

Brownsche Bewegung, Lévy-Konstruktion

Diskrete Näherung

Quadratische Variation

Varianz der quadratischen Variation

Der Prozess  $B^2(t) - t$

Geometrische Brownsche Bewegung

Exponentielle Prozesse

Martingal, alternativer Nachweis

Vasicek-Modell

Vasicek-Modell, Varianz

Plausibles

Vasicek-Modell Grenzverhalten

Stochastische Differentialgleichung lösen, typisches Vorgehen

Cox-Ingersoll-Ross-Modell

Eigene Kreation

Brownsche Brücke

Filtration

Bedingte Erwartung

Brownsche Bewegung, zufällige Fourierreihe

# Brownsche Bewegung Lévy-Konstruktion

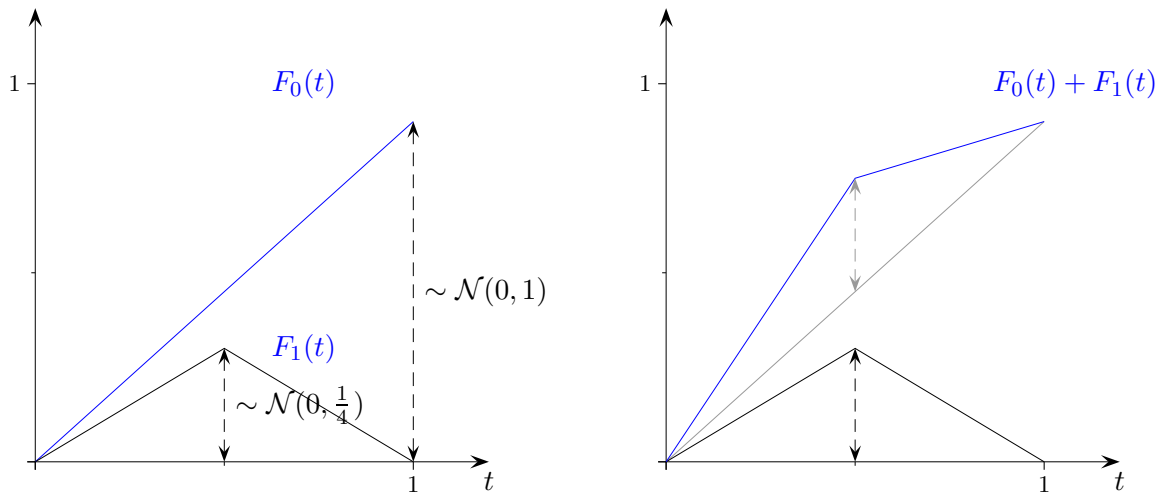
Ein stochastischer Prozess  $(B(t))_{t>0}$  ist eine Brownsche Bewegung (oder: Wienerprozess), wenn er folgende Eigenschaften hat:

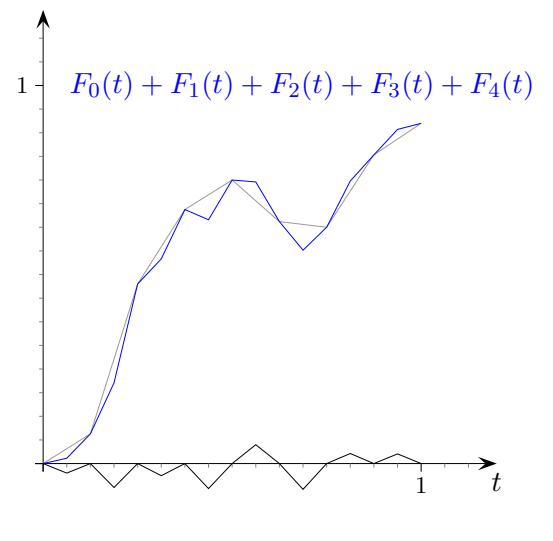
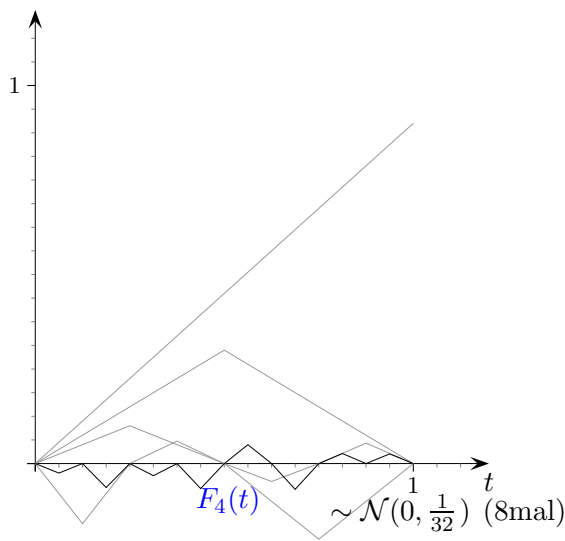
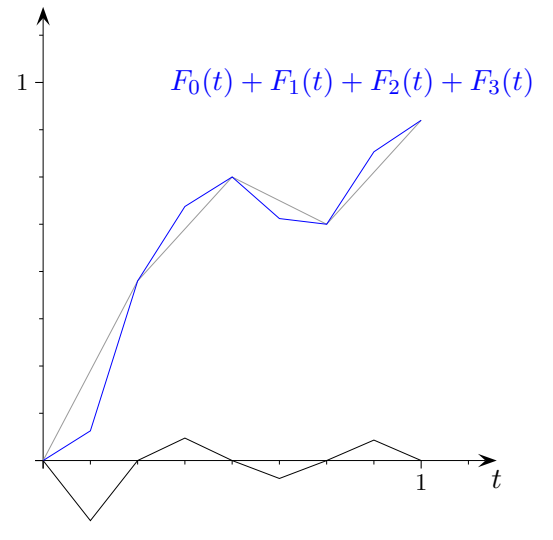
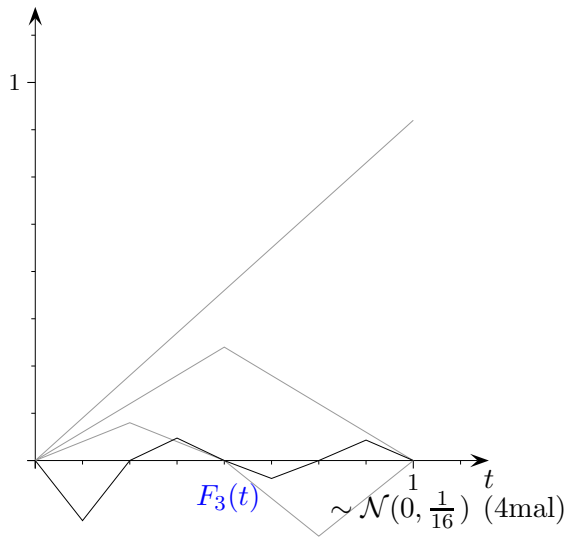
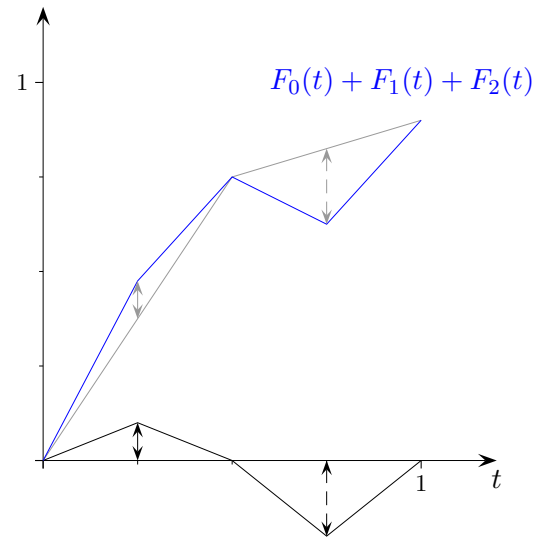
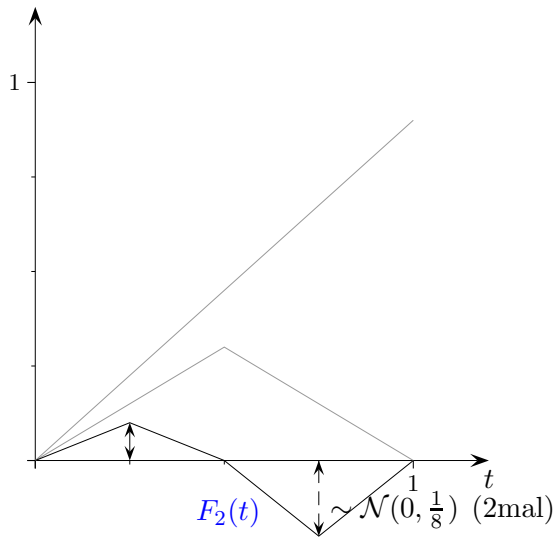
1.  $B(0) = 0$ ,
2.  $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  für  $0 \leq s < t$ ,
3.  $\{B(t_{i+1}) - B(t_i) \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k\}$  sind unabhängige Zufallsvariablen,  
alternativ:  $B(t_2) - B(t_1), B(t_4) - B(t_3)$  unabhängig für  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$
4.  $t \rightarrow B(t)$  ist (fast sicher) stetig auf  $[0, \infty[$ .

