

Legendre-Polynome

Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

$$\underbrace{(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0}_{[(1-x^2)y']'}, \quad y(1) = 1$$

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad \text{Ansatz: } \phi_2(x) = ax^2 + bx + c, \text{ Koeffizientenvergleich}$$

$$\phi_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

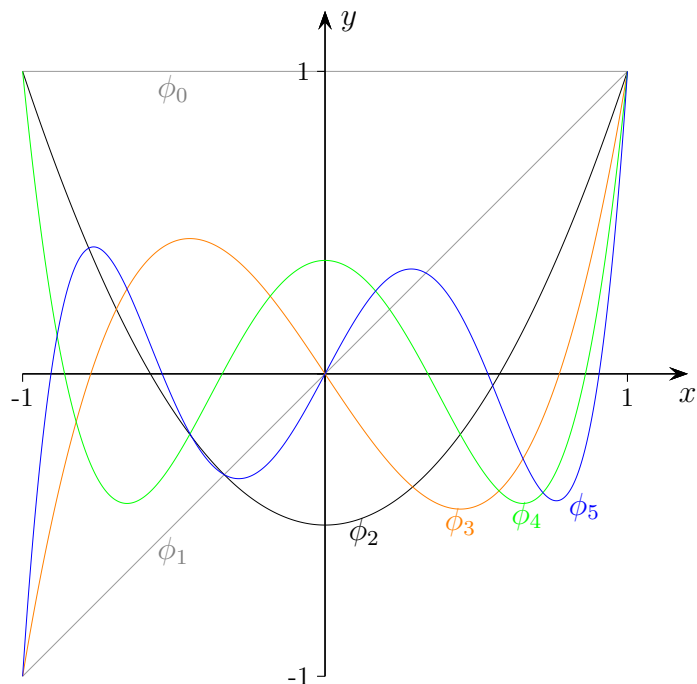
$$\phi_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$\phi_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Ein Potenzreihenansatz ergäbe eine Formel für ϕ_k .

$$\phi_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{Rodriguez}$$

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x \phi_n(x) - \frac{n}{n+1} \phi_{n-1}(x) \quad \text{Rekursionsgleichung}$$



Darstellung der Monome

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$\phi_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\phi_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

...

$$1 = \phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}(\phi_0(x) + 2\phi_2(x))$$

$$x^3 = \frac{1}{5}(3\phi_1(x) + 2\phi_3(x))$$

$$x^4 = \frac{1}{35}(7\phi_0(x) + 20\phi_2(x) + 8\phi_4(x))$$

...

Die Legendre-Polynome bilden ein vollständiges Orthogonal-System.

