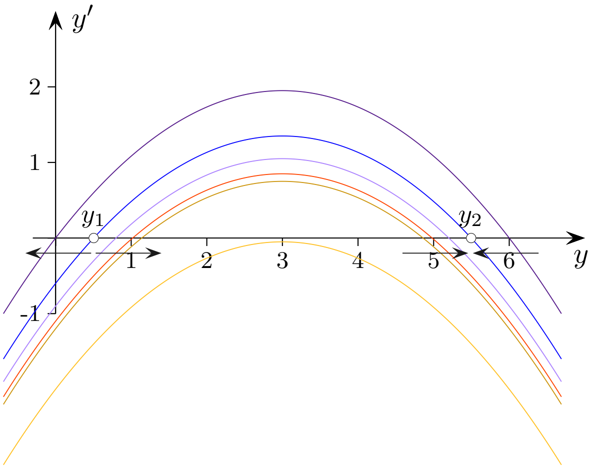
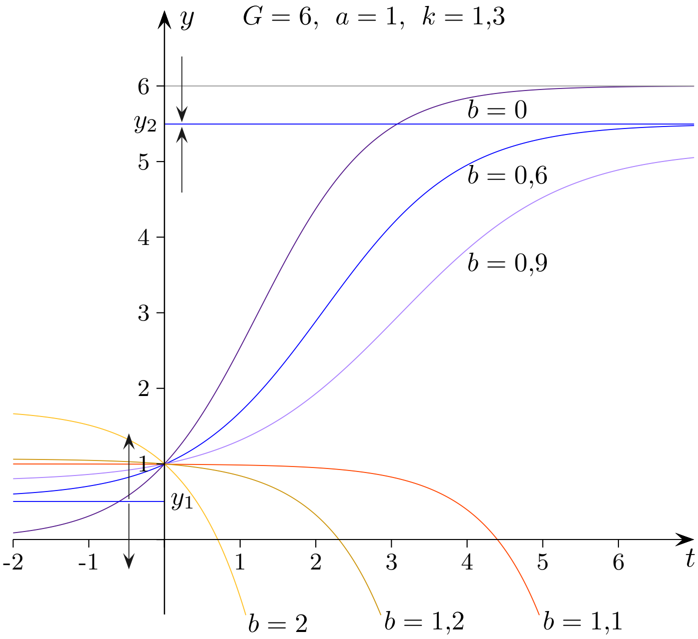
Logistisches Wachstum mit Ernte

Wir betrachten eine Fischpopulation (in ME), die mit einer festen Fangquote b befischt wird. Die Differentialgleichung lautet:

$$f'(t) \;=\; kf(t)\left(1-\frac{f(t)}{G}\right)-b, \quad f(0)=a$$

Die Phasenkurve ist eine nach unten geöffnete Parabel $y' = ky\left(1-\frac{y}{G}\right)-b$.





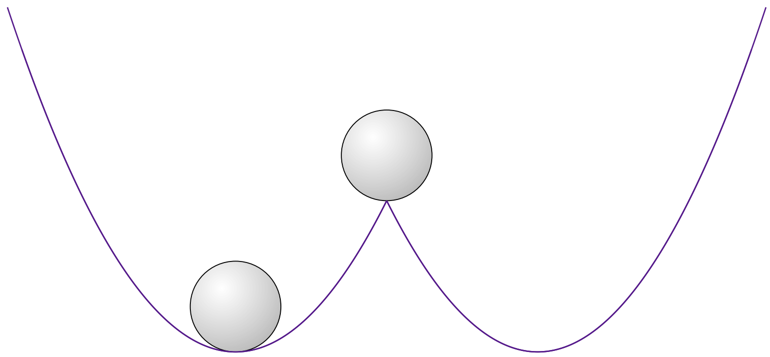
Eine Population mit Größe genau y_1 würde theoretisch diese Größe beibehalten. Aber schon kleinste durch äußere Einflüsse bedingte Schwankungen würden dazu führen, dass die Population entweder ausstirbt oder sich auf y_2 zubewegt. Der *stationäre* Punkt (Nullstelle der Parabel, Gleichgewichtspunkt) des Systems y_1 ist *instabil* (abstoßender Fixpunkt), da die Steigung der Parabel an dieser Stelle positiv ist. Rechts von dieser Nullstelle nimmt y wegen $y' > 0$ zu, links wegen $y' < 0$ ab.
Im Gegensatz dazu führen Abweichungen von y_2 auf y_2 zurück, da die Steigung der Parabel an dieser Stelle negativ ist. Dieser stationäre Wert ist *stabil* (anziehender Fixpunkt). Hat die Parabel keine Nullstellen, dann fällt f monoton. Bei genau einer Nullstelle führen kleinste Störungen zum Aussterben der Population.