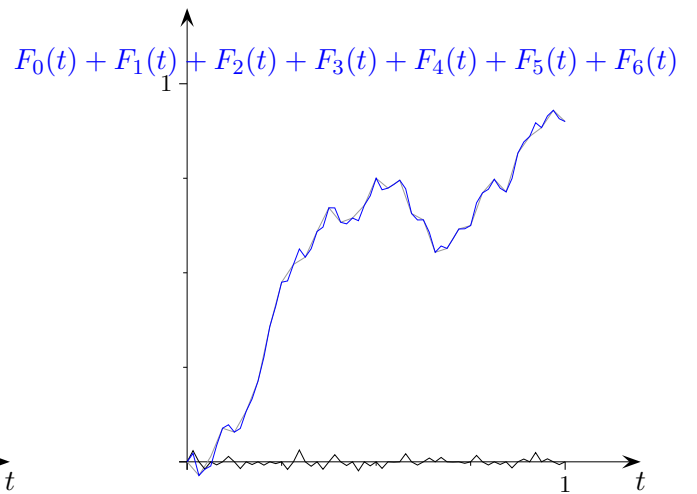
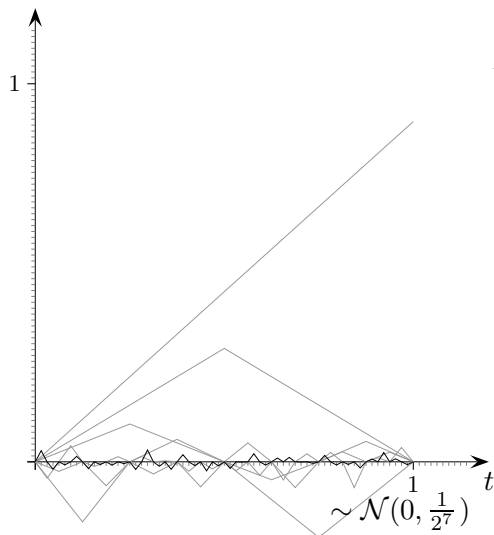
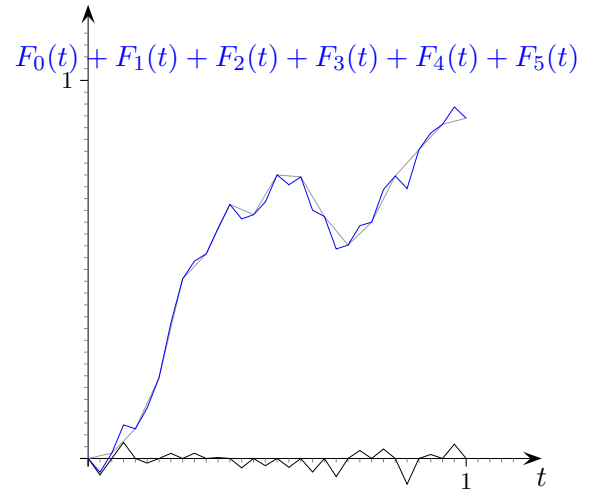
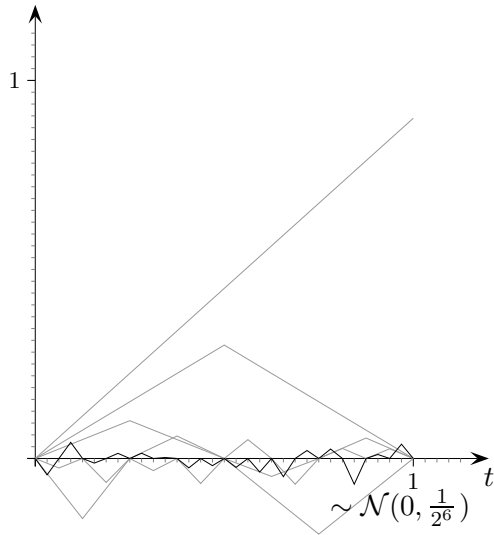
Die (einfache) Lévy-Konstruktion der Pfade dieses stochastischen Prozesses bringt uns die Definition nahe. Es genügt, die Konstruktion auf dem Intervall  $[0, 1]$  durchzuführen, da man sie auf jedem Intervall  $[k, k+1]$  wiederholen und bereits konstruierte Pfadstücke schrittweise verlängern kann.

Das Intervall  $[0, 1]$  wird halbiert, die beiden Hälften werden halbiert, usw.

An der Stelle  $t = 1$  (wir beginnen mit  $n = 0$ ) und den Halbierungsstellen werden schrittweise unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen definiert (siehe Abbildungen). Hierdurch ergeben sich jeweils mit den benachbarten Halbierungsstellen stückweise lineare, stetige Funktionen. Sie werden sukzessive addiert und konvergieren fast sicher gleichmäßig gegen einen Grenzprozess mit den genannten Eigenschaften.





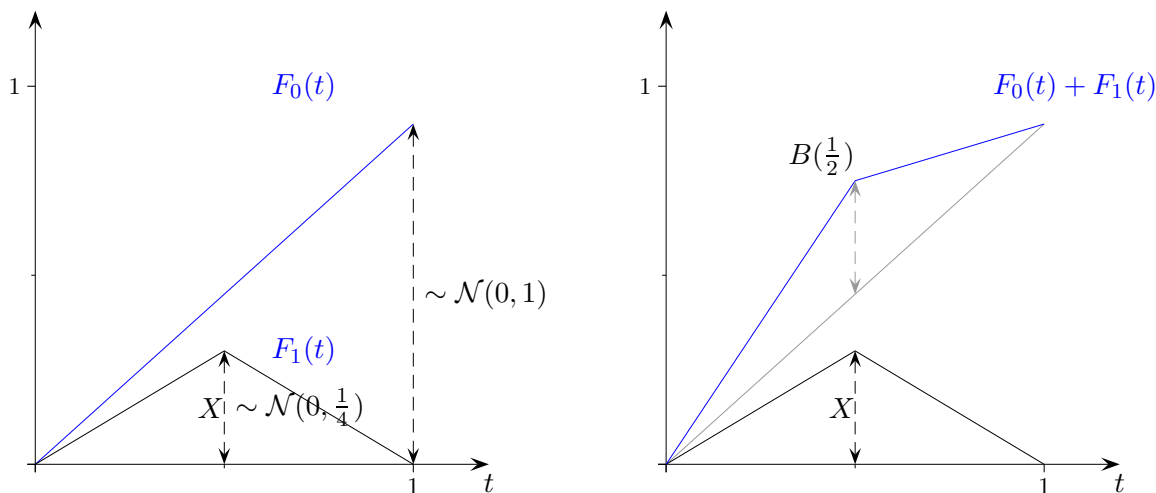


Die Halbierungsstellen können mit  $D_n = \{\frac{2k+1}{2^n} \mid k = 0, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ ,  $n \geq 1$  ermittelt werden.

Zu beachten ist, dass die Funktionswerte der Summenfunktionen an der Stelle  $t = 1$  und allen Halbierungsstellen gleich bleiben.

Alle Halbierungsstellen liegen dicht auf dem Intervall  $[0, 1]$ .

Um  $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  zu sehen, betrachte man das Vorgehen beim Konstruieren.



$$B\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}B(1)}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)} + \underbrace{X}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)} \quad (\text{Zufallsvariable})$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)}$$

Beachte hierbei:

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$$

Für die Summe zweier unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen addieren sich jeweils die Erwartungswerte und die Varianzen.

$$B\left(\frac{1}{4}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{8}\right)} + \underbrace{Y}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{8}\right)} \quad (\text{Zufallsvariable})$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)}$$

$$B(1) - B\left(\frac{1}{2}\right) = B(1) - \left(\frac{1}{2}B(1) + X\right) = \underbrace{\frac{1}{2}B(1)}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)} - \underbrace{X}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4}\right)}$$

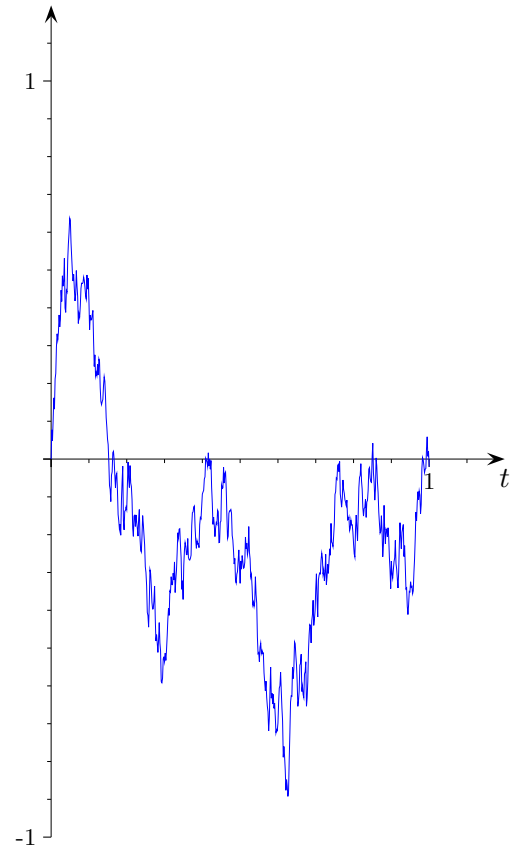
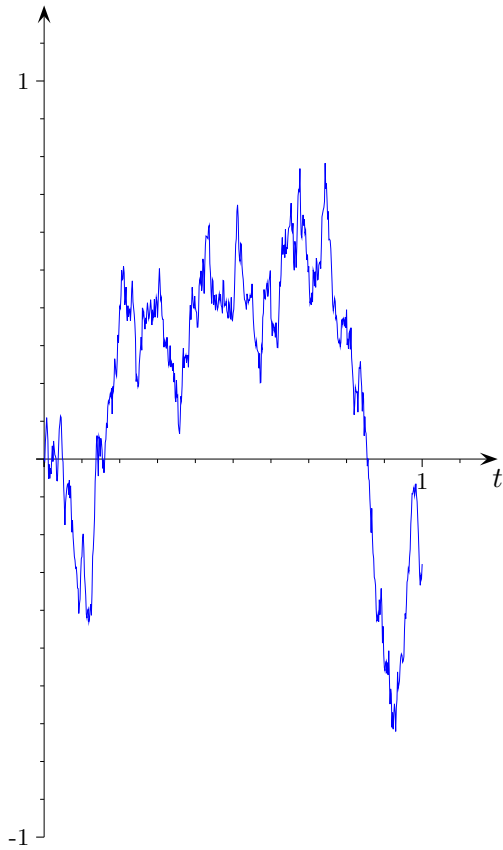
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)} \quad B(1), B\left(\frac{1}{2}\right) \text{ abhängig, } \text{Var}(-X) = \text{Var}(X)$$

Ich erspare es mir, diesen Sachverhalt allgemein aufzuschreiben.

