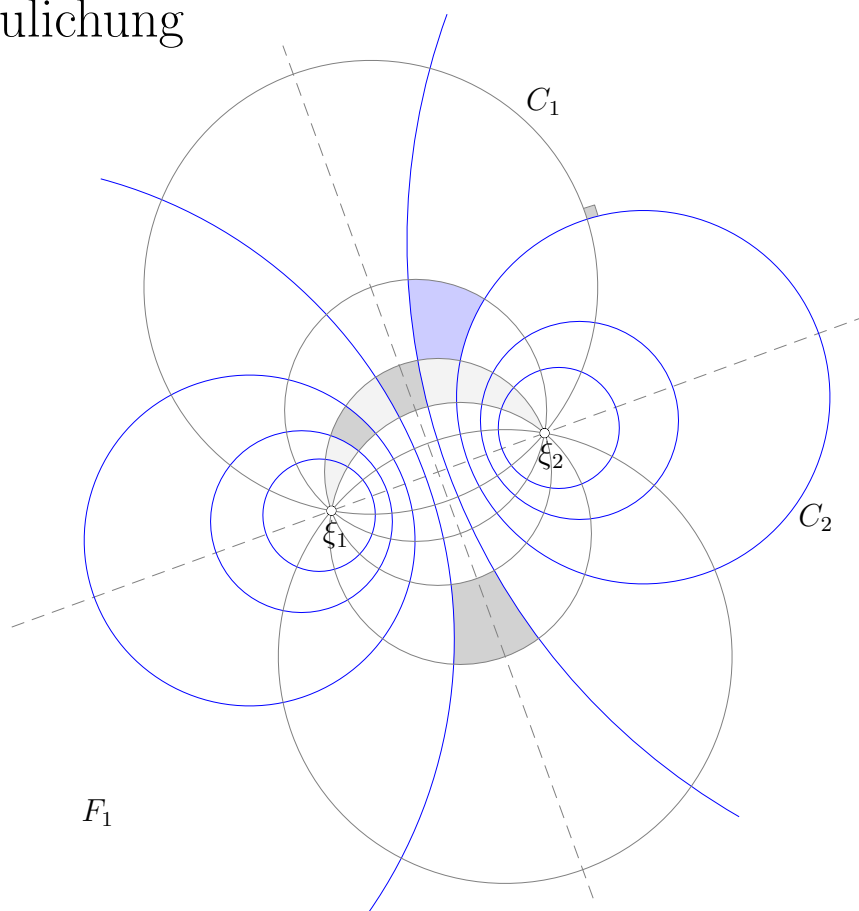


Fixpunkte $\xi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - a\bar{a}}}{\bar{a}}$

Tipp

Mit GeoGebra können für eine komplexe Funktion mühelos Punkt und Bildpunkt dargestellt werden. $z_1 = a + bi$, $T(z)$ und $T(z_1)$ sind einzugeben, $\bar{a} = \text{konjugiere}(a)$. z_1 wird als Punkt variiert.

↑ Veranschaulichung

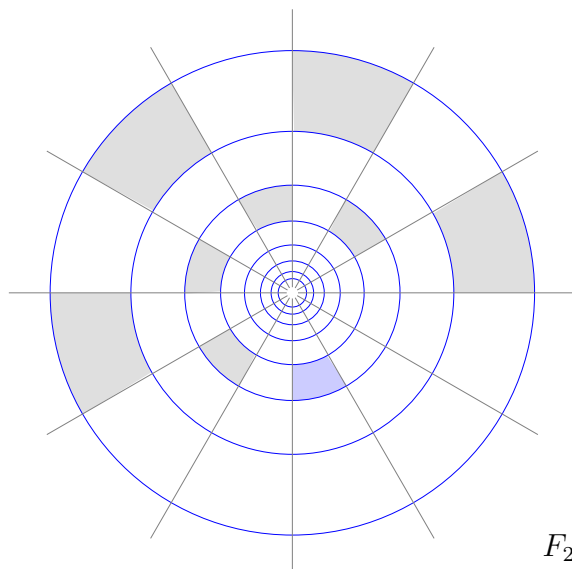


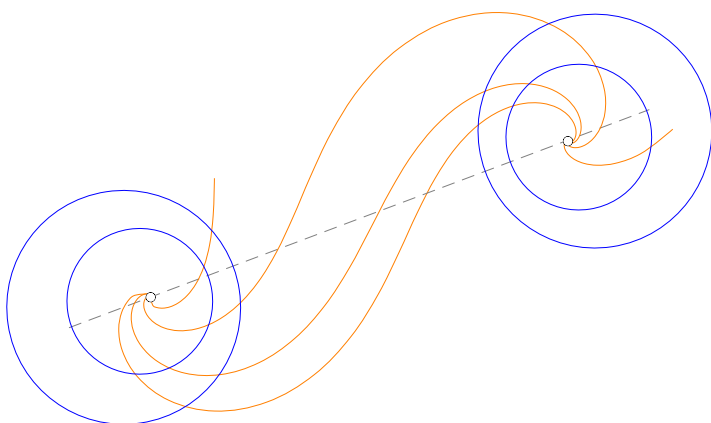
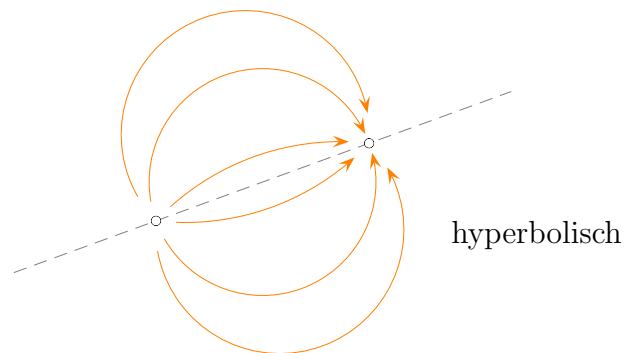
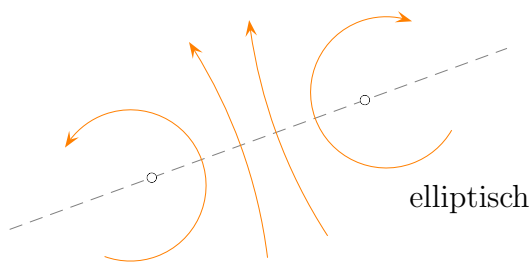
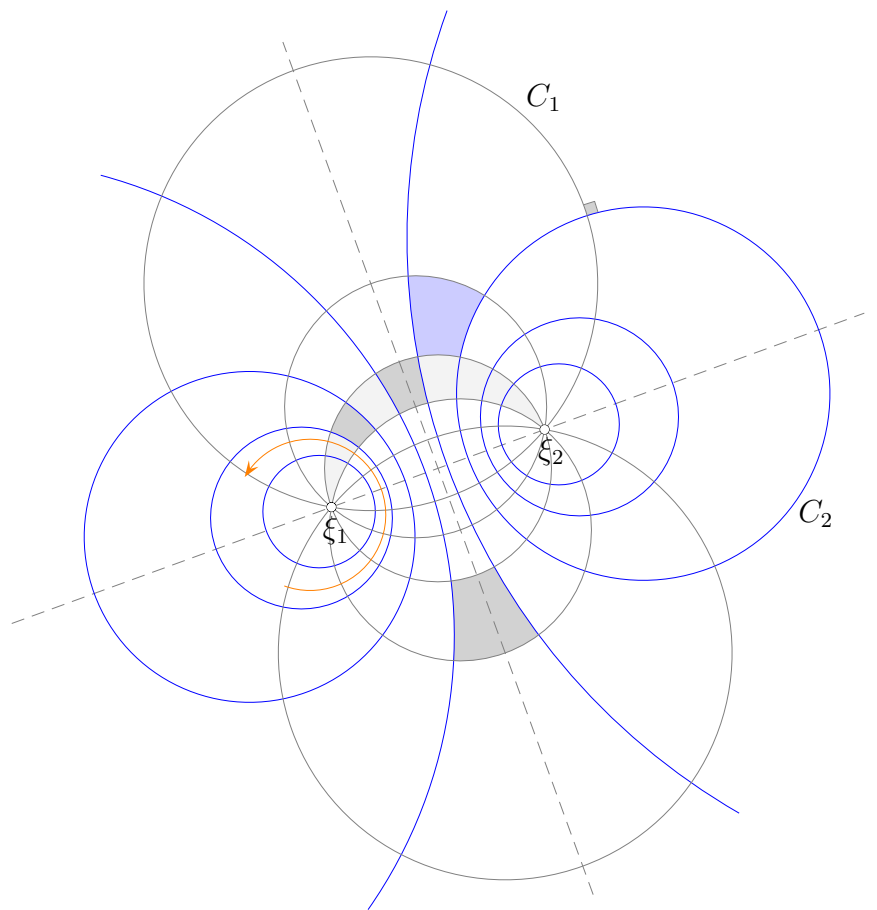
Zur Veranschaulichung einer komplexer Funktion kann das Bild eines Gitters erzeugt werden. Hier betrachten wir zu den beiden Fixpunkten ξ_1, ξ_2 einer Möbiustransformation T die Schar C_1 der Kreise durch die beiden Punkte und die Schar C_2 der dazu orthogonalen Kreise, die jeweils einen Fixpunkt enthalten. T bildet sowohl die Schar C_1 als auch C_2 auf sich ab. Für die Abbildung wurde eine Auswahl getroffen, so dass T die Figur F_1 auf sich abbildet. Um zu erkennen, dass es für eine Möbiustransformation grundsätzlich nur wenige Möglichkeiten gibt, die von den Kreisen begrenzten Flächen zu transformieren, wenden wir auf F_1 die Möbiustransformation $F(z) = \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}$ an, die ξ_1 nach 0 und ξ_2 nach ∞ überführt, und erhalten die Figur F_2 , in der sich das Transformationsverhalten von T widerspiegelt. In F_2 wird es durch die einfache Form von T^* sichtbar. T entspricht auf F_2 der Möbiustransformation $T^* = F \circ T \circ F^{-1}$.

$$T^*(z) = \frac{az+b}{cz+d} = mz, \quad m \in \mathbb{C}$$

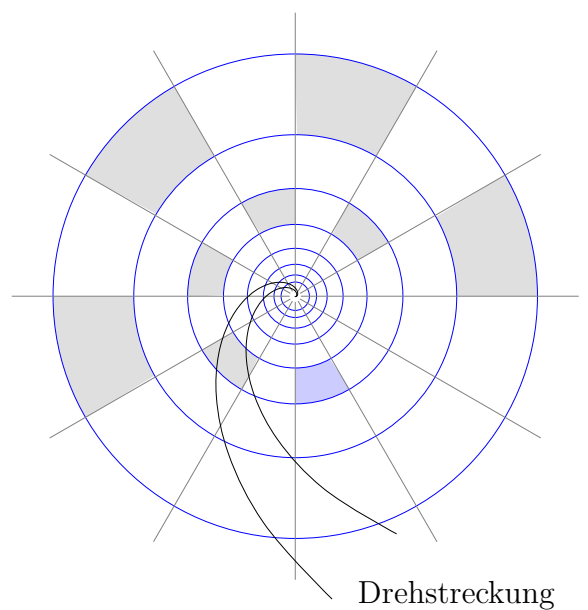
beachte: 0 ist Fixpunkt, daher $b = 0$,
 ∞ ist Fixpunkt, daher $c = 0$.