Nebenbei:

Maple liefert $f(t) = \dfrac{Gk - \tanh\left(\dfrac{2G\operatorname{arctanh}\left(\frac{k(G-2a)}{\sqrt{G^2k^2-4Gbk}}\right) - t\sqrt{G^2k^2-4Gbk}}{2G}\right)\sqrt{G^2k^2-4Gbk}}{2k}$

Für die Graphen in LaTeX wäre der Funktionsterm in die umgekehrte polnische Notation (UPN) zu überführen. Ich habe für $f(t)$ Näherungen der Form $f(t) = \frac{G^\star}{1+e^{k^\star(t-a^\star)}} + c^\star$ bzw. $f(t) = -e^{k^\star(t-a^\star)} + c^\star$ verwendet.

stabiles/instabiles Gleichgewicht



Logistisches Wachstum mit Ernte

Für das logistische Wachstum gilt:

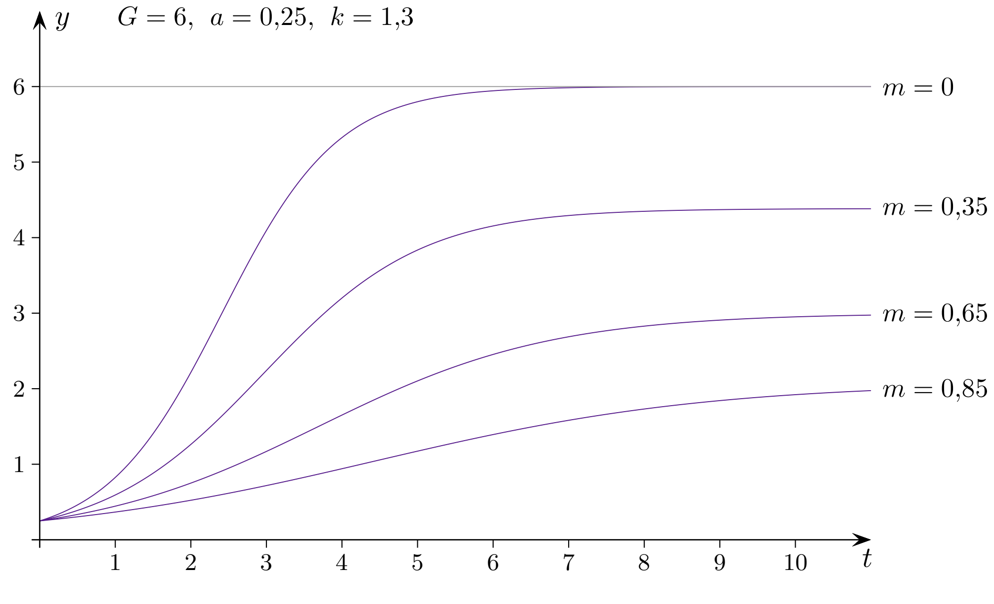
$$f'(t) = kf(t)\Big(1 - \frac{f(t)}{G}\Big), \quad f(0) = a$$

$$f(t) = \frac{aGe^{kt}}{G + a(e^{kt} - 1)} = \frac{G}{1 - e^{-kt}\big(1 - \frac{G}{a}\big)} \qquad f \text{ durch Ableiten und Einsetzen in DGL verifizieren}$$