$$\phi_k(-1) = (-1)^k$$

$$\phi_k(1) = 1$$

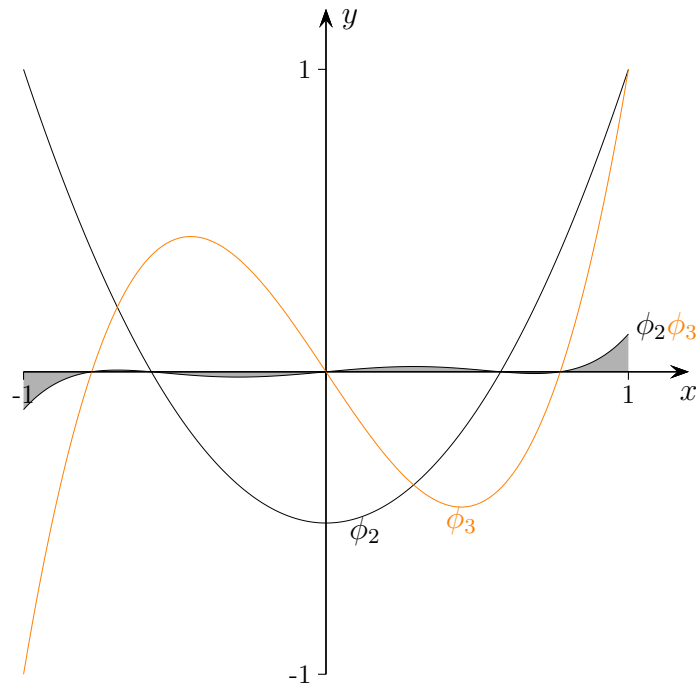
$$\phi_{2k+1}(0) = 0$$

$$\phi_k(-x) = (-1)^k \phi_k(x) \quad \text{Symmetrie}$$

Orthogonalität

$$\int_{-1}^1 \phi_n(x)\phi_m(x) dx = 0, \quad n \neq m \quad \text{Orthogonalitätseigenschaften}$$

$$\int_{-1}^1 \phi_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$



Seien $\phi_n(x)$ und $\phi_m(x)$ Lösungen der Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} [(1-x^2)\phi_n'(x)]' + n(n+1)\phi_n(x) &= 0 & | \cdot \phi_m(x) \\ [(1-x^2)\phi_m'(x)]' + m(m+1)\phi_m(x) &= 0 & | \cdot \phi_n(x) \end{aligned}$$

Multiplikation der 1. Gleichung mit $\phi_m(x)$, der 2. mit $\phi_n(x)$ und Subtraktion ergibt:

$$[(1-x^2)\phi_n'(x)]'\phi_m(x) - [(1-x^2)\phi_m'(x)]'\phi_n(x) + \phi_n(x)\phi_m(x)(n(n+1) - m(m+1)) = 0 \quad | \int_{-1}^1$$

Eine partielle Integration ergibt null für die links stehende Differenz, beachte den Term $1-x^2$ und die Grenzen. Es folgt

$$\int_{-1}^1 \phi_n(x)\phi_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

Approximation

Für eine Funktion f sei der Ansatz:

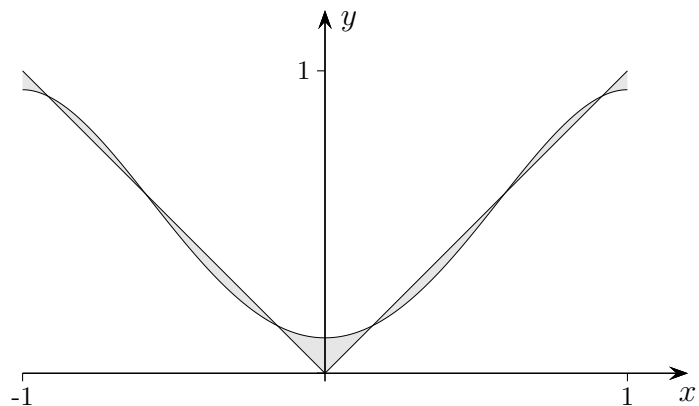
$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x) \\
 &= a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_3(x) + a_4 \phi_4(x) + \dots \quad | \cdot \phi_0(x) \quad | \int_{-1}^1 \\
 \int_{-1}^1 f(x) \phi_0(x) dx &= a_0 \int_{-1}^1 \phi_0^2(x) dx + \underbrace{a_1 \int_{-1}^1 \phi_1(x) \phi_0(x) dx + a_2 \int_{-1}^1 \phi_2(x) \phi_0(x) dx + \dots}_0
 \end{aligned}$$

Um a_0 zu ermitteln, werden beide Seiten mit $\phi_0(x)$ multipliziert und integriert, für a_1 mit $\phi_1(x)$, usw., allgemein erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(x) \phi_k(x) dx &= a_k \cdot \frac{2}{2k+1} \\
 a_k &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \phi_k(x) dx
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2} \\
 a_1 &= 0 \\
 a_2 &= \frac{5}{8} \\
 a_3 &= 0 \\
 a_4 &= -\frac{3}{16} \\
 a_5 &= 0
 \end{aligned}$$



Startseite