T^* ist somit eine Drehung (T elliptisch),
 eine Streckung (T hyperbolisch)
 oder eine Drehstreckung (T loxodromisch).





loxodromisch, gr. *loxos schief*, *dromos Lauf*
 Ein Fixpunkt ist anziehend,
 der andere abstoßend.



↑ Berechnung des Multiplikators m

m verändert sich nach $1/m$, wenn ξ_1 nach ∞ und ξ_2 nach 0 überführt werden.

$$\begin{aligned} T^* &= F \circ T \circ F^{-1} \\ T^* \circ F &= F \circ T \\ m \cdot \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} &= \frac{T(z) - \xi_1}{T(z) - \xi_2} * \quad | F(z) = \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} \\ \frac{1}{m} \cdot \frac{z - \xi_2}{z - \xi_1} &= \frac{T(z) - \xi_2}{T(z) - \xi_1} \quad \square \end{aligned}$$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a+b/z}{c+d/z}, \quad T(\infty) = a/c$$

$$z = \infty \text{ in } * \text{ eingesetzt, ergibt } m = \frac{a - c\xi_1}{a - c\xi_2}.$$

m ist Lösung der Gleichung $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = a + d$, T wird als normiert vorausgesetzt, $\det[T] = 1$.

Zum Nachweis werden Matrizen verwendet, $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} [T^*] &= [F][T][F]^{-1} \\ \det[T^*] &= \det[F]\det[T]\det[F]^{-1} = \det[T] \quad \text{Mit } T \text{ ist } T^* \text{ normiert.} \end{aligned}$$

$$T^*(z) = mz$$

$$[T^*] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

$$\text{Spur}[T^*] = \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = \text{Spur}([F][T][F]^{-1}) = \text{Spur}([F][F]^{-1}[T]) = a + d \quad \square$$

Für die Gleichung $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = a + d$ gilt $\sqrt{m_{1,2}} = \frac{1}{2}[(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}]$.

Zu beachten ist, dass mit m_1 auch $m_2 = 1/m_1$ eine Lösung ist, $m_1 m_2 = 1$.

Eine normierte Möbiustransformation ist:

elliptisch	falls $a + d \in \mathbb{R}$ und $ a + d < 2$	$ m ^2 = m\bar{m} = 1$, beachte $\bar{m} = 1/m$
hyperbolisch	$a + d \in \mathbb{R}$ und $ a + d > 2$	$m \in \mathbb{R}$
loxodromisch	$a + d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	$ m ^2 = m\bar{m} \neq 1$, beachte $\bar{m} \neq 1/m$
parabolisch	$a + d = \pm 2$	1 Fixpunkt, $\xi_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$

↑ Alternatives Vorgehen

$$m = \frac{a - c\xi_1}{a - c\xi_2}$$

$$\xi_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

⇒

$$m = \frac{a - \frac{1}{2}[(a-d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}]}{a - \frac{1}{2}[(a-d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}]}$$

$$= \frac{(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}$$

| mit $(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}$ erweitern,
Nenner vereinfachen und die Wurzel ziehen

$$\sqrt{m} = \frac{1}{2} [(a+d) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}]$$

Für die Gleichung $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = a+d$ gilt $\sqrt{m_{1,2}} = \frac{1}{2} [(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}]$.

$$x + \frac{1}{x} = u \text{ besitzt die Lösung } x_{1,2} = \frac{1}{2} [u \pm \sqrt{u^2 - 4}].$$

Zu beachten ist, dass mit m_1 auch $m_2 = 1/m_1$ eine Lösung ist, $m_1 m_2 = 1$.

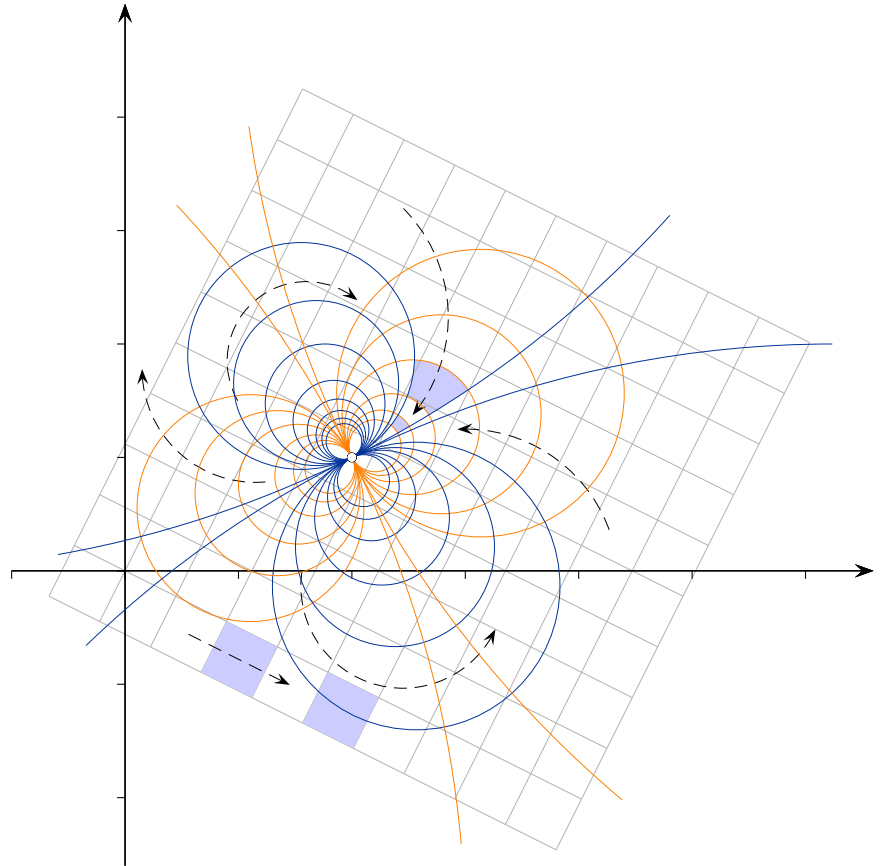
Eine normierte Möbiustransformation ist:

elliptisch	falls $a+d \in \mathbb{R}$ und $ a+d < 2$	$ m ^2 = m\bar{m} = 1$, beachte $\bar{m} = 1/m$
hyperbolisch	$a+d \in \mathbb{R}$ und $ a+d > 2$	$m \in \mathbb{R}$
loxodromisch	$a+d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	$ m ^2 = m\bar{m} \neq 1$, beachte $\bar{m} \neq 1/m$
parabolisch	$a+d = \pm 2$	1 Fixpunkt, $\xi_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$

Der Multiplikator m beschreibt die lokale Wirkung von T in einer infinitesimalen Umgebung (je kleiner umso genauer) eines Fixpunktes. Bei einer elliptischen Transformation ist es mit $m = e^{i\varphi}$ eine Drehung um den einen Fixpunkt mit dem Winkel φ und mit $1/m = e^{-i\varphi}$ eine entgegengesetzte Drehung um den anderen Fixpunkt mit dem Winkel $-\varphi$, $\sqrt{m} = e^{i\varphi/2}$.

Bei einer hyperbolischen Transformation ist es mit $m > 1$ eine Streckung mit dem einen Fixpunkt als Zentrum und mit $1/m < 1$ eine Stauchung (Kontraktion) mit dem anderen Fixpunkt als Zentrum. Eine loxodromische Transformation ist die Verkettung einer elliptischen und einer hyperbolischen Transformation.

↑ Parabolische Transformation

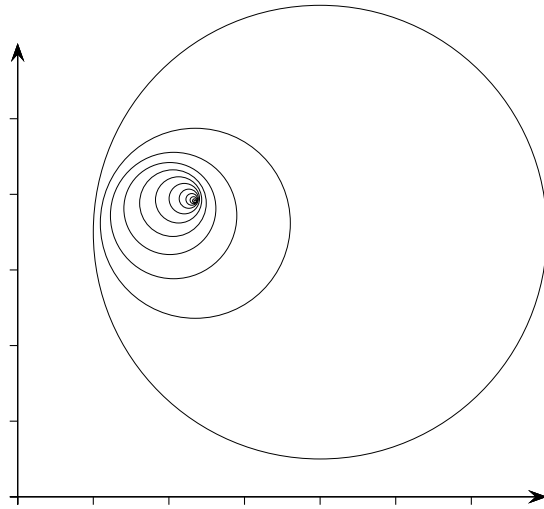


Eine parabolische Möbiustransformation T hat nur einen Fixpunkt ξ . Die durch ξ verlaufenden Kreise (benachbarte sind orthogonal) werden mit $F(z) = \frac{1}{z-\xi}$ (ξ wird nach ∞ überführt) auf ein orthogonales Gitter paralleler Geraden abgebildet. F induziert auf dem Gitter die Abbildung $T^* = F \circ T \circ F^{-1}$. Da ∞ der einzige Fixpunkt von T^* ist, kann es sich nur um eine Translation $T^* = z + t$ handeln. Für t gilt:

$$\begin{aligned} T^* &= F \circ T \circ F^{-1} \\ T^* \circ F &= F \circ T \\ \frac{1}{z-\xi} + t &= \frac{1}{T(z)-\xi} \end{aligned}$$

Ist $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ normiert und parabolisch, so lautet mit $a+d = \pm 2$ der Fixpunkt $\xi = \frac{a-d}{2c}$. Mit $T(\infty) = a/c$ folgt $t = \frac{1}{a/c-\xi} = \pm c$ mit dem beliebig gewählten Vorzeichen von $(a+b)$.