Wenn die Anzahl der Fische, die zu jedem Zeitpunkt gefischt werden,
proportional zur Populationsgröße ist, ergibt sich das Modell:

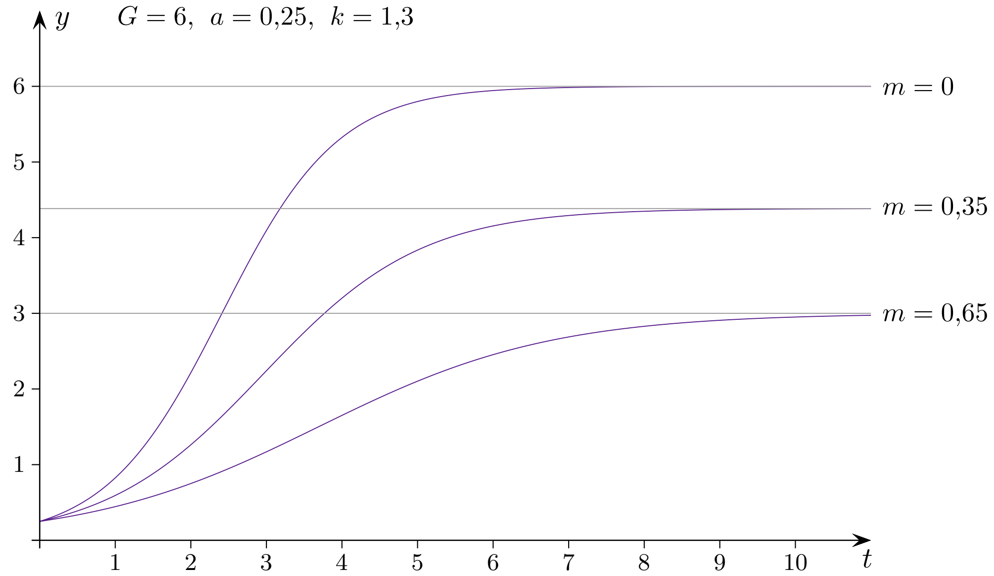
$$\begin{aligned}
f'(t) &= kf(t)\Big(1 - \frac{f(t)}{G}\Big) - mf(t), \quad f(0) = a, && \text{Fangrate } m \\
&= kf(t)\Big(1 - \frac{f(t)}{G} - \frac{m}{k}\Big) && \text{umgeformt} \\
&= \underbrace{k\big(1 - \frac{m}{k}\big)}_{k^*} f(t)\Big(1 - \frac{f(t)}{\underbrace{G\big(1 - \frac{m}{k}\big)}_{G^*}}\Big) && \big(1 - \frac{m}{k}\big)\Big(1 - \frac{f(t)}{G\big(1 - \frac{m}{k}\big)}\Big) = \big(1 - \frac{m}{k}\big) - \frac{f(t)}{G} \\
&= k^* f(t)\Big(1 - \frac{f(t)}{G^*}\Big) \\
f(t) &= \frac{aG^* e^{k^* t}}{G^* + a(e^{k^* t} - 1)}
\end{aligned}$$

Auch hier liegt ein logistisches Wachstum vor, mit verminderter Rate k^*
(des anfänglichen exponentiellen Wachstums) und reduzierter oberer Grenze G^*.



Die Grenze G^* hängt von der Fangrate m ab. Wird stark gefischt, dann bleibt die Population klein.
Wird relativ wenig gefischt, so nutzt man nicht den starken Populationzuwachs.