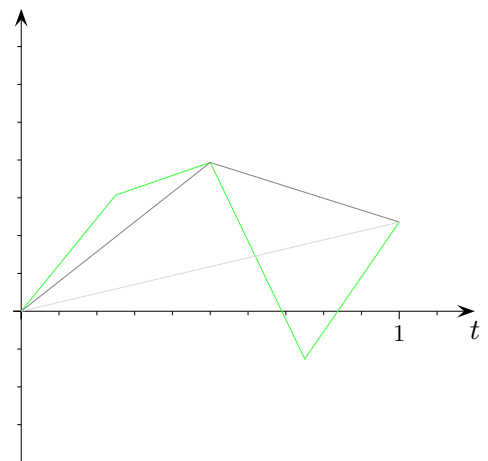
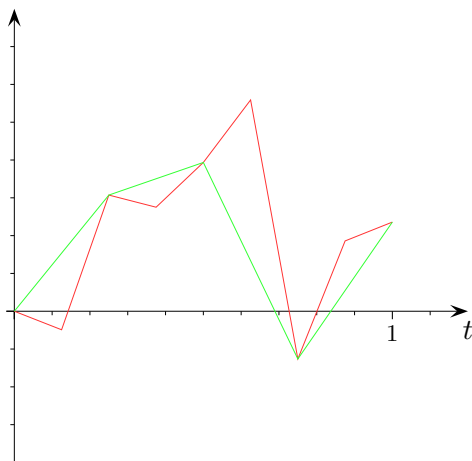
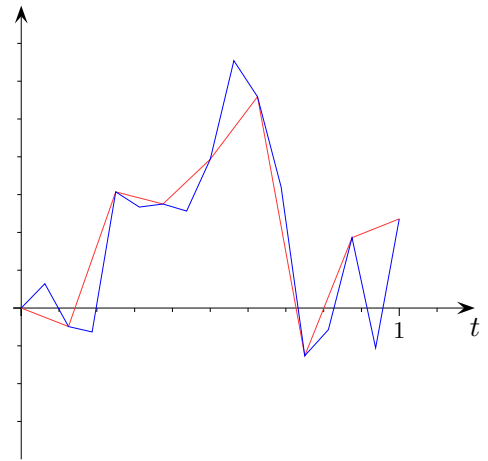
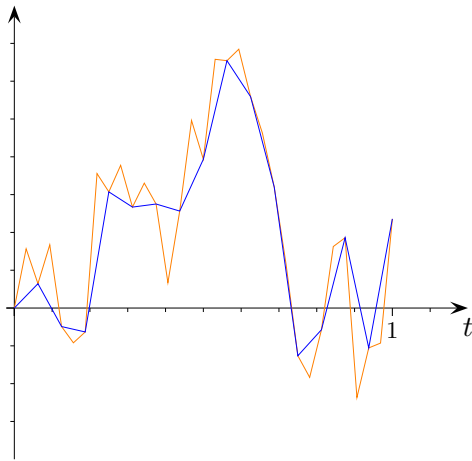
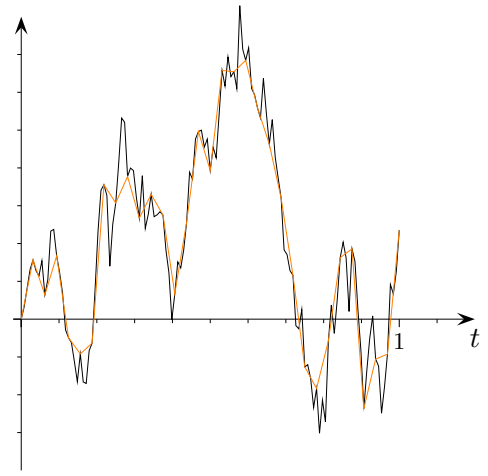
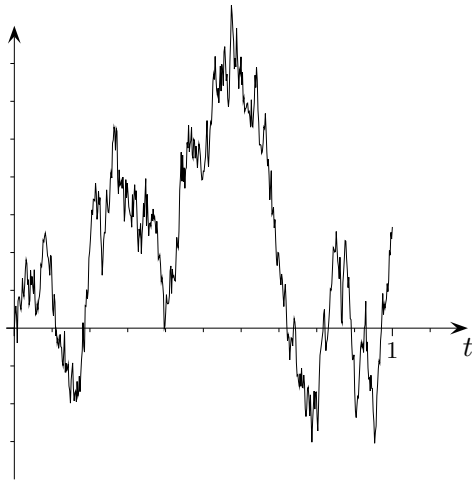
# Diskrete Näherung

$$B_0 = 0$$

$$B_n = B_{n-1} + \Delta B \quad \text{mit } \Delta B \sim \mathcal{N}(0, \Delta t), \quad \text{Varianz } \Delta t \\ \text{Schrittweite } \Delta t$$



# Diskrete Näherungen



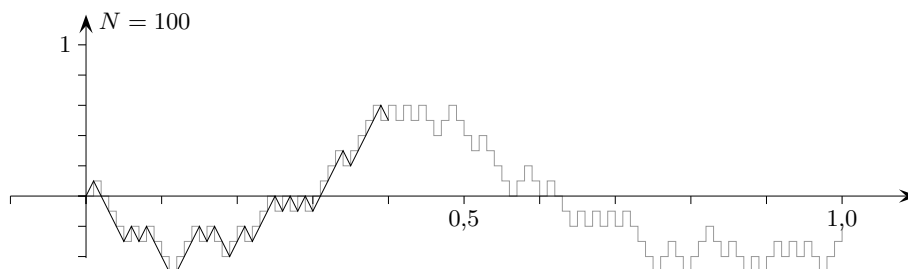
Die schrittweise Vergrößerung eines Pfades veranschaulicht die Idee der Lévy-Konstruktion, bei der die Reihenfolge umgekehrt wird.

# Quadratische Variation

Sei  $B(t)$  eine Brownsche Bewegung.

Für eine Zerlegungsfolge des Intervalls  $[0, t]$  gilt:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 = t$$



Für die diskreten Näherungen des Wiener-Prozesses ist diese Eigenschaft der quadratische Variation offensichtlich.

Wir beschränken uns auf das Intervall  $[0, 1)$  und zerlegen es in  $N$  gleiche Teile:

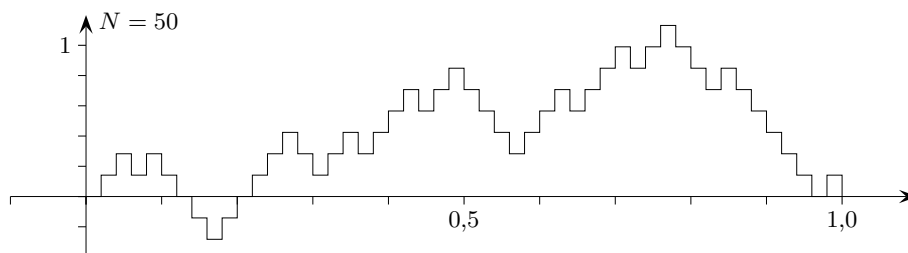
$$\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$X_1, X_2, X_3, \dots$  sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die die Werte  $\pm 1$  jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 annehmen.

Die Sprungweite wird soweit verkleinert, dass die Varianz jeweils  $\frac{1}{N}$  beträgt.

$$W_0 = 0$$

$$W_n = W_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{N}} X_n, \quad n \geq 1$$



Die Summe der  $N$  quadratischen Abweichungen ist offensichtlich 1.

Dies gilt auch für die stetigen Pfade auf  $[0, t]$  einer Brownsche Bewegung (Lévy).

Wegen  $B(t_{i+1}) - B(t_i) \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$  ist  $\text{Var}[B(t_{i+1}) - B(t_i)] = t_{i+1} - t_i$ .

Die Varianz ist der Erwartungswert der quadratischen Abweichungen (hier von null), d.h.

$$E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2] = t_{i+1} - t_i.$$

Die Summation liefert das Erwartete:  $E\left[\sum (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2\right] = t$

Es bleibt zu zeigen, dass die Varianz der Summe für  $\Delta t \rightarrow 0$  gegen null strebt, die Summe somit letztendlich nicht zufallsbedingt ist.



## Varianz der quadratischen Variation

Die Varianz jedes Summanden ist:

beachte  $\text{Var}[X] = E[X^2] - \mu^2$

$$\text{Var}[(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2] = \underbrace{E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))^4]}_{3(\Delta t)^2 \text{ Nachweis folgt}} - \underbrace{\left(E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2]\right)^2}_{(\Delta t)^2 \text{ siehe vorige Seite}} = 2(\Delta t)^2$$

und die Varianz der Summe (Summanden sind unabhängig):

$$\text{Var}\left[\sum (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2\right] = 2t\Delta t$$

Die Summation von  $(\Delta t)^2$  ergibt  $t\Delta t$  ( $\Delta t$  ausklammern).

Es bleibt nachzutragen, dass

$$E[X^4] = 3(\Delta t)^2 \quad \text{für } X \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$$

ist. Dies ist äquivalent zu:

$$E[X^4] = 3\sigma^4 \quad \text{für } X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Es genügt

$$E[X^4] = 3 \quad \text{für } X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

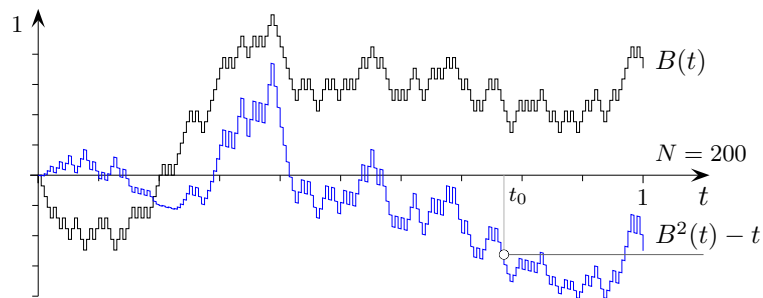
nachzuweisen.  $E[X^4]$  wird als 4. Moment bezeichnet. Beide Seiten sind dann mit  $\sigma^4$  zu multiplizieren.

$$E[X^4] = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{Dichte der Standardnormalverteilung}$$

Die Berechnung gelingt mit partieller Integration. Der Integrand ist geschickt zu zerlegen.

$$\begin{aligned} E[X^4] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot x \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= 3x^2 \cdot x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \underbrace{3x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{= 0 \text{ (Punktsymmetrie)}} + 3 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx}_{= 1 \text{ (Varianz)}} = 3 \end{aligned}$$

## Der Prozess $B^2(t) - t$



Die Brownsche Bewegung ist ein Martingal (siehe Wiener Prozess).