↑ Möbiustransformation iteriert

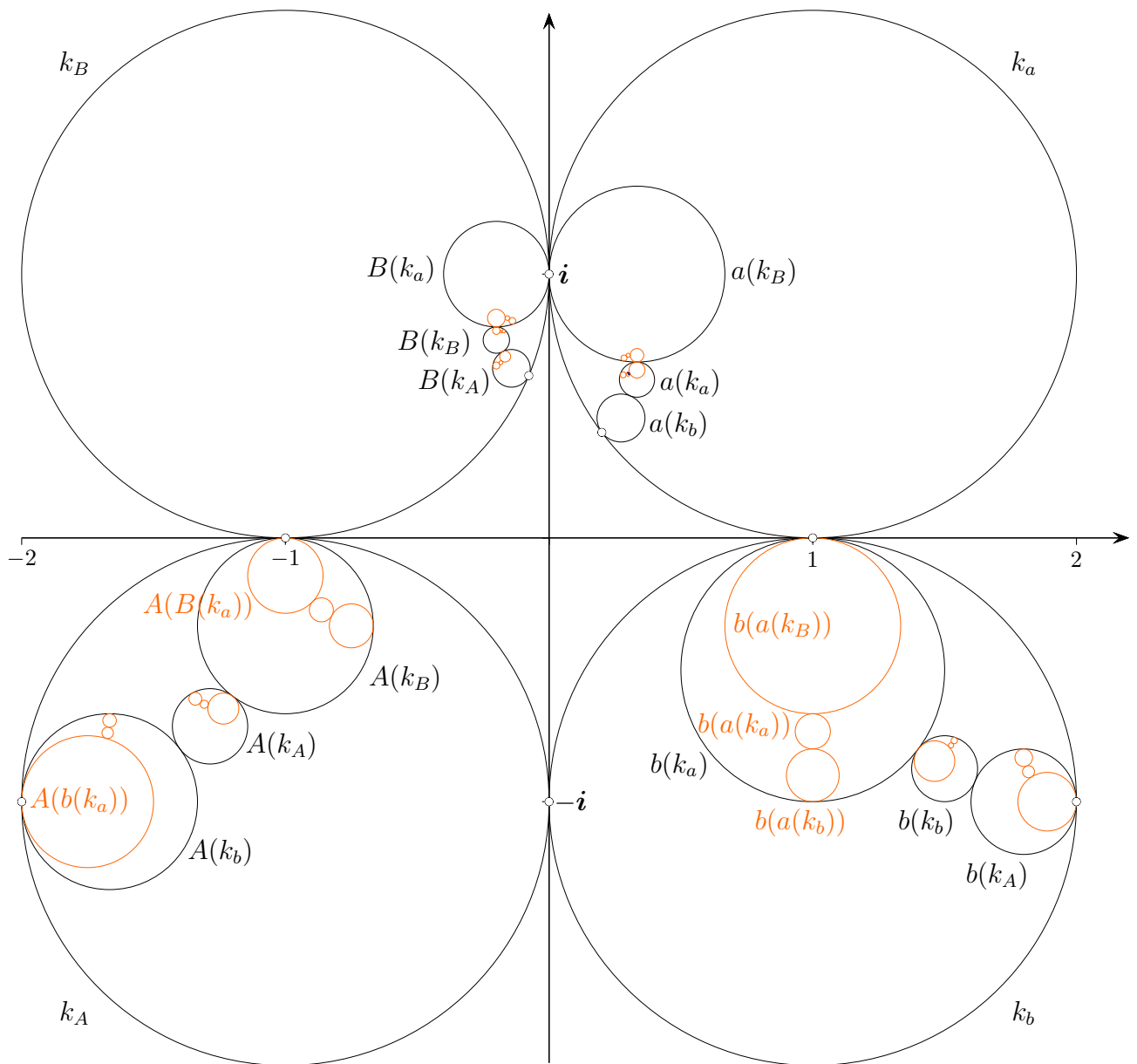


Beispiel für $f(f(\dots f(z)\dots))$

(Da ein Kreis auf einen Kreis abgebildet wird, reichen jeweils drei Bildpunkte, mit denen der Bildkreis erstellt wird.)

Die Kreise ziehen sich hier auf einen Fixpunkt zusammen.

↑ a, a^{-1}, b, b^{-1} iteriert



$a: k_A \rightarrow k_a$ Das Äußere von k_A wird auf das Innere von k_a abgebildet, $a(k_a), a(k_b), a(k_B) \subset k_a$, die Umkehrfunktion A bildet dann das Äußere von k_a auf das Innere von k_A ab.

$$-2 - i \rightarrow 1, \quad -1 \rightarrow i, \quad -i \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i, \quad a(z) = \frac{2i + iz + z}{3 + i + 2z}, \quad a^{-1}(z) = A(z) = \frac{iz - 2i + 3z}{1 + i - 2z}$$

$b: k_B \rightarrow k_b$ Das Äußere von k_B wird auf das Innere von k_b abgebildet, $b(k_a), b(k_b), b(k_A) \subset k_b$, die Umkehrfunktion B bildet dann das Äußere von k_b auf das Innere von k_B ab.

$$-1 \rightarrow 2 - i, \quad -\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i \rightarrow -i, \quad i \rightarrow 1, \quad b(z) = \frac{2iz + 1 + 4i - 5z}{-1 + 2i - 3z},$$

$$b^{-1}(z) = B(z) = \frac{-1 - 4i + 2iz - z}{-5 + 2i + 3z}$$

Die zweite Iterationstufe (orange) ist nicht ganz vollständig abgebildet.

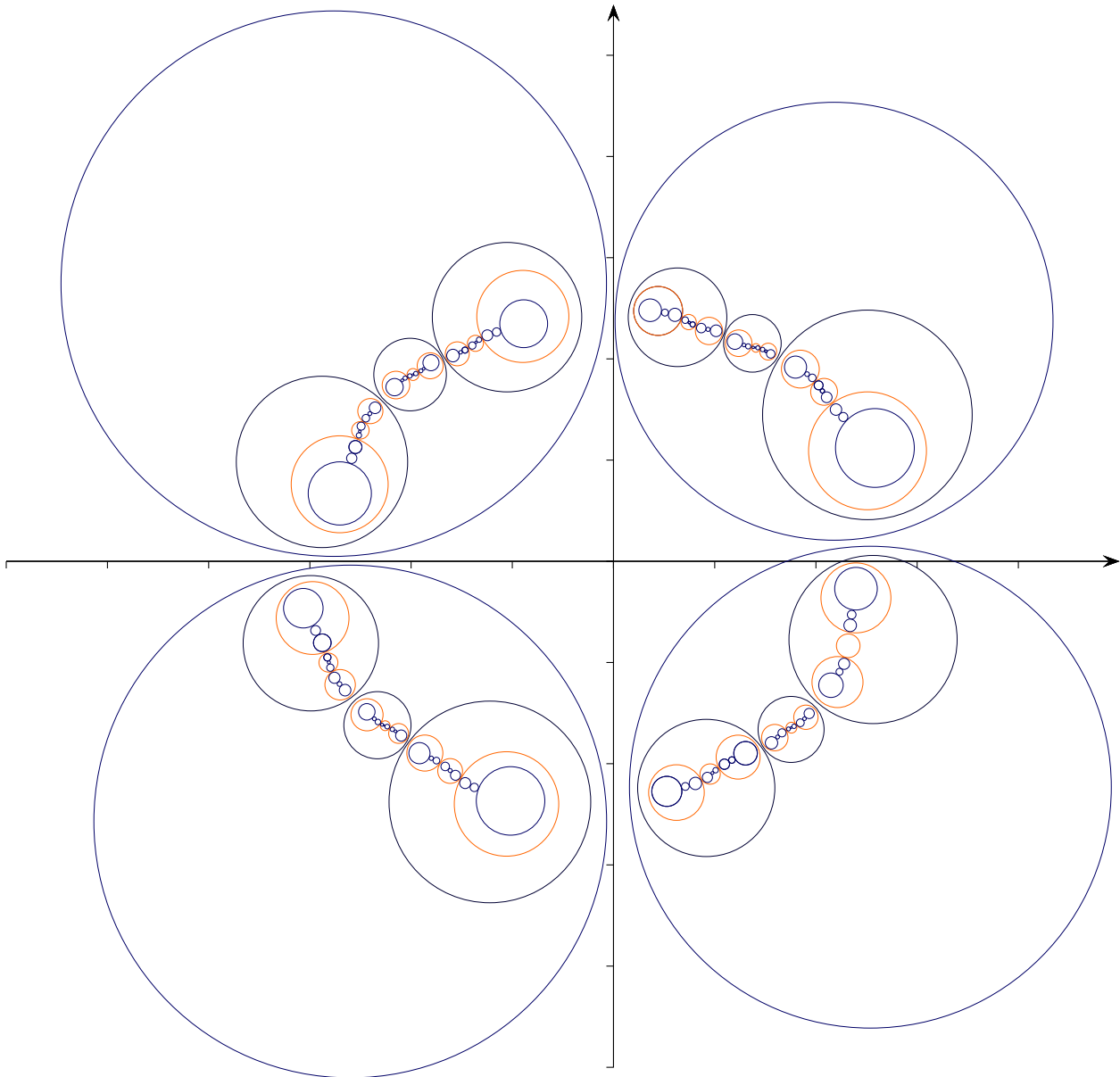
Drei Kreise (wo?) sind aus der dritten Stufe.

↑ a, a^{-1}, b, b^{-1} iteriert

0. Stufe	k_a	k_b	k_A	k_B		
1. Stufe	$a(k_a)$	$a(k_b)$	–	$a(k_B)$	$\subset k_a$	
	$b(k_a)$	$b(k_b)$	$b(k_A)$	–	$\subset k_b$	
	–	$A(k_b)$	$A(k_A)$	$A(k_B)$	$\subset k_A$	
	$B(k_a)$	–	$B(k_A)$	$B(k_B)$	$\subset k_B$	beachte: $A(a) = B(b) = \text{id}$
2. Stufe	$aa(k_a)$	$aa(k_b)$	–	$aa(k_B)$	$\subset a(k_a)$	$\subset k_a$ Klammern unterdrückt
	$ba(k_a)$	$ba(k_b)$	–	$ba(k_B)$	$\subset b(k_b)$	$\subset k_b$
	$Ba(k_a)$	$Ba(k_b)$	–	$Ba(k_B)$	$\subset B(k_B)$	$\subset k_B$
	$ab(k_a)$	$ab(k_b)$	$ab(k_B)$	–	$\subset a(k_a)$	$\subset k_a$
	$bb(k_a)$	$bb(k_b)$	$bb(k_B)$	–	$\subset b(k_a)$	$\subset k_b$
	$Ab(k_a)$	$Ab(k_b)$	$Ab(k_B)$	–	$\subset A(k_a)$	$\subset k_A$
	–	$bA(k_b)$	$bA(k_A)$	$bA(k_B)$	$\subset b(k_A)$	$\subset k_b$
	–	$AA(k_b)$	$AA(k_A)$	$AA(k_B)$	$\subset A(k_A)$	$\subset k_A$
	–	$BA(k_b)$	$BA(k_A)$	$BA(k_B)$	$\subset B(k_A)$	$\subset k_B$
	$aB(k_a)$	–	$aB(k_A)$	$aB(k_B)$	$\subset a(k_B)$	$\subset k_a$
	$AB(k_a)$	–	$AB(k_A)$	$AB(k_B)$	$\subset A(k_B)$	$\subset k_A$
	$BB(k_a)$	–	$BB(k_A)$	$BB(k_B)$	$\subset B(k_B)$	$\subset k_B$
3. Stufe	$aaa(k_a)$	$aaa(k_b)$	–	$aaa(k_B)$	$\subset aa(k_a)$	$\subset a(k_a)$
	$baa(k_a)$	$baa(k_b)$	–	$baa(k_B)$	$\subset ba(k_a)$	$\subset b(k_a)$
	$Baa(k_a)$	$Baa(k_b)$	–	$Baa(k_B)$	$\subset Ba(k_a)$	$\subset B(k_a)$
	$aba(k_a)$	$aba(k_b)$	–	$aba(k_B)$	$\subset ab(k_b)$	$\subset a(k_b)$
	$bba(k_a)$	$bba(k_b)$	–	$bba(k_B)$	$\subset bb(k_b)$	$\subset b(k_b)$
	$Aba(k_a)$	$Aba(k_b)$	–	$Aba(k_B)$	$\subset Ab(k_b)$	$\subset A(k_b)$
	...					

Die Anzahl der Kreise verdreifacht sich von Stufe zu Stufe.

↑ Schottky-Gruppe



Die Schottky-Gruppe (Menge aller Nacheinanderausführungen) wird von $\{a, b, A \text{ und } B\}$ erzeugt. Die dritte Iterationstufe ist nicht ganz vollständig abgebildet.

