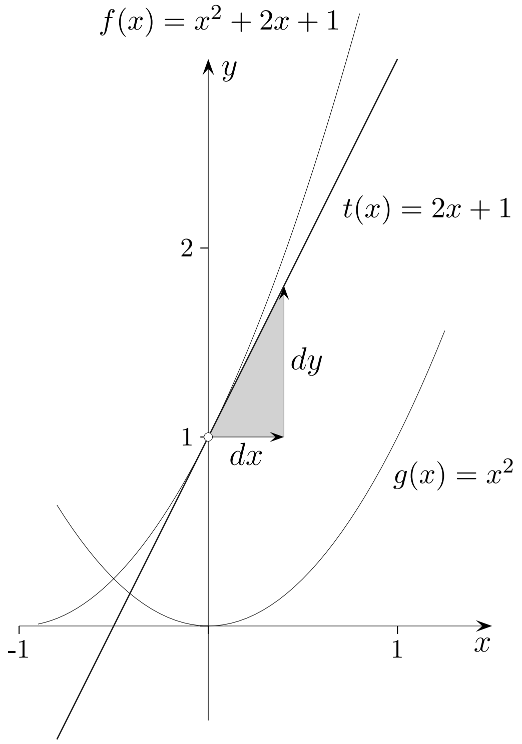
Lineare Näherung

Damit wir z.B. Kurvenlängen und Flächen unter Graphen berechnen können, beschäftigen wir uns zunächst wie Leibniz und Newton Mitte des 18. Jahrhunderts mit Tangenten an Funktionen. Hierbei spielen die Begriffe Berühren und Anschmiegen eine Rolle. Obwohl das Problem recht anschaulich ist, ist die rechnerische Handhabung nicht so offensichtlich.

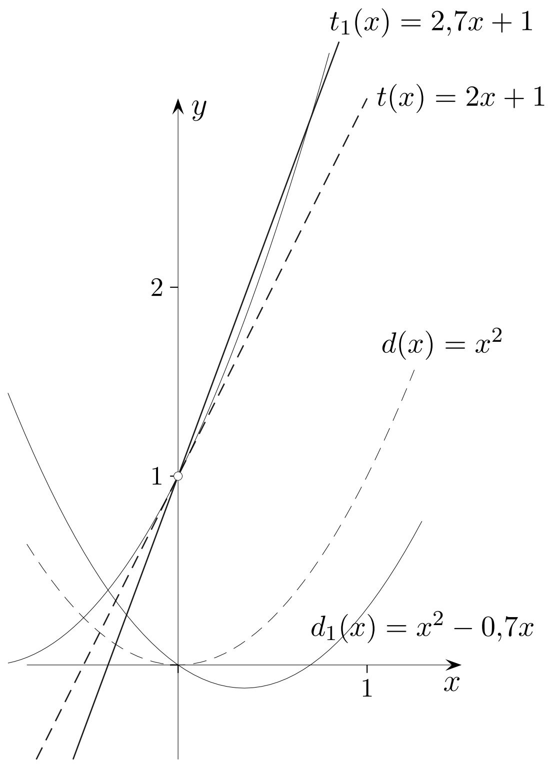


Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

Wir können vermuten, dass die Gleichung der Tangente im Punkt $P(0 \mid 1)$ $y = 2x + 1$ ist, die Tangentenfunktion also $t(x) = 2x + 1$ lautet.

Die Tangentensteigung 2 bedeutet, dass eine Änderung des x-Werts um dx eine Änderung des Funktionswert von f (linear genähert) um $dy = 2\,dx$ bewirkt.

Die Vermutung können wir untermauern, indem wir die Funktion f als Summe der Funktionen $g(x) = x^2$ und $t(x) = 2x + 1$ auffassen und uns die Teilgraphen anschauen.



Weitere Klärung bringt die Untersuchung der Differenzfunktion $d(x) = f(x) - t(x) = x^2$.