Für  $B^2(t)$  muss die Korrektur  $B^2(t) - t$  vorgenommen werden, damit diese Eigenschaft vorliegt.

Wir überzeugen uns zunächst von:

$$E[B^2(t) - t] = E[B^2(t)] - t = \text{Var}[B(t)] - t = 0$$

Desweiteren gilt ( $t > 0$ ):

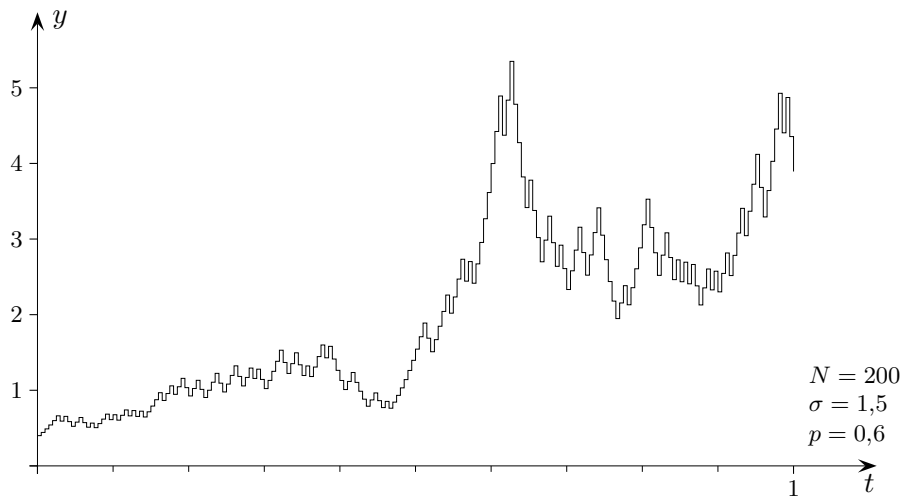
$$B^2(t_0 + t) = (B(t_0) + B(t))^2 = B^2(t_0) + 2B(t_0) \cdot B(t) + B^2(t) \quad \implies$$

$$E[B^2(t_0 + t)] = B^2(t_0) + t$$

Damit können wir unmittelbar die Martingal-Eigenschaft nachweisen:

$$E[B^2(t_0 + t) - (t_0 + t)] = B^2(t_0) - t_0$$

# Geometrische Brownsche Bewegung



Die geometrische Brownsche Bewegung wird als Modellierung für den Preisprozess von Aktien herangezogen. Dabei nimmt man vereinfachend an, dass die prozentuale Rendite über disjunkte Zeitintervalle unabhängig ist.

Sei  $X_1, X_2, X_3, \dots$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die die Werte  $\pm 1$  mit den Wahrscheinlichkeiten  $p$  und  $q = 1 - p$  annehmen.

Die diskrete Näherung für einen Wiener-Prozess kann mit

$$W_0 = 0$$

$$W_n = W_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{N}} X_n, \quad n \geq 1, \quad \text{Schrittweite } \Delta t = \frac{1}{N}$$

erzeugt werden.

Für die geometrische Brownsche Bewegung gilt dann:

$$S_0 = \text{Anfangswert}$$

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} X_n = \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} X_n\right) S_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad \text{Schrittweite } \Delta t = \frac{1}{N}$$

Die explizite Darstellung des Prozesses lautet:  $S(t) = S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)}$

Das kann in einfacher Weise mit der Abschätzung  $\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$  gezeigt werden.

Für  $k$  gilt:

$$S\left(\frac{k}{N}\right) = S_0 \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} X_1\right) \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} X_2\right) \dots \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} X_k\right)$$

$$\implies \ln S\left(\frac{k}{N}\right) = \ln S_0 + \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}} X_i - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{N}\right) \quad \text{beachte } X_i^2 = 1$$

$$= \ln S_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}} X_i\right)}_{\sigma W\left(\frac{k}{N}\right)} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{k}{N} \quad \text{entlogarithmieren, } t = \frac{k}{N}$$

□

## Geometrische Brownsche Bewegung

Die explizite Darstellung des Prozesses lautet also:  $S(t) = S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)}$

Der Logarithmus  $\ln \frac{S(t)}{S_0} = -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t)$  ist ein Wiener Prozess mit Drift.

$$\ln \frac{S(t)}{S_0} \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t, \sigma^2 t\right)$$

kann leicht erkannt werden.

$$E\left[\ln \frac{S(t)}{S_0}\right] = E\left[\underbrace{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}_{-\frac{1}{2}\sigma^2 t} + \underbrace{E[\sigma W(t)]}_0\right]$$

$$\text{Var}\left[\ln \frac{S(t)}{S_0}\right] = \underbrace{\text{Var}\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 t\right]}_0 + \underbrace{\text{Var}[\sigma W(t)]}_{\sigma^2 t}$$

Wir betrachten (noch einmal) die Gleichung eines zufällig gestörten exponentiellen Wachstums,

$$dX_t = aX_t dt + \sigma X_t dB_t = X_t(a dt + \sigma dB_t)$$

wenden auf den Ansatz  $X_t = f(t, B_t) = x_0 \exp(\lambda t + \sigma B_t)$  die Itô-Formel

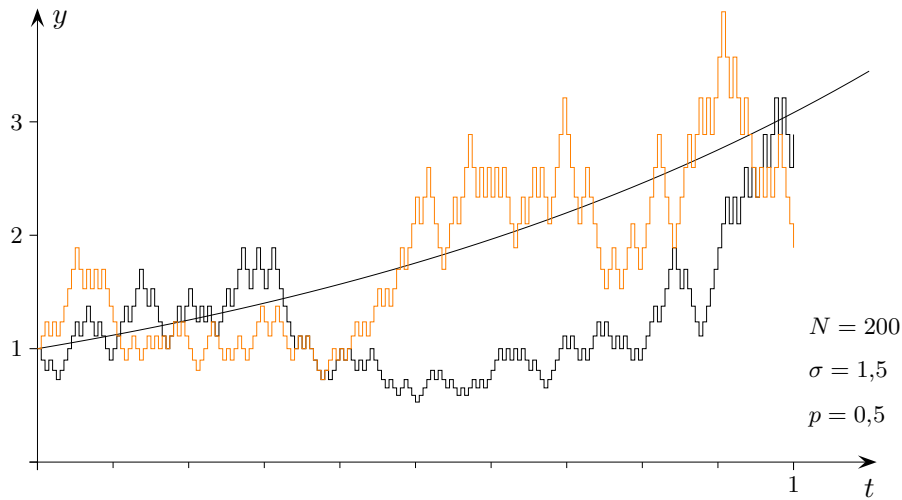
$$dX_t = f_x(t, B_t) dB_t + f_t(t, B_t) dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) dt \quad \text{an}$$

$$\begin{aligned} dX_t &= x_0 \sigma \exp(\lambda t + \sigma B_t) dB_t + x_0 \lambda \exp(\lambda t + \sigma B_t) dt + \frac{1}{2} x_0 \sigma^2 \exp(\lambda t + \sigma B_t) dt \\ &= \sigma X_t dB_t + \lambda X_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t dt \\ &= \left(\frac{1}{2} \sigma^2 + \lambda\right) X_t dt + \sigma X_t dB_t \end{aligned}$$

und erhalten für  $\frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda = a$  eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung:

$$X_t = x_0 \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)$$

# Exponentielle Prozesse



Für  $B_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  gilt  $E[e^{\sigma B_1}] = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$ .

$$\begin{aligned}
 E[e^{\sigma B_1}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
 &= e^{\frac{\sigma^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma)^2} dx}_{1} = e^{\frac{\sigma^2}{2}}
 \end{aligned}$$

Für  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$  folgt direkt  $E[e^{\sigma B_t}] = e^{\frac{\sigma^2}{2}t}$  (beachte  $B_t = \sqrt{t} \cdot B_1$ ).

Diesen Erwartungswert hatten wir schon mit der Itô-Integration erhalten, siehe Wiener-Prozess.

Eine weitere Folgerung:  $e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t}$  ist ein Martingal.

$$\begin{aligned}
 E[e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t_0+t) + \sigma B_{t_0+t}}] &= e^{-\frac{\sigma^2}{2}t_0 + \sigma B_{t_0}} \cdot \underbrace{E[e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t}]}_{e^{-\frac{\sigma^2}{2}t} \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}t} = 1}
 \end{aligned}$$

## Martingal, alternativer Nachweis

$$dX_t = f_t(t, B_t)dt + f_x(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, B_t)dt, \quad X_0 = x_0$$

$$\iff X_t = x_0 + \int_0^t f_t(s, B_s)ds + \int_0^t f_x(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, B_s)ds$$

Es sei noch einmal (siehe Wiener-Prozess) an den Zusammenhang erinnert.  
Die stochastische Differenzialgleichung beinhaltet, wie diskrete Näherungen erzeugt werden:

$$X_0 = x_0$$

$$\Delta X_n = f_t(t_n, B_n)\Delta t + f_x(t_n, B_n)\Delta B_n + \frac{1}{2}f_{xx}(t_n, B_n)\Delta t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t_n = t_{n-1} + \Delta t$$

$$B_n = B_{n-1} + \Delta B$$

Die Addition der jeweils linken und rechten Seiten ergeben Näherungen für die Integrale, insbesondere wird klar, was unter

$$\int_0^t f_x(s, B_s)dB_s$$

verstanden werden muss.

Unter schwachen Voraussetzungen ist  $\int_0^t f_x(s, B_s)dB_s$  ein Martingal.

$$\text{beachte: } E\left[\sum g(i)(B_{i+\Delta x} - B_i)\right] = \sum g(i) \underbrace{E[(B_{i+\Delta x} - B_i)]}_0 = 0$$

Dies trifft dann auch für  $X_t$  zu, wenn die Funktion  $f(t, x)$  die Bedingung  $f_t = -\frac{1}{2}f_{xx}$  erfüllt.