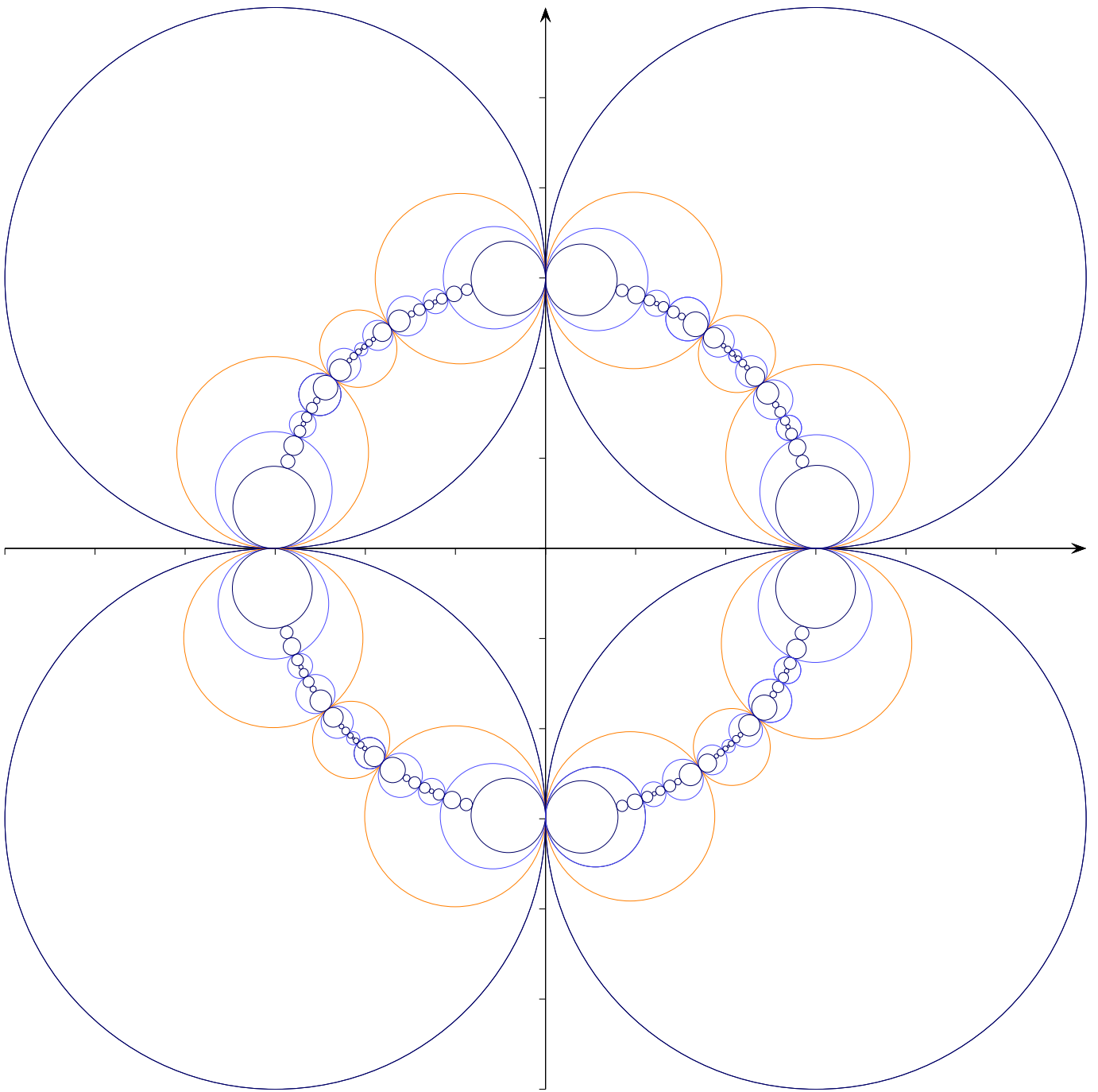
Für die Abbildung habe ich GeoGebra verwendet.

$$a(z) = \frac{((z_1 - z_3)(z - z_2)w_3 - (z_1 - z_2)(z - z_3)w_2)w_1 - w_2w_3(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_3)(z - z_1)w_1 - (z_1 - z_3)(z - z_2)w_2 + (z_1 - z_2)(z - z_3)w_3}$$

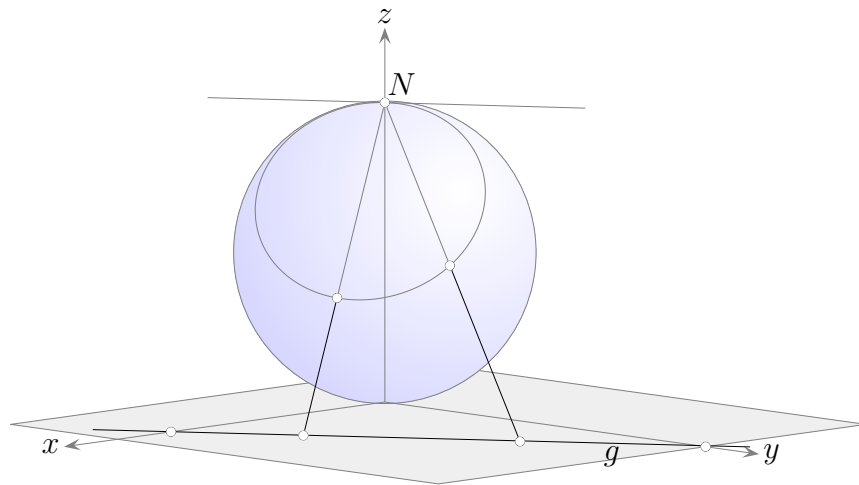
Für $a(z)$ gilt $z_1 \rightarrow w_1, z_2 \rightarrow w_2, z_3 \rightarrow w_3$.

$$a^{-1}(z) = \frac{(z_3(z_1 - z_2)w_2 - z_2(z_1 - z_3)w_3 + zz_1(z_2 - z_3))w_1 + (z_1(z_2 - z_3)w_3 - zz_2(z_1 - z_3))w_2 + zz_3(z_1 - z_2)w_3}{((z_1 - z_2)w_2 + (z_3 - z_1)w_3 + z(z_2 - z_3))w_1 + ((z_2 - z_3)w_3 - z(z_1 - z_3))w_2 + z(z_1 - z_2)w_3}$$

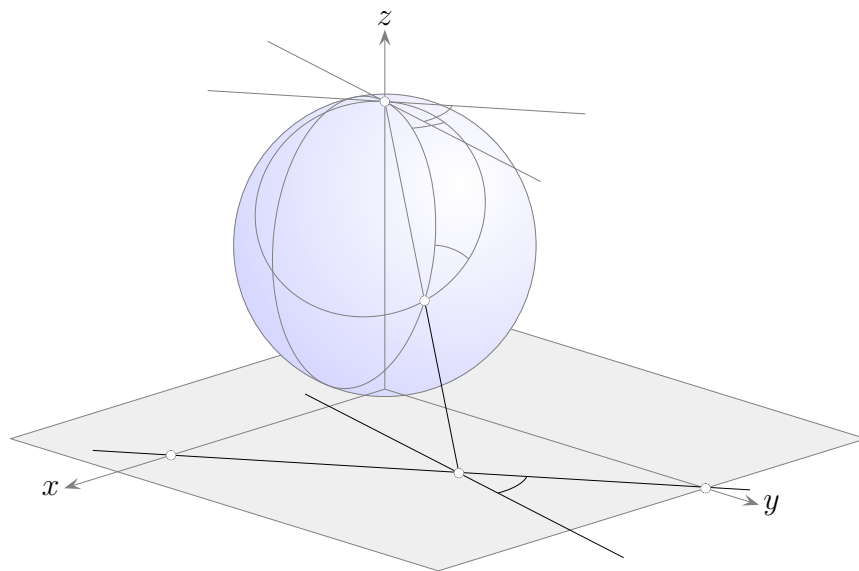
↑ Indras Perlen



↑ Stereographische Projektion

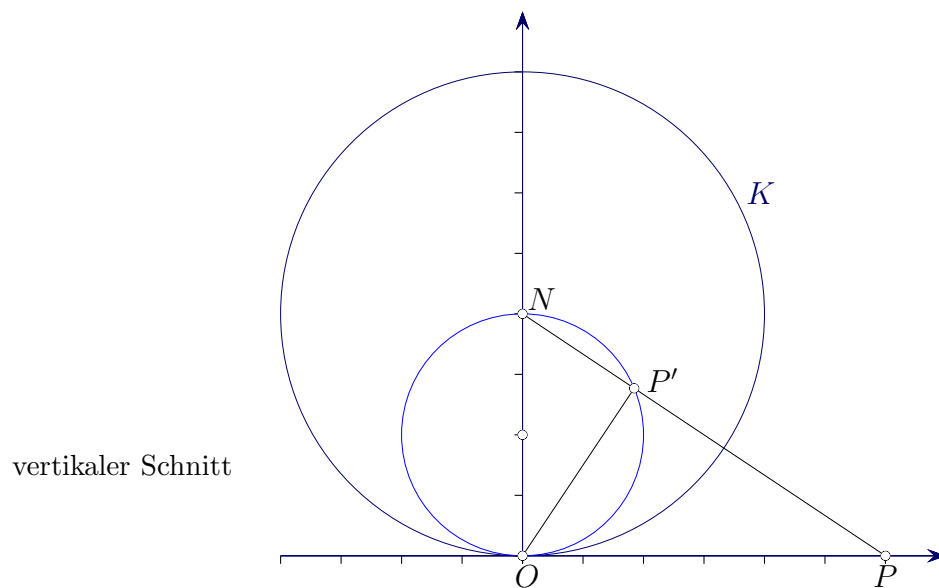


Die Ebene, in der die Gerade g und der Punkt N liegen, schneidet die Kugel in einem Kreis. Somit gilt: Das stereographische Bild einer Geraden ist ein Kreis auf der Kugel und umgekehrt. Die Tangente an diesen Kreis in N ist parallel zur ursprünglichen Geraden. Hieraus folgt, dass die stereographische Projektion Winkel erhält.



Die Schnittwinkel der beiden Kreise sind aus Symmetriegründen gleich.