Optimale Befischung



Wir fischen nur so viel, dass die Population genügend gross bleibt, andererseits möchten wir möglichst viele Fische fangen. Nach genügend langer Zeit nähert sich die Populationsgröße $f(t)$ einer Grenze $G^* = G\big(1 - \frac{m}{k}\big)$ an, so dass der konstante Wert $V = mG^*$ ein Maß für das sich auf lange Sicht einstellende Fangvolumen ist. Mit der dann festen Fangquote $b = mG^*$ wird in der Zeitspanne Δt die Menge $V\Delta t$ ME gefischt.

Wie muss nun m gewählt werden, damit $V(m)$ maximal wird?

$V(m) = mG\big(1 - \frac{m}{k}\big)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $m_1 = 0$ und $m_2 = k$ und dem Scheitel an der Stelle $m = \frac{k}{2}$.

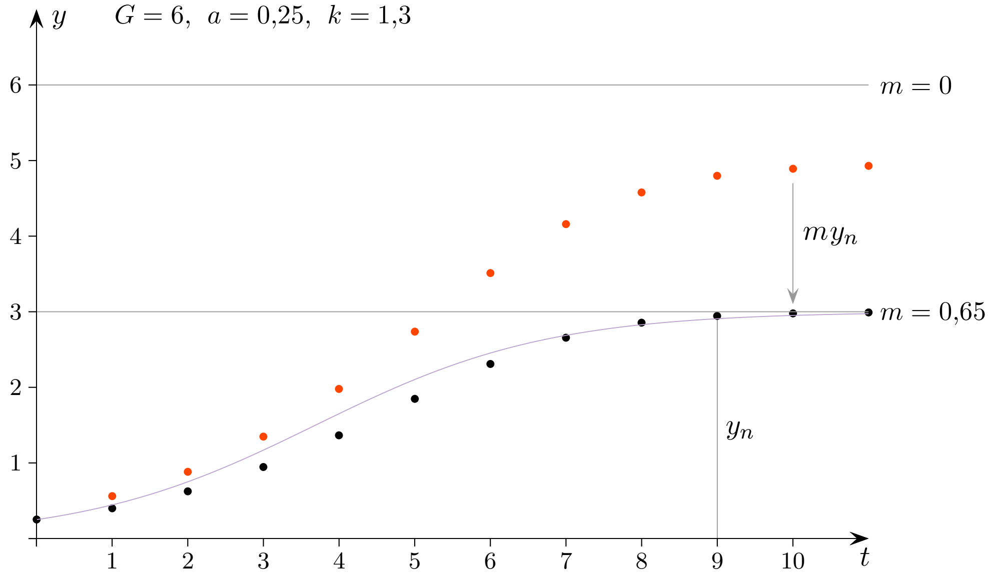
$$V\big(\tfrac{k}{2}\big) = \ldots = \frac{Gk}{4} \quad \text{und} \quad G^* = \ldots = \frac{G}{2}.$$

Für ein optimales Fangergebnis sollte somit die Population auf einer Größe von $\frac{G}{2}$ gehalten werden. Nicht verwunderlich, die Wachstumsgeschwindigkeit ist dann am größten, da die y-Koordinate des Wendepunkts $\frac{G}{2}$ ist.

Befischung iterativ

$$f'(t) \;=\; kf(t)\Big(1-\frac{f(t)}{G}\Big)-mf(t), \quad f(0)=a, \qquad \text{Fangrate } m$$

iterativ $$y_{n+1} \;=\; y_n + ky_n\Big(1-\frac{y_n}{G}\Big)-my_n, \quad y_0=a,$$



Bei dieser Berechnung mit $\Delta t = 1$ wird jeweils am Ende eines Intervalls gefischt (Laichzeiten können ausgespart werden), abhängig vom Bestand am vorherigen Intervallende. In den Zwischenzeiten wächst die Population stark an. Die orange gefärbten Punkte geben den Bestand vor dem Fischen an. Die Bestandskurve bei kontinuierlichem Fischen dient dem Vergleich.

Phasenkurve einer Differentialgleichung

Startseite