Wir rechnen nach:

$$X(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B(t)}$$

$$f(t, x) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma x}$$

$$f_t = -\frac{\sigma^2}{2}f, \quad f_{xx} = \sigma^2 f$$

$$X(t) = B^2(t) - t$$

$$f(t, x) = x^2 - t$$

$$f_t = -1, \quad f_{xx} = 2$$

$$X(t) = B^3(t) - 3tB(t), \quad f(t, x) = x^3 - 3tx, \quad \dots$$

$$X(t) = B^4(t) - 6tB^2(t), \quad f(t, x) = x^4 - 6tx^2, \quad \dots$$

$$X(t) = e^{\frac{t}{2}} \cos(B(t)), \quad \dots$$

Für die diskreten Näherungen gilt:

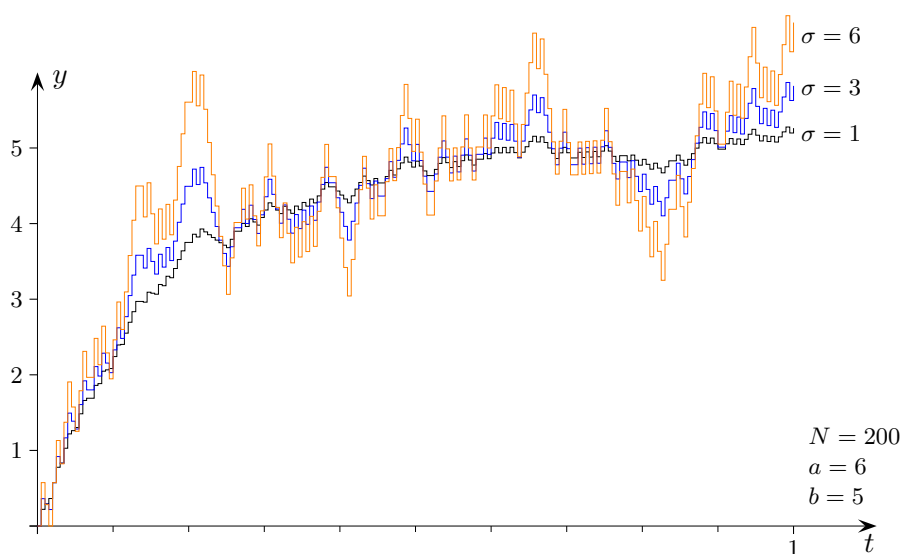
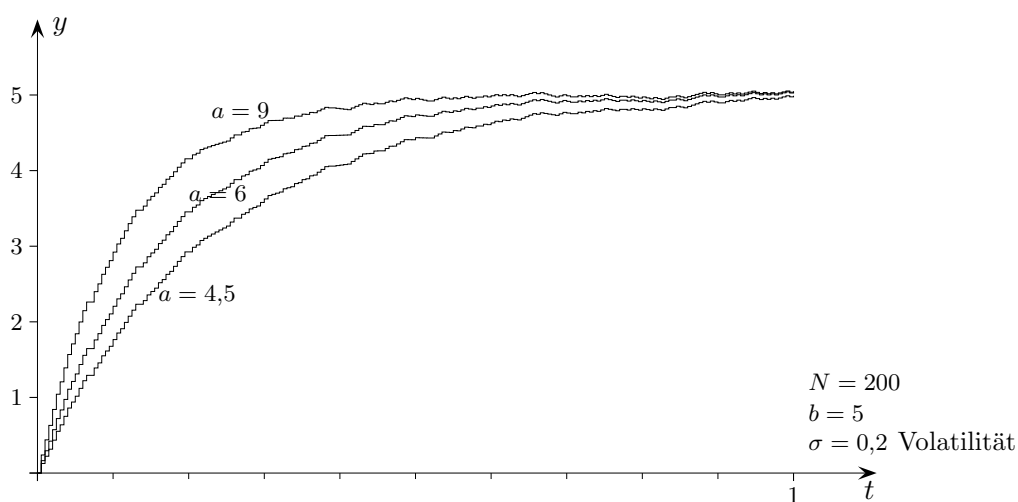
$R_0 =$  Anfangswert

$$R_n = R_{n-1} + a(b - R_{n-1})\Delta t + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} X_n, \quad n \geq 1, \quad \text{Schrittweite } \Delta t = \frac{1}{N}$$

$X_1, X_2, X_3, \dots$  ist eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die die Werte  $\pm 1$  jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 annehmen.

Die stochastische Differentialgleichung lautet somit (siehe Wiener Prozess):

$$dR(t) = a(b - R(t))dt + \sigma dB(t)$$



Hier wird ein begrenztes Wachstum mit stochastischen Abweichungen überlagert. Die Bedeutung der Parameter ist unmittelbar ersichtlich. Es verwundert daher nicht, dass gilt:  $E[R(t)] = b - (b - R(0))e^{-at}$

## Vasicek-Modell, Varianz

Die Integraldarstellung der stochastischen Differentialgleichung

$$dR_t = a(b - R_t)dt + \sigma dB_t$$

lautet:

$$R_t = R_0 + \int_0^t a(b - R_s) ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

$$R_t = b + e^{-at}(R_0 - b) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s \quad \text{beachte: } b + e^{-at}(R_0 - b) = b - (b - R_0)e^{-at}$$

Zum Nachweis werden wir zweimal substituieren.

Mit  $Y_t = R_t - b$  verschieben wir den Prozess und erhalten:

$$dY_t = -aY_t dt + \sigma dB_t, \quad Y_0 = R_0 - b$$

Wir setzen  $Z_t = e^{at}Y_t$ ,  $Z_0 = R_0 - b$ .

$$\begin{aligned} dZ_t &= ae^{at}Y_t dt + e^{at}dY_t && \text{allgemeinere It\^o-Formel angewendet, erinnert an Produktregel} \\ &= ae^{at}Y_t dt + e^{at}(-aY_t dt + \sigma dB_t) \\ &= e^{at}\sigma dB_t \end{aligned}$$

$$Z_t = R_0 - b + \sigma \int_0^t e^{as} dB_s$$

$$Y_t = e^{-at}(R_0 - b) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s$$

$$R_t = b + e^{-at}(R_0 - b) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s$$

Mit  $E\left[\int_0^t f(s) dB_s\right] = 0$  erhalten wir den schon vermuteten Erwartungswert und mit

$$E\left[\left(\int_0^t f(s) dB_s\right)^2\right] = \int_0^t (f(s))^2 ds \quad (\text{It\^o-Isometrie } *) \text{ die Varianz.}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[R_t] &= \sigma^2 \text{Var}\left[\int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s\right] && \text{Die Varianz der \u00fcbrigen Terme ist nat\u00fcrlich null.} \\ &= \sigma^2 E\left[\left(\int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s\right)^2\right] \stackrel{*}{=} \sigma^2 \int_0^t (e^{-a(t-s)})^2 ds && \text{Var}[X] = E[X^2] - \mu^2, \text{ hier } \mu = 0 \\ &= \sigma^2 \left[\frac{e^{2as-2at}}{2a}\right]_0^t \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2at}}{2a}\right) \end{aligned}$$



## Plausibles

$$E \left[ \int_0^t f(s) dB_s \right] = 0$$

$$E \left[ \left( \int_0^t f(s) dB_s \right)^2 \right] = \int_0^t (f(s))^2 ds \quad \text{It\^o-Isometrie}$$

Diese Sachverhalte sind für Treppenfunktionen bei Kenntnis der Brownschen Bewegung, des It\^o-Integrals und der zugehörigen Näherungen unmittelbar einsehbar.

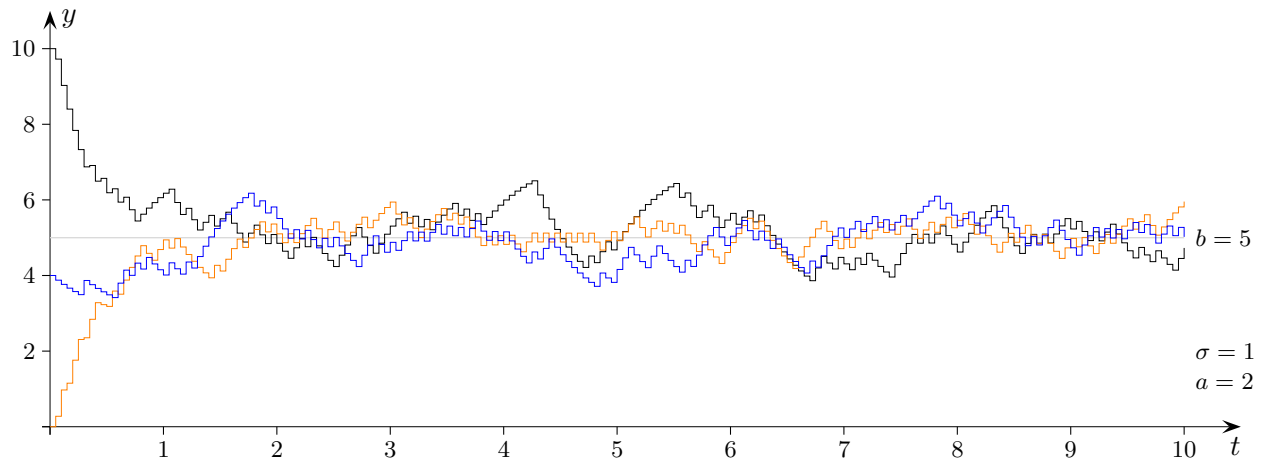
$$E \left[ \int_0^t f(s) dB_s \right] \approx E \left[ \sum f(i) (W_{i+\Delta x} - W_i) \right] = \sum f(i) \underbrace{E[(W_{i+\Delta x} - W_i)]}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \int_0^t f(s) dB_s \right)^2 \right] &= \text{Var} \left[ \int_0^t f(s) dB_s \right] \approx \text{Var} \left[ \sum f(i) (W_{i+\Delta x} - W_i) \right] \\ &= \sum (f(i))^2 \underbrace{\text{Var}[(W_{i+\Delta x} - W_i)]}_{\Delta x} \approx \int_0^t (f(s))^2 ds \end{aligned}$$

Für Treppenfunktionen  $t_n$  gilt unter geringen Voraussetzungen:

$$t_n \longrightarrow f \quad \Longrightarrow \quad \int_0^t t_n(s) dB_s \longrightarrow \int_0^t f(s) dB_s$$

# Vasicek-Modell Grenzverhalten



$$E[R_t] = b + e^{-at}(R_0 - b)$$

$$\text{Var}[R_t] = \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2at}}{2a} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[R_t] = b$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[R_t] = \frac{\sigma^2}{2a}$$

Das Zusammenziehen des Prozesses auf den langfristigen Mittelwert ist der Integralform

$$R_t = b + e^{-at}(R_0 - b) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s$$

abzulesen. Der Term  $e^{-at}$  reduziert die Diffusion.