↑ Stereographische Projektion als Inversion



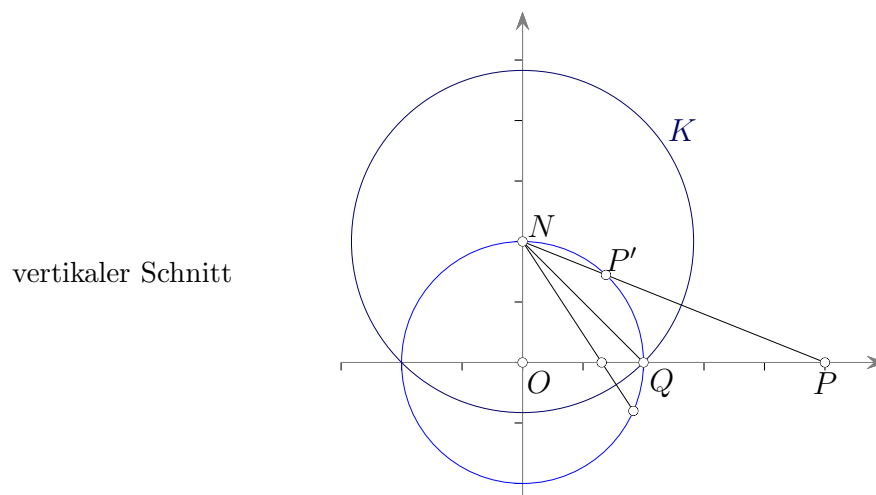
Für die stereographische Projektion $P \leftrightarrow P'$ gilt:

$$\overline{NP} \cdot \overline{NP'} = \overline{ON}^2 (= R^2) \quad \text{Satz des Euklid}$$

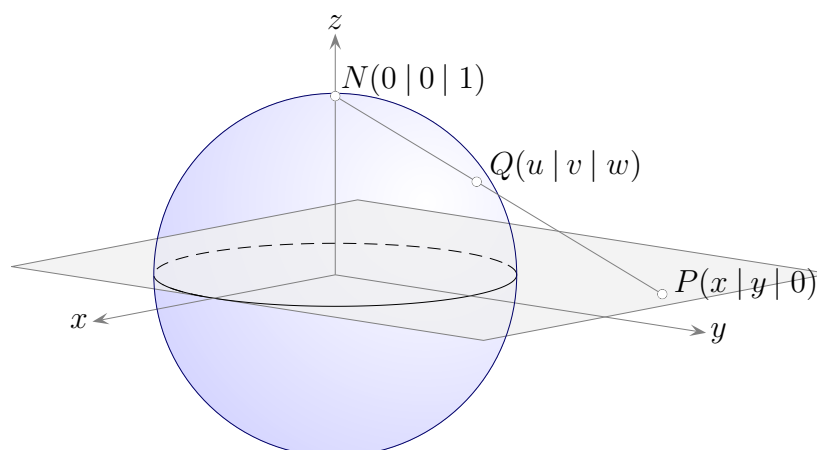
Diese Zentralprojektion bewirkt also das Gleiche wie eine Inversion an der Kugel K mit dem Mittelpunkt N und dem Radius \overline{ON} . Zur Kontrolle: Für die Inversion ist O ein Fixpunkt und der Bildkreis verläuft durch N .

Kreise auf der Kugelfläche werden somit auf Kreise in der Bildebene projiziert.

Für die Variante der stereographischen Projektion, bei der die Projektionsebene durch den Mittelpunkt der Projektionskugel verläuft, hat die Inversionskugel K den Radius \overline{NQ} , da die Gerade OP in einen Kreis mit dem Mittelpunkt N übergeht und Q Fixpunkt ist.



↑ Stereographischer Zusammenhang



Für die stereographische Projektion $P \leftrightarrow Q$ ist die Frage zu beantworten:

Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius $r = 1$.

In welchem Punkt außer N schneidet die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix}$ die Kugel $|\vec{x}| = r$?

$|\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\vec{x}^2}$. Durch Quadrieren erhalten wir die Kugelgleichung: $\vec{x}^2 = r^2$

$$\text{Schnittbedingung: } \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 1$$

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1$$

$$(x^2 + y^2 + 1)\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{führt zu } N.$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} \quad \text{führt zu}$$

$$Q\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \mid \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \mid \underbrace{1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}}_{\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}}\right).$$

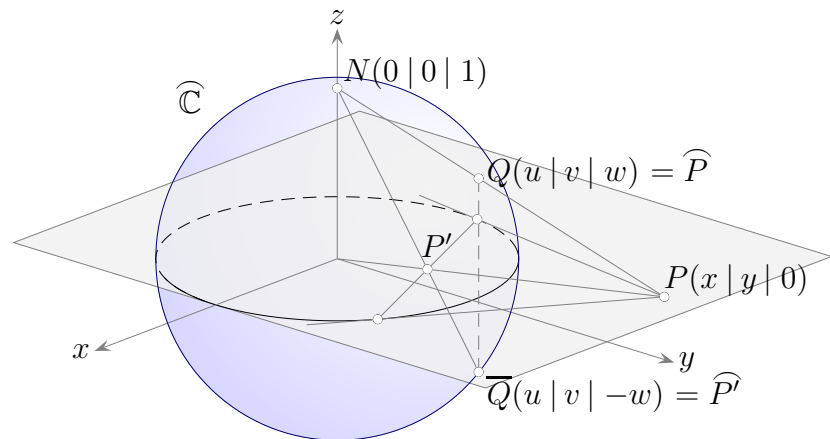
Weiter gilt: $P\left(\frac{u}{1-w} \mid \frac{v}{1-w} \mid 0\right)$

Hierzu ist lediglich der Schnitt der Geraden durch N und Q $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ w-1 \end{pmatrix}$ mit der xy -Ebene zu betrachten.

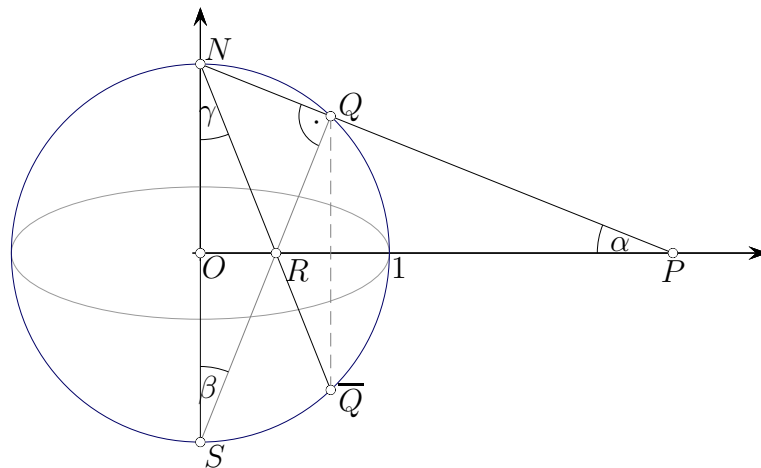
Werden die Punkte $C(x|y|0)$ in der xy -Ebene mit $z = x + yi \in \mathbb{C}$ identifiziert, erhalten wir:

$$Q(u|v|w) = Q\left(\frac{2\text{Re}(z)}{|z|^2+1} \mid \frac{2\text{Im}(z)}{|z|^2+1} \mid \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = Q\left(\frac{2z}{|z|^2+1} \mid \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), \quad |z|^2 = \frac{1+w}{1-w}$$

↑ Stereographische Projektion und Inversion



Ist $z \rightarrow w = f(z)$ eine Abbildung in \mathbb{C} , so wird mit der stereographischen Projektion $z \rightarrow \hat{z}$ durch $\hat{z} \rightarrow \hat{w}$ eine Abbildung der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ auf sich definiert. Aufgrund der Grafik ist zu vermuten: Der Inversion am Einheitskreis in \mathbb{C} entspricht bei der stereographischen Projektion einer Spiegelung der Riemannschen Zahlenkugel an der xy -Ebene.



Zur Begründung ist zu zeigen, dass der Punkt R der Inversionspunkt von P ist, d.h. es muss gelten: $\overline{OP} \cdot \overline{OR} = 1$. Die Dreiecke $\triangle PNO$ und $\triangle SNQ$ sind ähnlich ($\alpha = \beta$, Schenkel stehen senkrecht aufeinander), sowie $\triangle SNQ \sim \triangle NRO$ (gleiche Winkel). Aus $\triangle PNO \sim \triangle NRO$ folgt $\overline{OP}/1 = 1/\overline{OR}$.

alternativ:

Die Gerade durch die Punkte P' und N (die Inversion lautet $(x, y) \rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) wird mit der Kugel geschnitten.

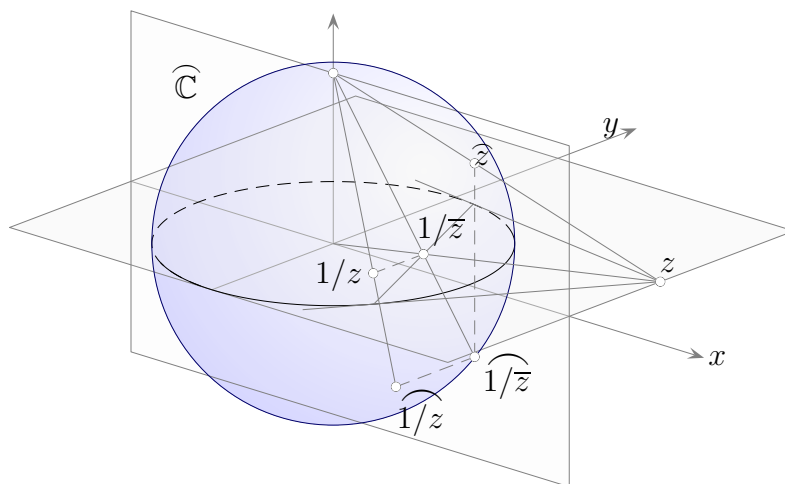
$$\text{Schnittbedingung: } \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x/(x^2+y^2) \\ y/(x^2+y^2) \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2+1} \quad \text{führt zu } \bar{Q}.$$

alternativ:

P und P' sind hinsichtlich der Spiegelung am Einheitskreis und dann auch an der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ symmetrisch. Die Überlegung zur \uparrow **Erhaltung der Symmetrie** kann auf den Raum übertragen werden. Die Bilder von P und P' bei der Spiegelung an der Kugel K (siehe \uparrow **Stereographische Projektion als Inversion**) sind dann symmetrisch bezüglich des Bildes von $\widehat{\mathbb{C}}$ und das ist die Ebene \mathbb{C} . Die Spiegelung von \widehat{P} an \mathbb{C} ergibt \widehat{P}' .

\uparrow Übertragung von $z \rightarrow 1/z$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$

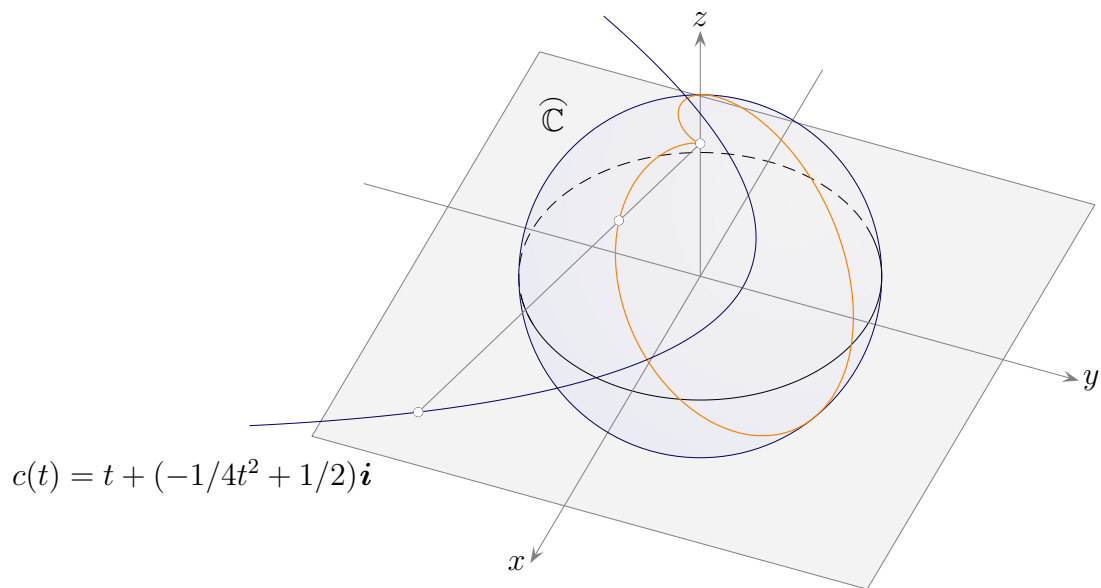


$z \rightarrow 1/\bar{z}$ induziert eine Spiegelung der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ an der xy -Ebene.