Für jede andere lineare Funktion durch $P(0 \mid 1)$ ist die Differenzfunktion betragsmäßig in einer Umgebung von $x = 0$ größer, da neben $x = 0$ eine weitere Nullstelle vorliegt, der Scheitel nicht im Ursprung ist und somit schräg durchlaufen wird.

Hieraus ergibt sich, dass $t(x) = 2x + 1$ die bestmögliche lineare Näherung an der Stelle $x = 0$ ist.

Allgemein gilt:
Die Tangente ist für eine gegebene Stelle die bestmögliche lineare Näherung von f. Sie schöpft den linearen Anteil von f aus. Die Differenz ist von der Größenordnung x^2 oder kleiner.

Die Tangentensteigung 2 heißt Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$ an der Stelle $x = 0$,

in mathematischer Kurzschreibweise: $f'(0) = 2$.

Lineare Näherung

Wie lauten nun die Ableitungen für $f(x) = x^2$ an den Stellen 1, 2 und allgemein x_0?

Die Stelle $x = 1$ haben wir schon behandelt (warum?), da der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 1$ eine verschobene Normalparabel ist.

Um die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ an den Stellen 1 und x_0 zu bestimmen, verschieben wir die Normalparabel nach links um 1, bzw. um x_0. Dann ist alles zu erkennen.

Wir wollen noch einmal die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 durch eine verallgemeinernde Betrachtung ermitteln.

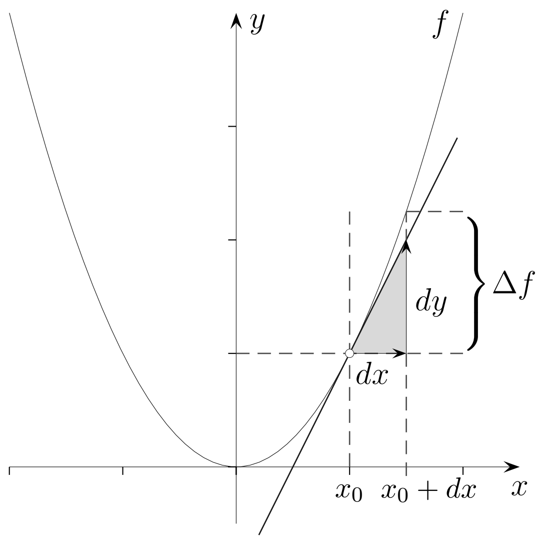
Zunächst rechnen wir den Funktionszuwachs Δf in Abhängigkeit von dx aus.

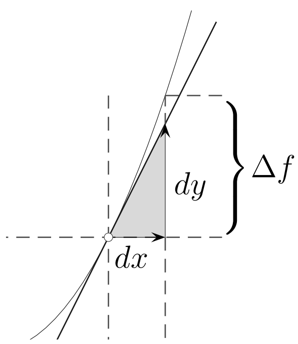
$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + dx) - f(x_0) &&= (x_0 + dx)^2 - x_0^2 \\ & &&= \underbrace{2\,x_0\,dx}_{\textit{linearer Anteil}} + dx^2\end{aligned}$$

Dies entspricht einer Verschiebung des Graphen, so dass der Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ in den Ursprung verschoben wird. Die Tangentensteigung bleibt bei der Verschiebung erhalten. Im Ursprung kann die Tangentensteigung nun leicht ermittelt werden.

Der lineare Anteil von Δf beträgt $2\,x_0\,dx$, d.h. $dy = 2\,x_0\,dx$ oder $f'(x_0) = 2\,x_0$.

Auf diese Weise können die Tangentensteigungen von Polynomen ermittelt und viele Ableitungsregeln begründet werden.





