Was ist Mathematik?

Das Operationsfeld der Mathematik sind Zahlbereiche, algebraische Strukturen, geometrische Figuren, allgemein endliche und unendliche Mengen mit klar definierten Eigenschaften. Für diese geschaffenen Bereiche gilt es, Gesetzmäßigkeiten und Muster zu entdecken. Hierzu werden Begriffe präzise definiert und alle mit ihnen formulierten Behauptungen sind streng logisch ohne Rückgriff auf die Anschauung zu beweisen. Dieses Vorgehen ist für viele Menschen von großer Anziehungskraft. Einige bemühen sich jahrzehntelang, um eine einzige Fragestellung zu klären, wenn auch nicht immer mit Erfolg. Mathematische Inhalte werden durch menschliche Kommunikation verbreitet, bei der nicht selten erhebliche methodische und didaktische Fehler begangen werden.
So sind auch andersartige emotionale Einstellungen zur Mathematik anzutreffen.

Mathematische Sätze sind von der Bedingungsform (Inklusion): Wenn ..., dann ... Ausgenommen sind lediglich die Axiome, die einer math. Theorie zugrunde liegen (z. B. Peano-Axiome für die natürlichen Zahlen, Kolmogorow-Axiome für die Wahrscheinlichkeitsrechnung). Ihre Aussagen können nicht auf Einfacheres zurückgeführt werden, z. B. durch zwei Punkte verläuft genau eine Gerade. Bewiesen werden muss (Umkehrung des Satzes von Pythagoras):
Wenn für die Seitenlängen eines Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist es rechtwinklig.
Logisch gleichwertig ist der Umkehrschluss (Kontraposition):
Wenn ein Dreieck nicht rechtwinklig ist, dann gilt für die Seitenlängen $a^2 + b^2 \neq c^2$.

Mathematik wurde und wird entwickelt, um die empirische Welt zu erfassen, zu verstehen und Prognosen zu ermöglichen. Sie umfasst aber auch zunehmend umfangreiche Theorien, für die keine unmittelbare Nützlichkeit erkennbar ist.
Naturgesetze sehen wir als kausal an. Wenn wir ein Glas fallen lassen, dann können wir uns darauf verlassen, dass es sich beschleunigt in Richtung Erdboden bewegt, und nicht etwa ab und zu davon fliegt. Die deterministische Ursache-Wirkung-Beziehung ist durch mathematische Funktionen (Wenn x dann y) darstellbar. Addition als Zusammenfassung und die aus wiederholter Addition entstandene Multiplikation von physikalischen Größen passen zu unserer intuitiven Wahrnehmung. Bei Gleichungen, die naturgesetzliche quantitative Zusammenhänge erfassen, bleibt durch Umstellen ihr Wahrheitswert erhalten. Aus den newtonschen Axiomen folgt mit logischen Schlussfolgerungen und math. Umformungen die gesamte Mechanik unserer Alltagserfahrung. Bei der Anwendung von Mathematik wird versucht, Empirisches durch mathematische Ansätze möglichst genau anzunähern. Wachstumsvorgänge können mit verschiedenen, aus angenommenen Eigenschaften herleitbaren Funktionen modelliert werden, in der Hoffnung, die zukünftige Entwicklung einzugrenzen. Evolutionäre Optimierungsstrategien in der Natur werden erkennbar und für wirtschaftliche und technische Probleme nutzbringend angewandt.

Die ersten mathematischen Gehversuche waren das Zählen und damit die Schaffung der natürlichen Zahlen. Hier gibt es für jede Zahl genau einen Nachfolger und damit war das potentiell Unendliche als nie endender Vorgang in der Mathematik nicht mehr wegzudenken. Mit der Auffassung eines Bruches wie 1/3 als unendliche Dezimalzahl kam das aktual Unendliche als ein gegebenes, vollendetes Unendliches, Griffbereites hinzu. Hier sind die reellen Zahlen zu erwähnen, die theoretische Berechnungen mit unbegrenzter Genauigkeit ermöglichen, sowie die darauf aufbauenden math. Theorien (Analysis, Funktionentheorie, Variationsrechnung, usw.) Mit ihnen bleiben in den Naturwissenschaften hinsichtlich der math. Bearbeitungsmöglichkeiten keine Wünsche offen.

Der Bereich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (z. B.) ist virtuell, er existiert nur in unserem Geist. Die Zahlen aus $\mathbb{N}$ bilden eine unendliche Kette aufeinanderfolgender Elemente. Die gleiche Struktur ist bei den unendlichen Mengen der geraden Zahlen, der ungeraden Zahlen und den Quadratzahlen anzutreffen. Diese Mengen sind *abzählbar*. Für die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gilt das nicht. Obwohl auch unendlich, ist diese Menge von komplizierterer Struktur (*überabzählbar, von größerer Mächtigkeit*). Georg Cantor 1845-1918 präzisierte den Gedanken des Vergleichens von unendlichen Mengen. Seine mengentheoretischen Begriffsbildungen und Entdeckungen, für viele zeitgenössische Mathematiker anfänglich verstörend, gehören zum Fundament der modernen Mathematik.