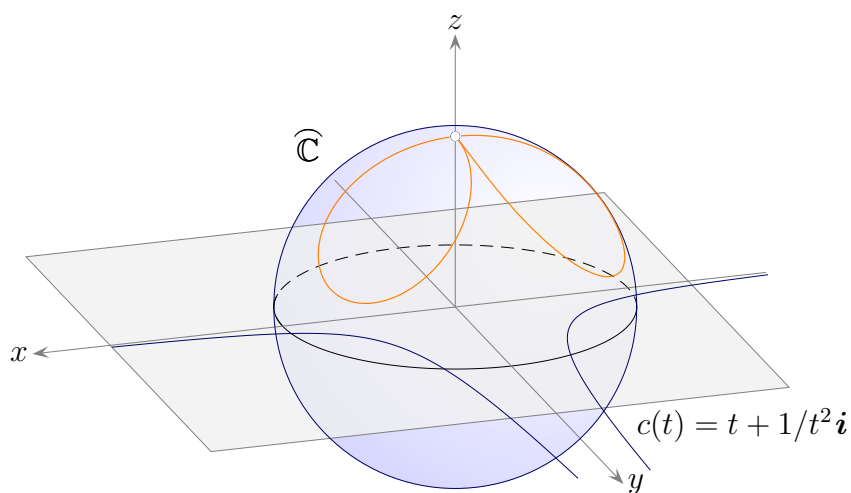
Offensichtlich gilt: Die Konjugation $z \rightarrow \bar{z}$ induziert eine Spiegelung von $\widehat{\mathbb{C}}$ an der vertikalen Ebene, die durch die reelle x -Achse geht.

Die Hintereinanderausführung (es kommt nicht auf die Reihenfolge an) von Inversion und Konjugation ergibt die Reziproktfunktion $z \rightarrow 1/z$. Auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist das eine Doppelspiegelung an senkrechten Ebenen durch die reelle Achse und das ist eine Drehung von $\widehat{\mathbb{C}}$ um die reelle Achse mit dem Winkel 180° .

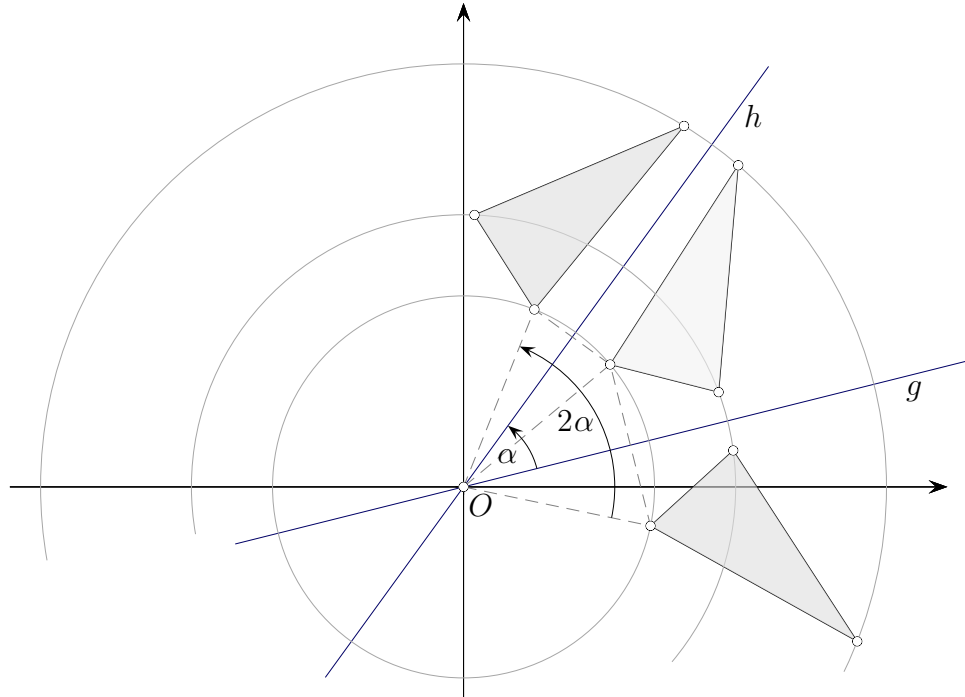
↑ Riemannsche Zahlenkugel (Einheitssphäre)



Mit der stereographischen Projektion kann das Verhalten einer Kurve für $t \rightarrow \infty$ mit einem Blick erfasst werden. Die komplexe Ebene wurde um das Element ∞ ergänzt, das dem Nordpol auf der Sphäre entspricht. In \mathbb{C}^* wird naheliegender gemäß $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ umgeformt. Das Symbol ∞ wird somit zur Beschreibung eines Grenzprozesses als auch als eigenständiges Element verwendet.



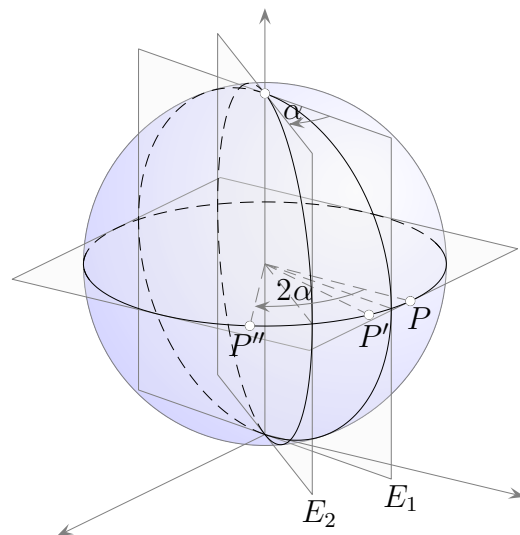
↑ Rotation



Aus der Graphik ersehen wir:

Schneiden sich die Geraden g und h im Punkt O unter dem Winkel α , dann ist die Hintereinanderausführung der Spiegelungen an g und h eine Drehung um O mit dem Winkel 2α , $S_h \circ S_g = R_O^{2\alpha}$.

Zu beachten ist, dass sich die Drehung $R_O^{2\alpha}$ mit einem beliebigen Geradenpaar, das durch O verläuft und einen Winkel α einschließt, als Doppelspiegelung darstellen lässt.



Diese Überlegung kann auf eine Kugel übertragen werden.

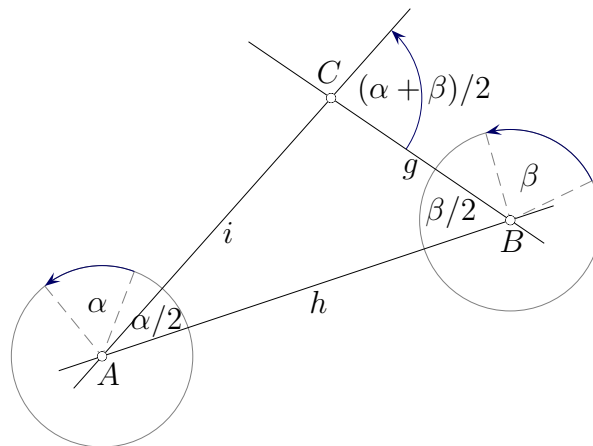
Die Rotationsachse verläuft durch den Kugelmittelpunkt.

P wird an E_1 gespiegelt, das Bild P' an E_2 .

Wenn die Ebenen den Winkel α einschließen,

erfolgt die Rotation um die Schnittgerade mit dem Drehwinkel 2α .

↑ Hintereinanderausführung von Rotationen

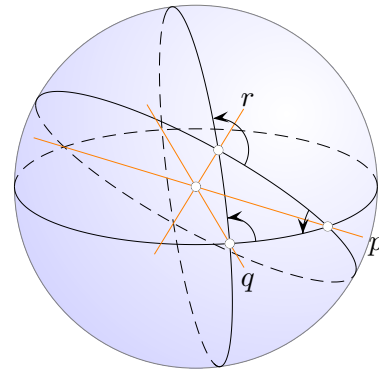


Wir untersuchen die Hintereinanderausführung $R_A^\alpha \circ R_B^\beta$ der Drehungen R_B^β (Rotation um B , Drehwinkel β) und R_A^α . Hierzu stellen wir R_B^β als Doppelspiegelung an den Geraden g und h dar (h verläuft durch A und B), sowie R_B^β an den Geraden h und i , dann gilt:

$$R_A^\alpha \circ R_B^\beta = S_i \circ S_h \circ S_h \circ S_g = S_i \circ S_g$$

Das ist eine Drehung um C mit dem Winkel $\alpha + \beta$.

Falls g und h parallel sind, führen die Drehungen zu einer Translation.



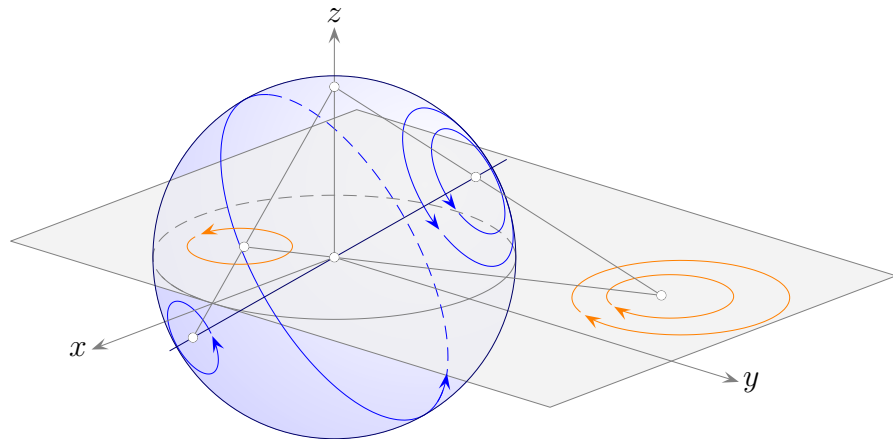
Diese Überlegung kann auf eine Kugel übertragen werden.

Die Zusammensetzung zweier Spiegelungen ist immer eine Drehung.

Die Rotationsachsen verlaufen durch den Kugelmittelpunkt.

Die Rotation um p mit dem Winkel α und anschließend um q mit dem Winkel β ergibt eine Rotation um r mit dem Winkel $\gamma = \pi - 2[\pi/2 - \alpha/2 - \beta/2 + \kappa D] = \alpha + \beta - 2\kappa D$, siehe Winkelabweichung eines sphärischen Dreiecks.

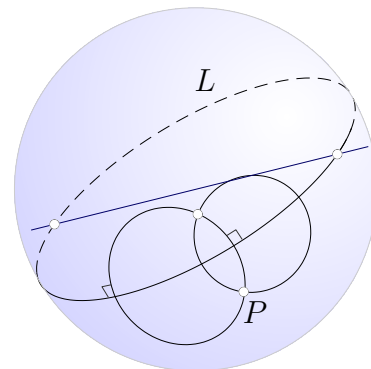
↑ Drehung der Riemannschen Zahlenkugel



Die Abbildung legt die Vermutung nahe:

Die Drehung der Zahlenkugel um φ induziert stereographisch eine elliptische Möbiustransformation deren Fixpunkte den Schnittpunkten der Drehachse mit der Kugel entsprechen.