# Stochastische Differentialgleichung lösen, typisches Vorgehen

Die stochastische Vasicek-Differentialgleichung

$$dR_t = a(b - R_t)dt + \sigma dB_t$$

soll direkt mit dem Ansatz  $f(t, x) = e^{at}(b - x)$  und der allgemeineren Itô-Formel

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)\dots$$

gelöst werden.

Die beiden Substitutionen  $Y_t = R_t - b$ ,  $Z_t = e^{at}Y_t$  werden hier also zusammengefasst.

Es ist  $f_t(t, x) = af(t, x)$ ,  $f_x(t, x) = -e^{at}$ ,  $f_{x,x}(t, x) = 0$ .

$$\begin{aligned}df(t, R_t) &= f_t(t, R_t)dt + f_x(t, R_t)dR_t \\ &= ae^{at}(b - R_t)dt - e^{at}a(b - R_t)dt - e^{at}\sigma dB_t \\ &= -e^{at}\sigma dB_t\end{aligned}$$

In der Integralschreibweise liest sich dieses Ergebnis so:

$$e^{at}(b - R_t) = b - R_0 - \int_0^t e^{as}\sigma dB_s$$

und nach  $R_t$  aufgelöst:

$$R_t = b + e^{-at}(R_0 - b) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s$$

# Cox-Ingersoll-Ross-Modell 1985

Für die diskreten Näherungen dieses Wurzel-Diffusionsprozesses gilt:

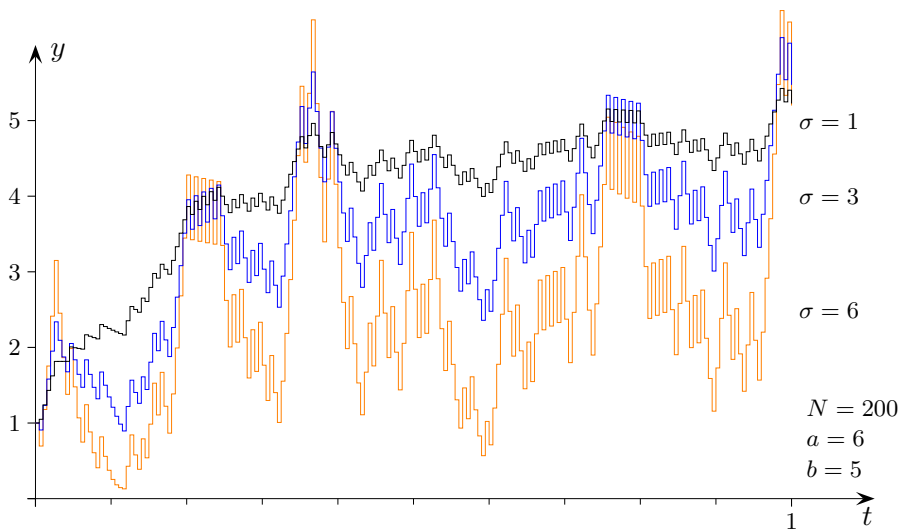
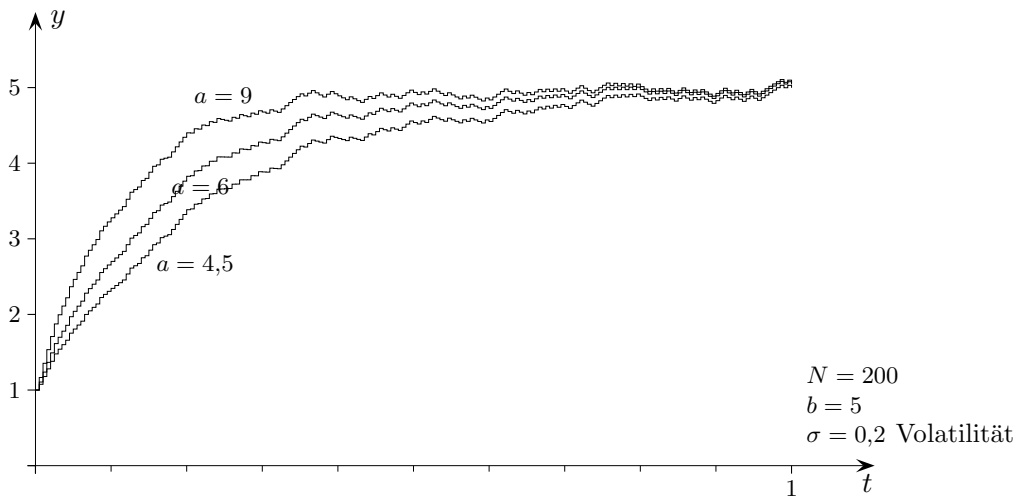
$$R_0 = \text{Anfangswert}$$

$$R_n = R_{n-1} + a(b - R_{n-1})\Delta t + \sqrt{R_{n-1}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} X_n, \quad n \geq 1, \quad \text{Schrittweite } \Delta t = \frac{1}{N}$$

$X_1, X_2, X_3, \dots$  ist eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die die Werte  $\pm 1$  jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 annehmen.

Die stochastische Differentialgleichung lautet somit:

$$dR(t) = a(b - R(t))dt + \sigma\sqrt{R(t)}dB(t)$$

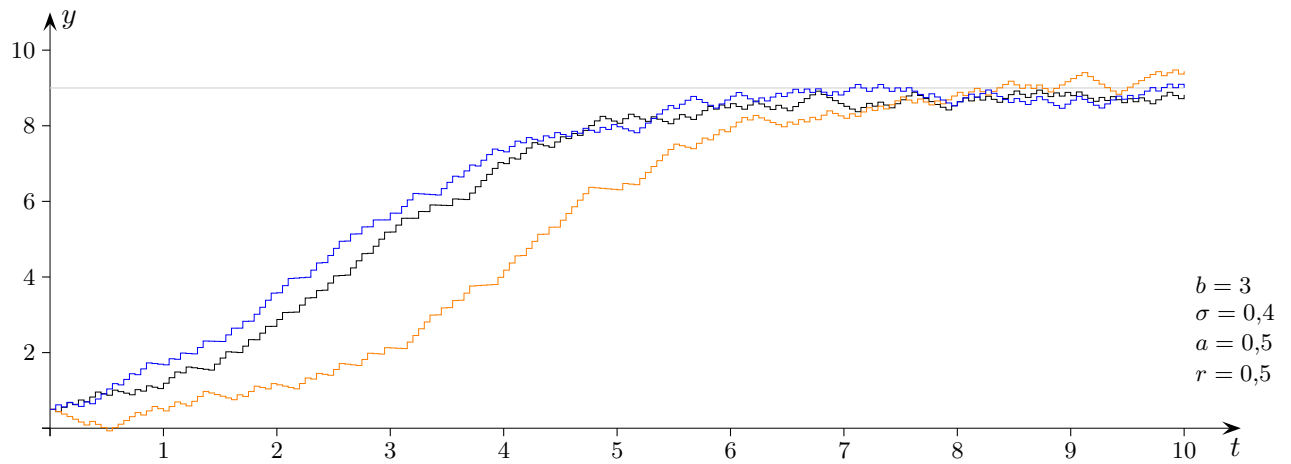


Wie beim Vasicek-Modell wird ein begrenztes Wachstum mit stochastischen Abweichungen überlagert. Auch hier gilt:  $E[R(t)] = b - (b - R(0))e^{-at}$

# Eigene Kreation

stochastische Differentialgleichung:

$$dR_t = a(b - |R_t|^r)R_t dt + \sigma dB_t$$

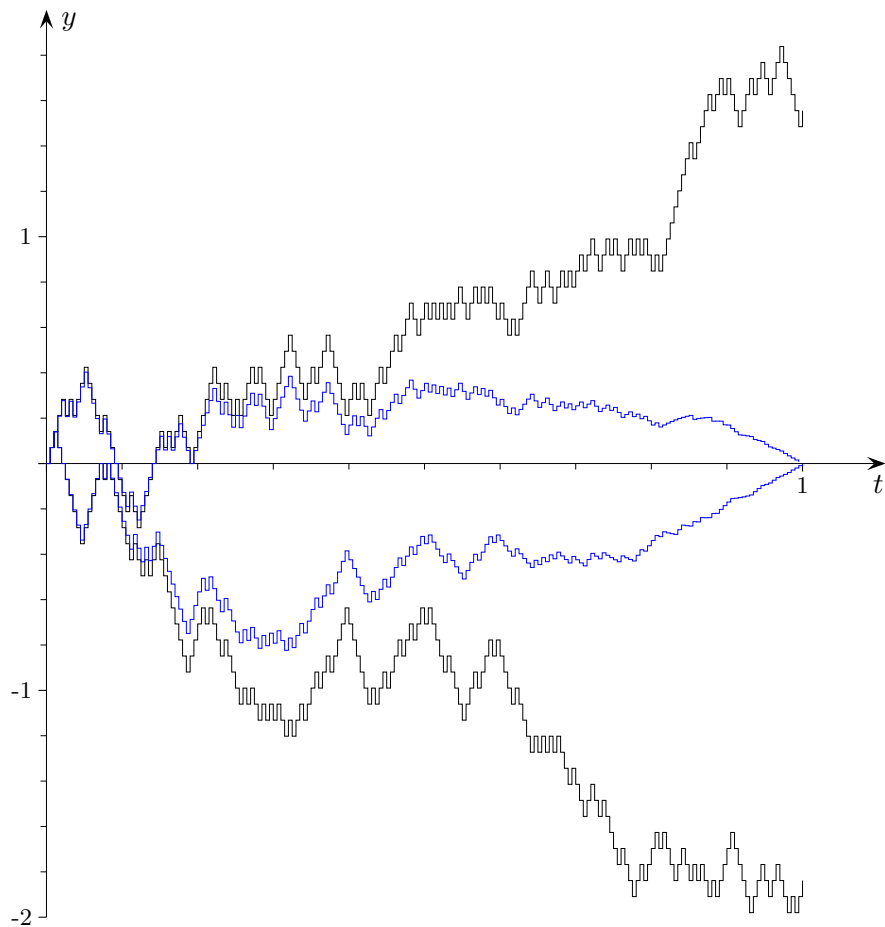


$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[R_t] = b^{\frac{1}{r}} \quad \text{für } R_t > 0$$