Ableitungen

1. $f(x) \;=\; 3\,x^2 - 7x + 2$

$$\begin{aligned}
\Delta f \;=\; f(x_0+dx) - f(x_0) &= 3(x_0+dx)^2 - 7(x_0+dx) + 2 - (3x_0^2 - 7x_0 + 2)\\
&= 3\,x_0^2 + 6\,x_0\,dx + 3\,dx^2\\
&= \qquad\qquad -7\,x_0 - 7\,dx + 2 - 3\,x_0^2 + 7\,x_0 - 2\\
&= \underbrace{(6\,x_0 - 7)\,dx}_{\text{linearer Anteil}} + 3\,dx^2
\end{aligned}$$

$f'(x) \;=\; 6\,x - 7$

2. $f(x) \;=\; a\,x^2 + b\,x + c$

$$\begin{aligned}
\Delta f \;=\; f(x_0+dx) - f(x_0) &= a(x_0+dx)^2 + b(x_0+dx) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)\\
&= \;\ldots\\
&= \underbrace{(2a\,x_0 + b)\,dx}_{\text{linearer Anteil}} + a\,dx^2
\end{aligned}$$

$f'(x) \;=\; 2a\,x + b$

3. $f(x) \;=\; x^3$

$$\begin{aligned}
\Delta f \;=\; f(x_0+dx) - f(x_0) &= (x_0+dx)^3 - x_0^3\\
&= x_0^3 + 3\,x_0^2\,dx + 3\,x_0\,dx^2 + \; dx^3 - x_0^3\\
&= \underbrace{3\,x_0^2\,dx}_{\text{linearer Anteil}} + 3\,x_0\,dx^2 + \; dx^3
\end{aligned}$$

$f'(x) \;=\; 3\,x^2$

4. $f(x) \;=\; x^4$

$$\begin{aligned}
\text{für}\quad g(x) = x^2 \quad \text{gilt:}\qquad g(x_0+dx) &= x_0^2 + 2\,x_0\,dx + dx^2\\
\Delta f \;= f(x_0+dx) - f(x_0) &= g(x_0+dx)\cdot g(x_0+dx) - x_0^4\\
&= \;\ldots\\
&= \underbrace{4\,x_0^3\,dx}_{\text{linearer Anteil}} + 6\,x_0^2\,dx^2 + 4\,x_0\,dx^3 + dx^4
\end{aligned}$$

$f'(x) \;=\; 4\,x^3$

Bestmögliche Näherung

Aus der Grenzwertdefinition der Ableitung an der Stelle x_0 einer Funktion f folgt, dass die Tangentenfunktion die bestmögliche lineare Näherung ist.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\iff \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h}{h} = 0$$

Im Zähler steht die Differenzfunktion, die wir auch naheliegend als Restfunktion $r(h)$ bezeichnen wollen.

$$\iff \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Der Rest $r(h)$ muss schneller gegen null streben als h, damit der Quotient gegen null strebt. Diese charakteristische Eigenschaft der Ableitung wird noch deutlicher, wenn wir

$$\frac{r(h)}{h} = q(h)$$

$$r(h) = q(h) \cdot h$$

schreiben. Beide Faktoren streben gegen null.

Hieraus kann die obige Behauptung begründet werden.

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h = r(h)$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \underbrace{r(h)}_{q(h) \cdot h}$$

Eine andere Näherung würde von $f'(x_0)$ abweichen, z.B. um w.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + (f'(x_0) + w) \cdot h + \underbrace{r(h) - w \cdot h}_{h\,(\,q(h) - w\,)}$$

Ein Vergleich der Reste kann sich wegen $|\, a \cdot b \,| = |\, a \,| \cdot |\, b \,|$ auf $|\, q(h) \,|$ und $|\, q(h) - w \,|$ beschränken.
Die Behauptung folgt nun aus: $|\, q(h) \,| \longrightarrow 0$ und $|\, q(h) - w \,| \longrightarrow w$ für $h \longrightarrow 0$.

Die Überlegungen können auf Taylorpolynome übertragen werden.

Wir nennen z.B. $p\,(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}\, f''(0) \cdot x^2$ das Taylorpolynom vom Grad 2 zur Funktion f.

Für die Restfunktion gilt: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{x^2} = 0$

Hieraus folgt mit analoger Begründung, dass das Taylorpolynom unter allen Polynomen 2. Grades die Funktion bestmöglich annähert.