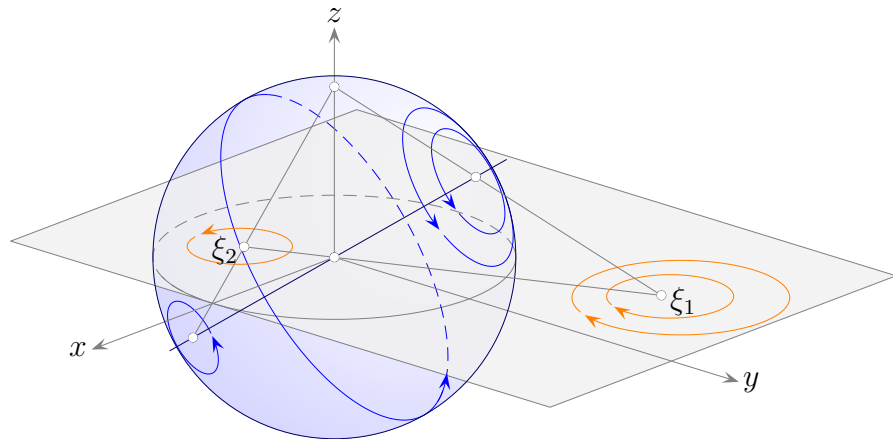
Die Drehung der Kugel ist eine Doppelspiegelung an zwei Ebenen, die zwei Großkreise festlegen. Die Spiegelung eines Punktes P ist der zweite Schnittpunkt von zwei zu einem Großkreis L orthogonalen Kreisen, die durch P verlaufen.



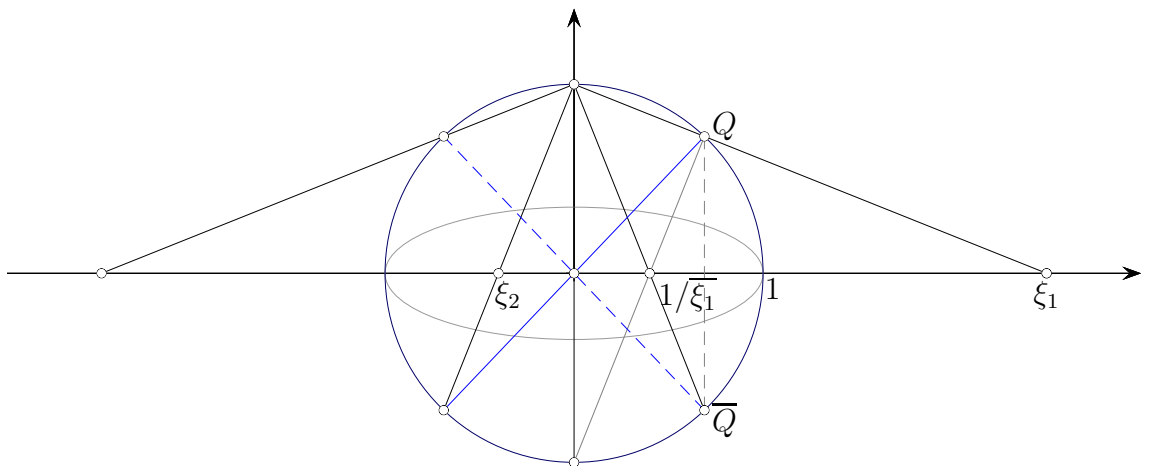
Da die stereographische Projektion Kreise und Winkel erhält, geht die Spiegelung über in eine Inversion am Bild von L . Der Drehung der Kugel entspricht somit einer Verkettung zweier Inversionen.

Für einen Kreis um c mit dem Radius R gilt $(z' - c)\overline{(z - c)} = R^2$ (Inversion im Komplexen) und nach z' umgestellt $z' = \frac{R^2}{\overline{z - c}} + c$. Auf einen Nenner gebracht erhalten wir die Form $z' = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$. Hieraus ist zu erkennen, dass die Hintereinanderausführung zweier Inversionen wegen $\overline{\overline{z}} = z$ eine Möbiustransformation ist.

↑ Fixpunkte der induzierten Möbiustransformation



Aus der Symmetrie der unteren Abbildung, siehe Stereographische Projektion und Inversion, folgt unmittelbar für die Fixpunkte der Möbiustransformation $\xi_2 = -1/\overline{\xi_1}$ und damit $|\xi_2| = 1/|\xi_1|$.



$T(z) = \frac{az+b}{-bz+\bar{a}}$ hat die Fixpunkte $z_{1,2} = \frac{(\bar{a}-a) \pm \sqrt{(\bar{a}-a)^2 - 4b\bar{b}}}{2\bar{b}}$ und es gilt $z_2 = -1/\bar{z}_1$.

Beim Verifizieren ist zu beachten, dass $(\bar{a}-a)$ rein imaginär ist, $\overline{(\bar{a}-a)} = -(\bar{a}-a)$, und der Radikant negativ ist, $\sqrt{\dots} = -\sqrt{\dots}$.

T normiert bedeutet $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

↑ Matrix der elliptischen Möbiustransformation

Es seien die Fixpunkte $\xi_1 = 2 + i$, $\xi_2 = -1/\overline{\xi_1}$ und $m = e^{i\varphi} = i$ (Drehung um 90°) gegeben.

Zur Ermittlung der Matrix siehe [Berechnung des Multiplikators \$m\$](#) :

$$\begin{aligned}
 T &= F^{-1} \circ T^* \circ F & | F(z) &= \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2} \\
 [T] &= [F]^{-1} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [F] \\
 &= \begin{bmatrix} |\xi_1|^2 + m & \xi_1(1 - m) \\ \overline{\xi_1}(1 - m) & m|\xi_1|^2 + 1 \end{bmatrix} & | \text{Mit dem gemeinsamen Nenner wurde multipliziert.} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 + i & 3 - i \\ 1 - 3i & 1 + 5i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$[T]$ normiert (Matrizelemente mit $\sqrt{36i}$ dividieren) ergibt die Möbiustransformation

$$T(z) = \frac{(0,70711 - 0,47140i)z + 0,23570 - 0,47140i}{-(0,23570 + 0,47140i)z + 0,70711 + 0,47140i}$$

von der Form $T(z) = \frac{az + b}{-bz + a}$.

Die Drehachse verläuft durch O und $(2/3 | 1/3 | 2/3)$, siehe [Stereographischer Zusammenhang](#). Zum Fixpunkt ξ_1 ist der zugehörige Punkt Q auf der Sphäre zu berechnen.

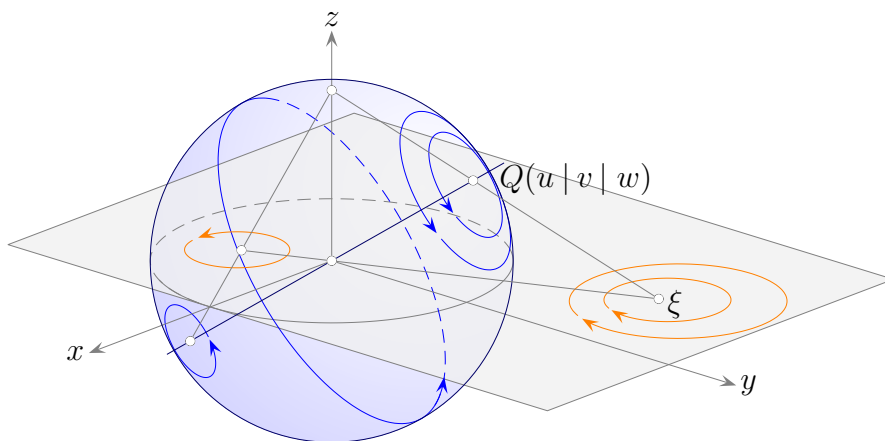
Bezug zu den Eigenwerten der normierten Matrix $[T]$

$$\begin{aligned}
 \det([T] - \lambda[E]) &= 0 \\
 (a - \lambda)(d - \lambda) - bc &= 0 \\
 \dots & \quad | ad - bc = 1, \quad bc = ad - 1 \\
 \lambda^2 - (a + d)\lambda + 1 &= 0 \\
 \lambda + \frac{1}{\lambda} &= a + d
 \end{aligned}$$

$\sqrt{m_{1,2}}$ und $\lambda_{1,2}$ genügen derselben quadratischen Gleichung, siehe [Berechnung des Multiplikators \$m\$](#) .

Möglich wäre $m_1 = \lambda_1^2$ oder $m_1 = 1/\lambda_1^2$. Die Drehrichtung ist hier nicht ersichtlich, jedoch kann die Größe des Winkels mit einem Eigenwert von $[T]$ ermittelt werden.

↑ Matrix zur gedrehten Riemannschen Zahlenkugel



$$[T^*] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = F^{-1} \circ T^* \circ F$$

$$|F(z) = \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}, \quad \xi_2 = -1/\overline{\xi_1}$$

$$[T] = [F]^{-1} \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [F]$$

$$= \frac{1}{(|\xi|^2 + 1)\sqrt{m}} \begin{bmatrix} |\xi|^2 + m & \xi(1 - m) \\ \bar{\xi}(1 - m) & m|\xi|^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$|\xi = \xi_1$$

$$[T] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} |\xi|^2 + m & \xi(1 - m) \\ \bar{\xi}(1 - m) & m|\xi|^2 + 1 \end{bmatrix}$$

| vereinfachte Darstellung

$$= \begin{bmatrix} |\xi|^2(\sqrt{m})^{-1} + \sqrt{m} & \xi((\sqrt{m})^{-1} - \sqrt{m}) \\ \bar{\xi}((\sqrt{m})^{-1} - \sqrt{m}) & \sqrt{m}|\xi|^2 + (\sqrt{m})^{-1} \end{bmatrix}$$

$$| m = e^{-i\varphi}, \quad \sqrt{m} = e^{-i(\varphi/2)}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{i(\varphi/2)}|\xi|^2 + e^{-i(\varphi/2)} & 2i\xi \sin(\varphi/2) \\ 2i\bar{\xi} \sin(\varphi/2) & e^{-i(\varphi/2)}|\xi|^2 + e^{i(\varphi/2)} \end{bmatrix}$$

$$| \sin \psi = \frac{1}{2i}(e^{i\psi} - e^{-i\psi})$$

$$\xi = \frac{u + vi}{1 - w}, \quad |\xi|^2 = \frac{1 + w}{1 - w}$$

siehe Stereographischer Zusammenhang

$$[T] = \frac{2}{1 - w} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} [(e^{i(\varphi/2)} + e^{-i(\varphi/2)}) + w(e^{i(\varphi/2)} - e^{-i(\varphi/2)})] & i(u + vi) \sin(\varphi/2) \\ i(u - vi) \sin(\varphi/2) & \frac{1}{2} [(e^{i(\varphi/2)} + e^{-i(\varphi/2)}) + w(e^{-i(\varphi/2)} - e^{i(\varphi/2)})] \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} [(e^{i(\varphi/2)} + e^{-i(\varphi/2)}) + w(e^{i(\varphi/2)} - e^{-i(\varphi/2)})] & (ui - v) \sin(\varphi/2) \\ (ui + v) \sin(\varphi/2) & \frac{1}{2} [(e^{i(\varphi/2)} + e^{-i(\varphi/2)}) - w(e^{i(\varphi/2)} - e^{-i(\varphi/2)})] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi/2) + iw \sin(\varphi/2) & (ui - v) \sin(\varphi/2) \\ (ui + v) \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) - iw \sin(\varphi/2) \end{bmatrix}$$

$$| \cos \psi = \frac{1}{2}(e^{i\psi} + e^{-i\psi})$$

↑ Räumliche Drehung Beispiel

Wir betrachten eine Raumdrehung von $\pi/2$ um die x -Achse, gefolgt von einer Drehung von $\pi/2$ um die z -Achse. Die Möbiusmatrix der resultierenden Drehung lautet:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 - \mathbf{i} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{i} & -1 + \mathbf{i} \\ 1 + \mathbf{i} & 1 - \mathbf{i} \end{bmatrix} = M$$

Ein Vergleich mit der normierten Matrix

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi/2) + \mathbf{i}w \sin(\varphi/2) & (u\mathbf{i} - v) \sin(\varphi/2) \\ (u\mathbf{i} + v) \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) - \mathbf{i}w \sin(\varphi/2) \end{bmatrix}$$

zeigt:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi/2) &= \Re(M_{11}) & \implies & \varphi = 2\pi/3 \\ u\mathbf{i} \sin(\varphi/2) &= \Im(M_{21}) \\ -v \sin(\varphi/2) &= \Re(M_{21}) \\ w\mathbf{i} \sin(\varphi/2) &= \Im(M_{11}) & u = v = w &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Es ist somit eine Drehung von 120° um die Achse $\mathbf{a} = (1, 1, 1)^\top$.