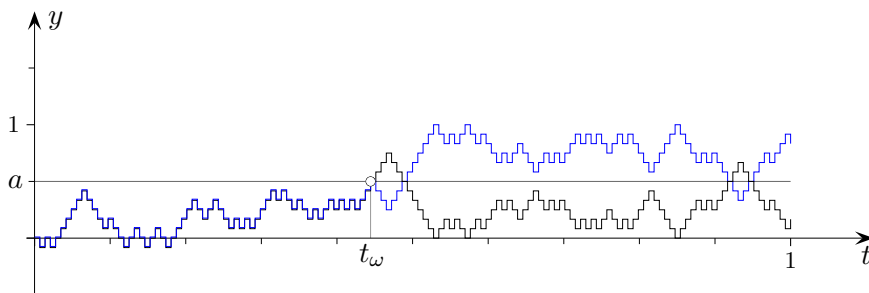
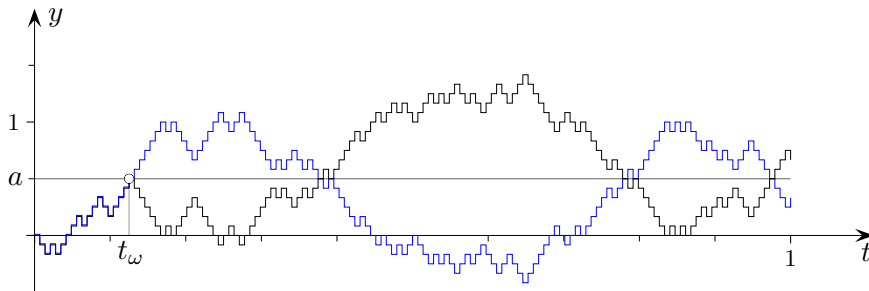
# Brownsche Brücke

$$X_t = X_0 + B_t - \frac{t}{T}(X_0 + B_t - X_T)$$

Für das Intervall  $[0, T]$  werden die Funktionswerte für 0 und  $T$  durch  $X_0$  und  $X_T$  festgelegt. Der Prozess  $X_t$  überbrückt Anfangs- und Endpunkt.



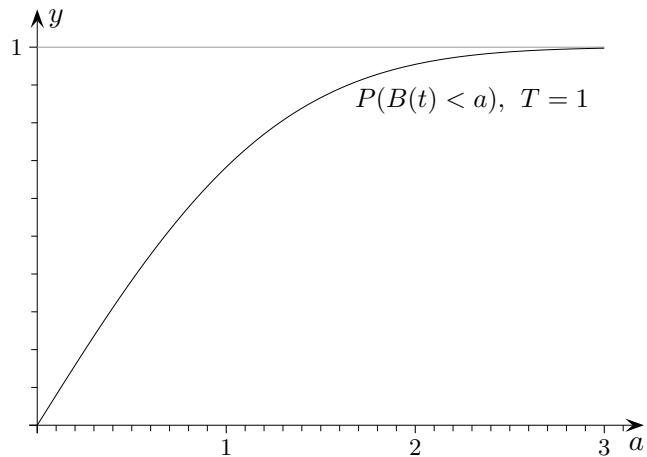
# Spiegelungsprinzip



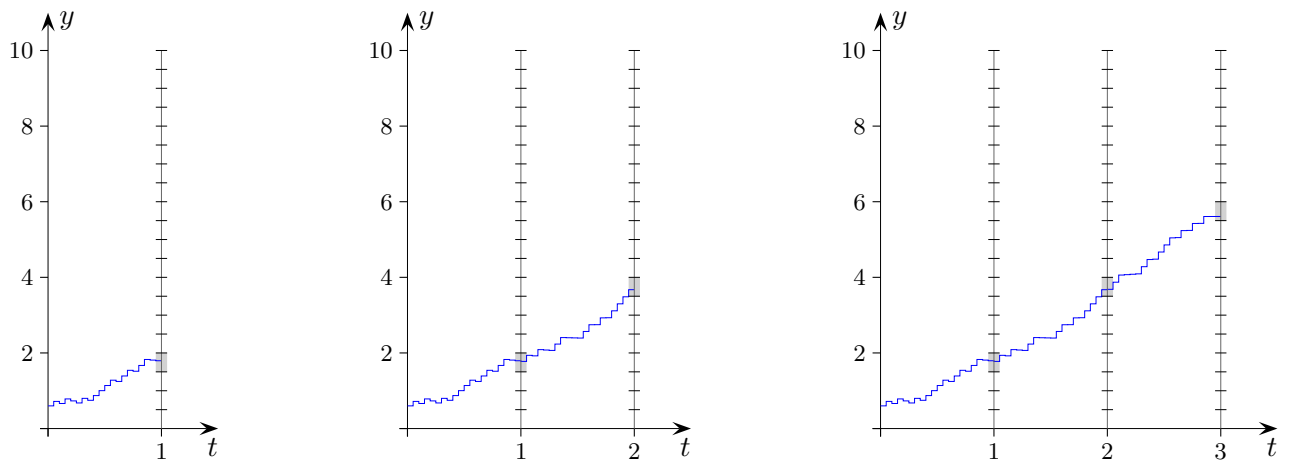
Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt die Brownsche Bewegung im Bereich  $0 \leq t \leq T$  unterhalb einer Grenze  $a$ ? Oder wir betrachten für das Gegenereignis alle Pfade  $\omega$ , die auf die Grenze  $a$  treffen. Sei  $t_\omega$  der Zeitpunkt des erstmaligen Auftreffens. Für einen Pfad gehört auch seine Spiegelung an  $a$  für  $t_\omega \leq t$  als Fortsetzung zum Gegenereignis. Die Pfade treten also in dieser Weise stets paarweise auf, für jeweils einen Pfad gilt  $\omega(T) \geq a$ . Somit gilt:

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} B(t) \geq a\right) = 2P(B(t) \geq a) = P(|B(T)| \geq a) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right), \quad \sigma = \sqrt{T}$$

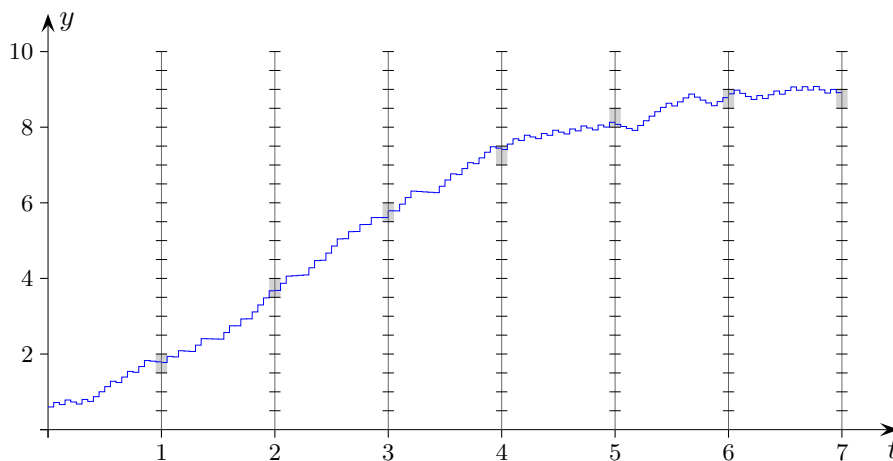
$$P(B(t) < a) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1$$



## Filtration (auch Filtrierung, Filterung)



Wir wollen die Kursentwicklung einer Aktie, allgemeiner den sich entwickelnden Pfad eines stochastischen Prozesses, bis zum Zeitpunkt  $t_7 = 7$  beobachten (, um den weiteren Verlauf, bzw. einen Erwartungswert, abzuschätzen). Es steht uns frei, alle Zwischenwerte oder nur diejenigen zu bestimmten Zeitpunkten, z. B.  $t_1, t_2, \dots, t_7$  zu verwenden. Es könnten auch Intervalle zu den Zeitpunkten  $t_1, t_2, \dots, t_7$  ausreichen, um Informationen über den Verlauf festzuhalten. Die Abbildungen zeigen diese Art der Filtrierung.



Sei  $\Omega$  die Menge aller möglichen Pfade. Zum Zeitpunkt  $t_1$  ist die Teilmenge (Zylindermenge) bekannt, deren Pfade durch das eingezeichnete Intervall laufen. Zum Zeitpunkt  $t_2$  ist eine weitere Teilmenge von  $\Omega$  bekannt. Zum Zeitpunkt  $t_2$  soll die Information (die Teilmenge) von  $t_1$  hinzugenommen werden. Der Durchschnitt beinhaltet die Pfade, die durch beide Intervalle verlaufen, und so geht es weiter. Wir erhalten ein aufsteigendes Mengensystem, das den bisherigen Verlauf (grob) beinhaltet. Für jedes Intervall liegt zum Zeitpunkt  $t_7$  fest, ob der Pfad hindurchläuft. Im allgemeinen Fall werden statt Mengen disjunkter Intervalle Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{A}$ , der  $\sigma$ -Algebra von  $\Omega$ , verwendet.

