Legendre-Polynome

Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

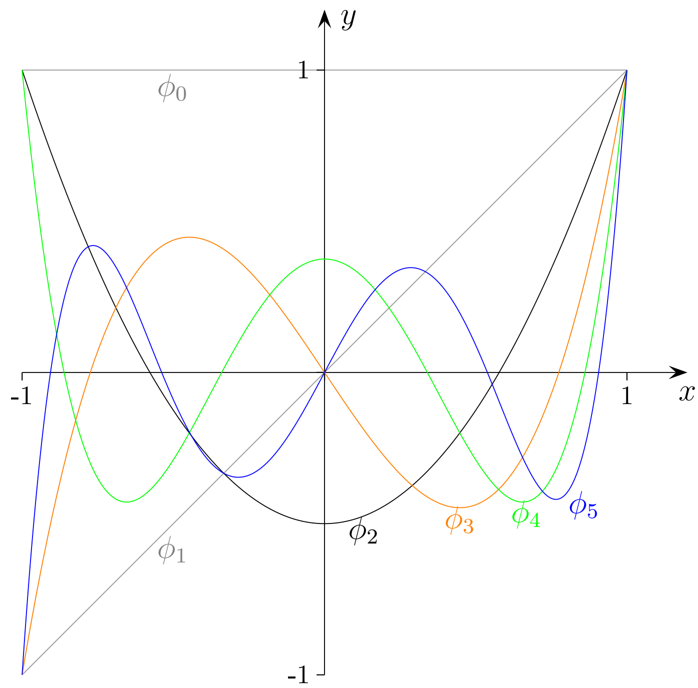
$$\underbrace{(1-x^2)y''-2xy'}_{\left[(1-x^2)y'\right]'}+n(n+1)y=0, \qquad y(1)=1$$

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= 1\\
\phi_1(x) &= x\\
\phi_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) && \text{Ansatz: } \phi_2(x)=ax^2+bx+c, \text{ Koeffizientenvergleich}\\
\phi_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x)\\
\phi_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\
\phi_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)
\end{aligned}$$

Ein Potenzreihenansatz ergäbe eine Formel für ϕ_k.

$$\phi_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad \text{Rodriguez}$$

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}x\phi_n(x)-\frac{n}{n+1}\phi_{n-1}(x) \qquad \text{Rekursionsgleichung}$$



Darstellung der Monome

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &= 1 \\
\phi_1(x) &= x \\
\phi_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
\phi_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
\phi_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= \phi_0(x) \\
x &= \phi_1(x) \\
x^2 &= \frac{1}{3}(\phi_0(x) + 2\phi_2(x)) \\
x^3 &= \frac{1}{5}(3\phi_1(x) + 2\phi_3(x)) \\
x^4 &= \frac{1}{35}(7\phi_0(x) + 20\phi_2(x) + 8\phi_4(x)) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

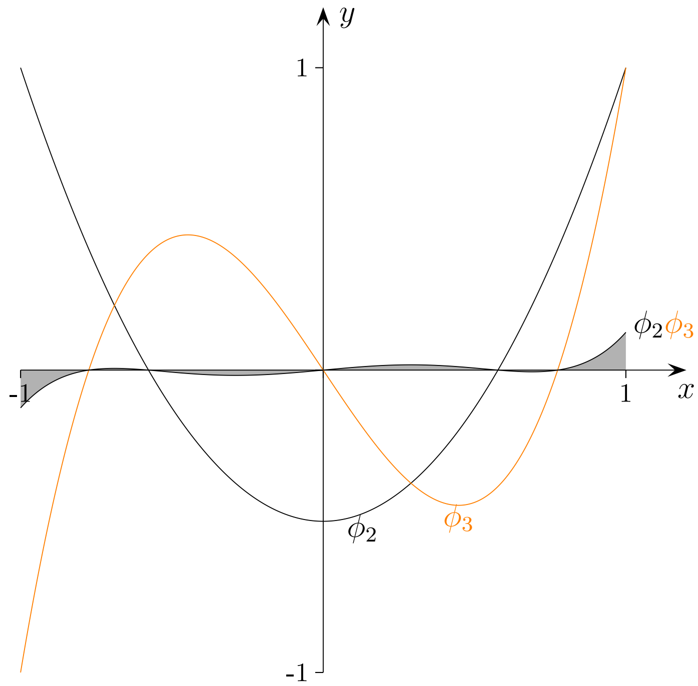
Die Legendre-Polynome bilden ein vollständiges Orthogonal-System.

$$
\begin{aligned}
\phi_k(-1) &= (-1)^k \\
\phi_k(1) &= 1 \\
\phi_{2k+1}(0) &= 0 \\
\phi_k(-x) &= (-1)^k \phi_k(x) \qquad \text{Symmetrie}
\end{aligned}
$$

Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx \;=\; 0, \quad n \neq m \qquad \text{Orthogonalitätseigenschaften}$$

$$\int_{-1}^{1} \phi_n^2(x) \;=\; \frac{2}{2n+1}$$



Seien $\phi_n(x)$ und $\phi_m(x)$ Lösungen der Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \left[(1-x^2)\phi_n'(x)\right]' + n(n+1)\phi_n(x) &= 0 \quad |\cdot\phi_m(x) \\ \left[(1-x^2)\phi_m'(x)\right]' + m(m+1)\phi_m(x) &= 0 \quad |\cdot\phi_n(x) \end{aligned}$$

Multiplikation der 1. Gleichung mit $\phi_m(x)$, der 2. mit $\phi_n(x)$ und Subtraktion ergibt:

$$\left[(1-x^2)\phi_n'(x)\right]'\phi_m(x) - \left[(1-x^2)\phi_m'(x)\right]'\phi_n + \phi_n(x)\phi_m(x)(n(n+1)-m(m+1)) \;=\; 0 \quad \Big| \int_{-1}^{1}$$

Eine partielle Integration ergibt null für die links stehende Differenz, beachte den Term $1-x^2$ und die Grenzen. Es folgt

$$\int_{-1}^{1} \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx = 0, \quad n \neq m$$

Approximation

Für eine Funktion f sei der Ansatz:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) \\
&= a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_3(x) + a_4\phi_4(x) + \ldots \qquad \mid \cdot\phi_0(x) \quad \Big| \int_{-1}^{1} \\
\int_{-1}^{1} f(x)\phi_0(x)\,dx &= a_0 \int_{-1}^{1} \phi_0^2(x)\,dx + \underbrace{a_1 \int_{-1}^{1} \phi_1(x)\phi_0(x)\,dx + a_2 \int_{-1}^{1} \phi_2(x)\phi_0(x)\,dx + \ldots}_{0}
\end{aligned}$$

Um a_0 zu ermitteln, werden beide Seiten mit $\phi_0(x)$ multipliziert und integriert,
für a_1 mit $\phi_1(x)$, usw., allgemein erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\phi_k(x)\,dx &= a_k \cdot \frac{2}{2k+1} \\
a_k &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\phi_k(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für} \quad x \le 0 \\ x & \qquad\ \ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2} \\
a_1 &= 0 \\
a_2 &= \frac{5}{8} \\
a_3 &= 0 \\
a_4 &= -\frac{3}{16} \\
a_5 &= 0
\end{aligned}$$