↑ Bezug zu Quaternionen

Die Möbiusmatrix für eine Drehung von 180° um die Achse $\mathbf{a} = (u, v, w)^\top$ vereinfacht sich zu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}w & u\mathbf{i} - v \\ u\mathbf{i} + v & -\mathbf{i}w \end{bmatrix}$$

Für $\mathbf{a} = (1, 0, 0)^\top$ ergibt das $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{i}^2 = -1$

für $\mathbf{a} = (0, 1, 0)^\top$ $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{j}^2 = -1$

für $\mathbf{a} = (0, 0, 1)^\top$ $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix}$, $\mathbf{k}^2 = -1$
 $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$
 $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik}$

Mit $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ erhalten wir die übersichtliche Darstellung

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi/2) + \mathbf{i}w \sin(\varphi/2) & (u\mathbf{i} - v) \sin(\varphi/2) \\ (u\mathbf{i} + v) \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) - \mathbf{i}w \sin(\varphi/2) \end{bmatrix} = \cos(\varphi/2)\mathbf{1} + [u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}] \sin(\varphi/2)$$

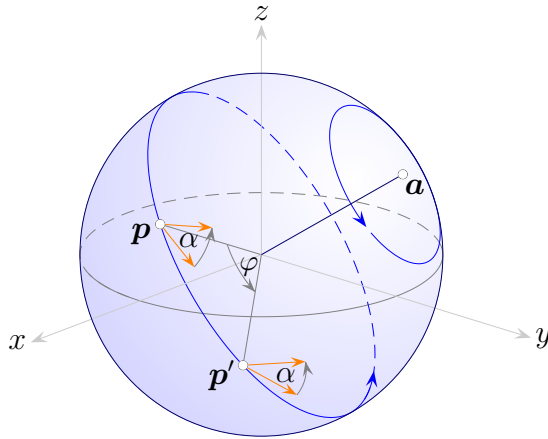
Die rechte Seite kann auch als **Quaternion** gelesen werden. Die Rechenregeln sind identisch. Zur Hintereinanderausführung zweier Raumdrehungen werden die entsprechenden rechten Seiten (in der richtigen Reihenfolge) multipliziert.

Betrachten wir erneut eine Raumdrehung von $\pi/2$ um die x -Achse, gefolgt von einer Drehung von $\pi/2$ um die z -Achse. Übersetzt heißt das mit $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{i}) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{k} + \mathbf{j})$$

Hieraus ergeben sich auf einfache Weise der Drehwinkel $\varphi = 120^\circ$ und die Achse $\mathbf{a} = (1, 1, 1)^\top$.

↑ Drehung $D_{\mathbf{a}}^\varphi$



Sei $D_{\mathbf{a}}^\varphi$ die Drehung mit dem Drehwinkel φ und der Achse (Einheitsvektor) \mathbf{a} , $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$.

Anhand der Abb. ist zu erkennen: $D_{\mathbf{p}'}^\alpha = D_{\mathbf{a}}^\varphi \circ D_{\mathbf{p}}^\alpha \circ D_{\mathbf{a}}^{-\varphi}$

Äquivalent mit Quaternionen formuliert ergibt $\mathbb{D}_{\mathbf{p}'}^\alpha = \mathbb{D}_{\mathbf{a}}^\varphi \circ \mathbb{D}_{\mathbf{p}}^\alpha \circ \mathbb{D}_{\mathbf{a}}^{-\varphi}$.

Zu gegebenem \mathbf{p} kann hiermit \mathbf{p}' ermittelt werden (α beliebig). Wir wählen $\alpha = \pi$.

Dann sind $\mathbb{D}_{\mathbf{p}}^\alpha = p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}$ und $\mathbb{D}_{\mathbf{p}'}^\alpha$ reine Quaternionen, $\mathbb{D}_{\mathbf{p}}^\alpha = [0, \mathbf{p}]$, $\mathbb{D}_{\mathbf{p}'}^\alpha = [0, \mathbf{p}']$.

$$\mathbb{A} = D_{\mathbf{a}}^\varphi = \cos(\varphi/2) \mathbf{1} + [a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}] \sin(\varphi/2) \quad | \quad |\mathbf{a}| = 1$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^* &= D_{\mathbf{a}}^{-\varphi} = \cos(\varphi/2) \mathbf{1} + [a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}] \sin(-\varphi/2) \\ &= \cos(\varphi/2) \mathbf{1} + [-a_1 \mathbf{i} - a_2 \mathbf{j} - a_3 \mathbf{k}] \sin(\varphi/2) \quad | D_{\mathbf{a}}^\varphi \text{ konjugiert, } \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\mathbb{A} = [a, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [b, \vec{b}]$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [ab - \vec{a} \cdot \vec{b}, a\vec{b} + b\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}]$$

Hintereinanderausführung von 2 Drehungen, $|\vec{p}| = 1$

$$\vec{p} \longrightarrow \mathbb{A} [0, \vec{p}] \mathbb{A}^* \longrightarrow [0, \vec{p}'] = \mathbb{B} \mathbb{A} [0, \vec{p}] \mathbb{A}^* \mathbb{B}^* \quad \text{beachte: } \mathbb{A}^* \mathbb{B}^* = (\mathbb{B} \mathbb{A})^*$$

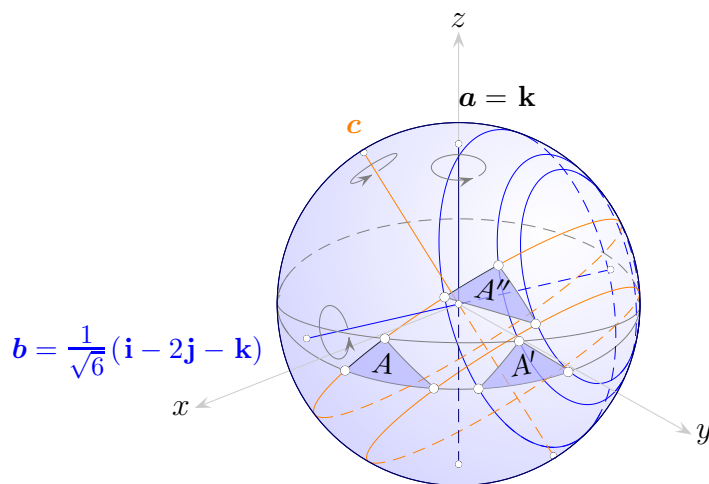
Beispiel für $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \varphi = \frac{\pi}{3} = 120^\circ, \quad \mathbf{p} = (0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \mathbb{A} [0, \vec{p}] \mathbb{A}^* = \left(\cos \frac{\pi}{6} \mathbf{1} + \frac{1}{\sqrt{3}} [i + j + k] \sin \frac{\pi}{6} \right) k \left(\cos \frac{\pi}{6} \mathbf{1} + \frac{1}{\sqrt{3}} [-i - j - k] \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} [2i - j + 2k] \quad | \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}' = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$$

↑ Hintereinanderausführung zweier Drehungen



Wir drehen die Kugel mit $D_{\mathbf{a}, \alpha}$ um \mathbf{a} mit dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$, anschließend mit $D_{\mathbf{b}, \beta}$ um \mathbf{b} mit dem Winkel $\beta = \frac{\pi}{5}$, so dass A in A' und A' in A'' übergehen. Es gibt offensichtlich eine Drehung $D_{\mathbf{c}, \gamma}$ um \mathbf{c} mit $A \rightarrow A''$.

Jedoch ist keineswegs ersichtlich, dass $D_{\mathbf{c}, \gamma}$ die anderen beiden Drehungen ersetzt. Nun ja, es wurde bewiesen.

$$\begin{array}{l}
 D_{\mathbf{a}, \alpha} \quad \mathbb{A} = \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \mathbf{k} \\
 D_{\mathbf{b}, \beta} \quad \mathbb{B} = \cos \frac{\pi}{10} + \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \sin \frac{\pi}{10} \\
 D_{\mathbf{c}, \gamma} \quad \mathbb{B}\mathbb{A} = \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{8} - 2 \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{8}) \mathbf{i} - \\
 \quad (2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{8}) \mathbf{j} + (\sqrt{6} \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{8}) \mathbf{k}] \\
 \gamma = 2 \arccos \left(\cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{8} \right) \approx 44,07^\circ
 \end{array}$$

Zur Erinnerung:

Die Rotation um einen normierten Vektor $\mathbf{x} = (x, y, z)$ mit dem Winkel α wird durch die Quaternion

$\mathbb{A} = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, x \sin \frac{\alpha}{2}, y \sin \frac{\alpha}{2}, z \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, (x, y, z) \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \sin \frac{\alpha}{2} \right)$ erfasst.

Wegen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ gilt $|\mathbb{A}| = 1$.

↑ Matrixdarstellung von \mathbb{C} und \mathbb{H}

Die Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{=} a + b\mathbf{i}, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{bilden ein Modell der komplexen Zahlen.}$$

Entsprechendes gilt für die Quaternionen \mathbb{H} .

$$\begin{bmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b\mathbf{i} & c + d\mathbf{i} \\ -c + d\mathbf{i} & a - b\mathbf{i} \end{bmatrix} \hat{=} a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad w, z \in \mathbb{C}$$

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Basis geändert}$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik}$$

Zwischen den (unitären) Matrizen \mathcal{M} und denjenigen Quaternionen, die Drehungen erfassen, besteht der Zusammenhang:

$$\det \mathcal{M} = \det \begin{bmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a + b\mathbf{i} & c + d\mathbf{i} \\ -c + d\mathbf{i} & a - b\mathbf{i} \end{bmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |\mathbb{A}| = 1$$

$$\mathcal{M}\overline{\mathcal{M}}^T = E, \quad \text{d.h.} \quad \mathcal{M}^{-1} = \overline{\mathcal{M}}^T.$$

Startseite
Inversion interaktiv