Eine aufsteigende Folge von  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1} \subset \dots \subset \mathcal{A}$  heißt Filtration.



# Bedingte Erwartung

Wir stehen vor einem Glücksrad, das mit gleichen Wahrscheinlichkeiten die Ergebnisse 1 und  $-1$  erzeugt, und sind an der Ergebnissumme  $X_{15}$  nach 15 Drehungen interessiert.

Der Erwartungswert ist natürlich null. Wir beginnen zu drehen.

Wenn z.B. nach 5 Drehungen die Summe  $X_5 = 3$  bekannt ist, würden wir den Erwartungswert auf 3 anpassen. Je mehr Drehungen erfolgt sind, umso genauer kann die endgültige Summe abgeschätzt werden. Es liegt ein Martingal vor. Möglich wäre, dass wir das Drehen nicht selbst durchführen und nur die Zwischenergebnisse  $X_4, X_8, X_{12}$  erfahren. Mathematisch liegt dann eine andere Filtration vor. Es ist offensichtlich, dass die bedingte Erwartung von der Filtration (vorhandene Information) abhängig ist.

## Stoppzeiten und Filtration

Für einen stochastischen Prozess sind viele Stoppregeln denkbar.

Man kann zu einem Zeitpunkt stoppen, an dem der Prozess einen bestimmten Wert überschreitet oder man stoppt (optimal), wenn ein Erwartungswert nur kleiner werden kann. Mit der Festlegung einer Stoppregel ist eine Zufallsvariable, genannt Stoppzeit, gegeben, die jedem Pfad den Zeitpunkt des Stoppens zuordnet. In die Definition dieser Zufallsvariablen fließen einige offensichtliche Beschränkungen für Stoppregeln ein.

Zu jedem Beobachtungszeitpunkt muss aufgrund der in der zurückliegenden Zeit gesammelten Informationen entschieden werden können - hellseherische Fähigkeiten sollen unberücksichtigt bleiben -, ob die Regel ein Stoppen vorschreibt.

Das Bestreben, mathematische Definitionen möglichst allgemein zu formulieren, um die logischen Abhängigkeiten klarer aufzudecken und eine möglichst breite Anwendung zu ermöglichen, kann dazu führen, dass bei der ersten Kenntnisnahme der Wald vor Bäumen nicht gesehen wird.

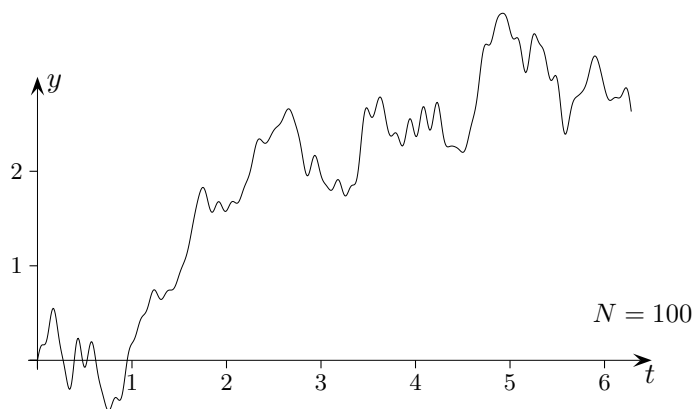
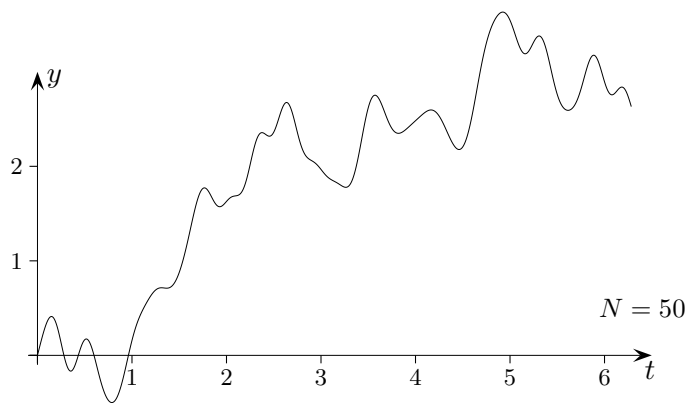
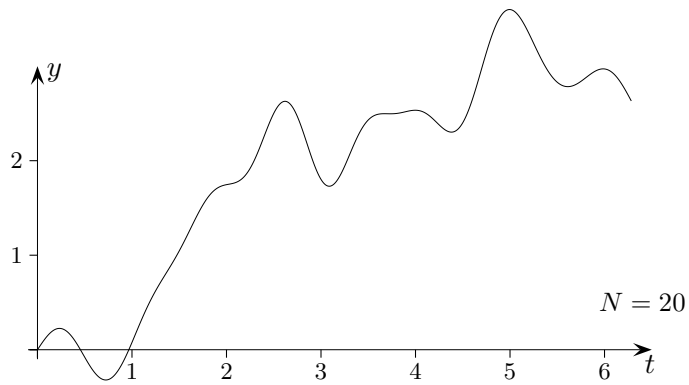
Der Sinn der folgenden Definition kann nun ergründet werden.

Sei  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Filtration auf  $\Omega$ .

Eine Abbildung  $T: \omega \mapsto \mathbb{N}$  heißt Stoppzeit bezüglich der Filtration, wenn  $\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

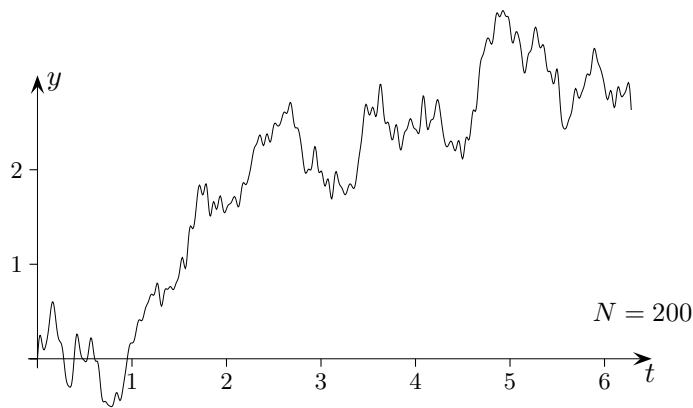
# Brownsche Bewegung, zufällige Fourierreihe

$$B(t) = 1,05 \cdot \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + 0,96 \cdot \frac{\sin(1 \cdot \frac{t}{2})}{1} - 0,53 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \frac{t}{2})}{2} + 0,1 \cdot \frac{\sin(3 \cdot \frac{t}{2})}{3} - 1,66 \cdot \frac{\sin(4 \cdot \frac{t}{2})}{4} \dots$$

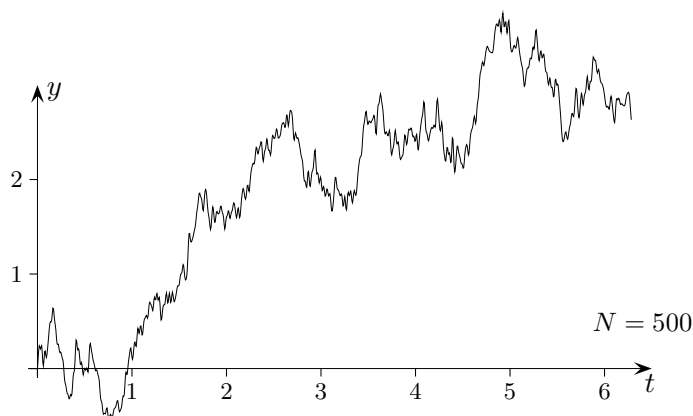


## Brownsche Bewegung, zufällige Fourierreihe

$$B(t) = Z_0 \cdot \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \cdot \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{n} \quad \text{für } t \in [0, 2\pi], \quad Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



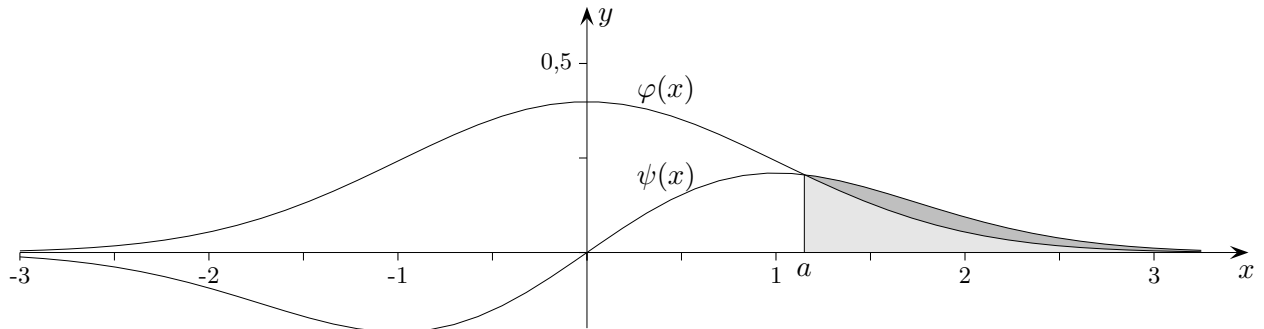
Bei Vergrößerung von  $N$  erhält man Verfeinerungen des gleichen zufälligen Pfades. Die Begründung erfolgt mit funktionalanalytischen Mitteln.



Um für den Stetigkeitsnachweis  $Z_n$  abzuschätzen, benötigen wir das Folgende.

$$P(|X| \geq a)$$

Sei  $X$  standardnormalverteilt.



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{a} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Schnittstelle  $x = a$

$\varphi(x) \leq \psi(x)$  für  $a \leq x$

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} \int_a^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} \left[ -e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_a^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} e^{-\frac{1}{2}a^2} \end{aligned}$$

$0 < a$

$$\begin{aligned} P(|X| \geq a) &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} e^{-\frac{1}{2}a^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} e^{-\frac{1}{2}a^2} \end{aligned}$$

Siehe auch: [Wiener-Prozess](#)  
[Startseite](#)