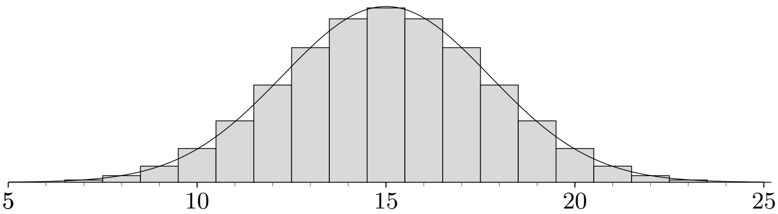
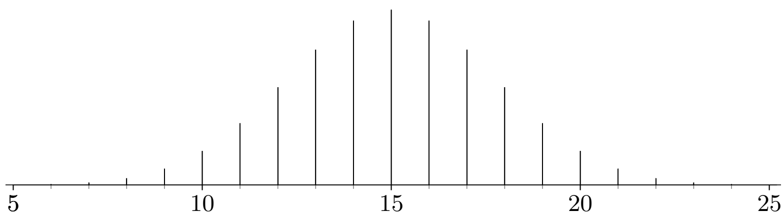
Näherungsformel für die Binomialverteilung

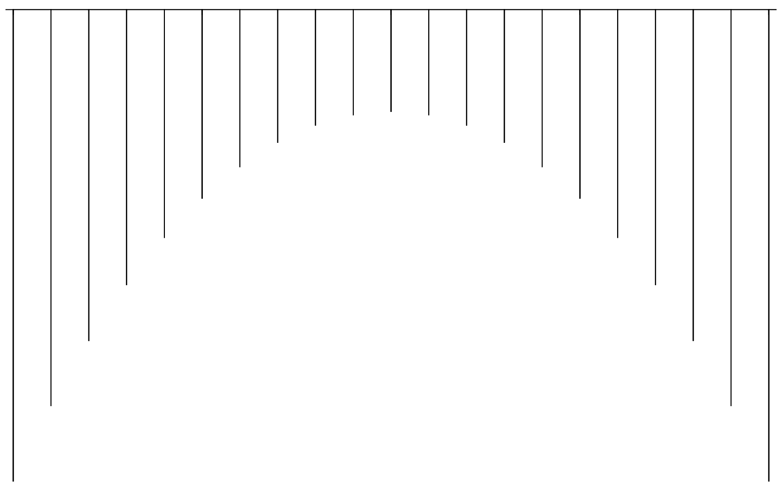


1730 entwickelte de Moivre eine Näherungsformel für $p = \frac{1}{2}$.

$$P^n_{1/2}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{2}{n}\left(k - \frac{2}{n}\right)^2}$$

Die zu Grunde liegende Idee eines heuristischen Zugangs ist überraschend einfach.
Um die approximierende Funktion $f_n(k)$ zu ermitteln, stellen wir die Logarithmen der $P^n_{1/2}(X = k)$-Werte (kurz $P^n(k)$) grafisch dar und stellen verwundert fest, dass diese Werte allem Anschein nach auf einer nach unten geöffneten Parabel liegen. Im Folgenden ermitteln wir die Geradengleichung für die Ableitung der Parabel und erhalten damit die Funktion $f_n(k)$.





Hierzu leiten wir ab:

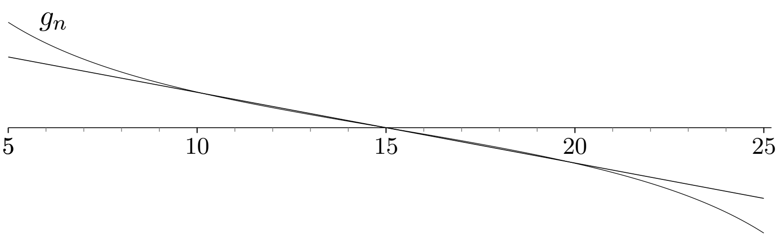
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dk} \ln f_n(k) &= \frac{1}{f_n(k)} \cdot f'_n(k) \\
&\approx \frac{1}{2} \frac{P^n(k+1) - P^n(k-1)}{P^n(k)} && \text{beachte:} \quad f'_n(k) \approx \frac{f_n(k+1) - f_n(k-1)}{f_n(k)} \\
& && \text{und} \quad f_n(k) \approx P^n(k) \\
&\approx \frac{1}{2} \left(\frac{n-k}{k+1} - \frac{k}{n-k+1} \right) && \text{beachte:} \quad \frac{P^n(k+1)}{P^n(k)} = \frac{n-k}{k+1}
\end{aligned}$$

Näherungsformel für die Binomialverteilung

Die Funktion

$$g_n(k) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-k}{k+1} - \frac{k}{n-k+1} \right)$$

stellt in der Umgebung von $k = \frac{n}{2}$ näherungsweise eine Gerade dar.
Wir ersetzen sie vereinfachend durch ihre Tangente. Es ist $f_n'(\frac{n}{2}) = -4\frac{n+1}{(n+2)^2} \approx -\frac{4}{n}$.



Der Ansatz lautet nun:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dk} \ln f_n(k) &=& -\frac{4}{n}\left(k - \frac{n}{2} \right) \\
\Longrightarrow \quad & \ln f_n(k) &=& -\frac{2}{n}\left(k - \frac{n}{2} \right)^2 + C_1 \\
\Longrightarrow \quad & f_n(k) &=& e^{-\frac{2}{n}\left(k-\frac{2}{n}\right)^2} \cdot C_2
\end{aligned}$$

C_2 wird nun noch mit $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(k)\,dk = 1$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dk = \sqrt{\pi}$ durch Substitution ermittelt.

Damit haben wir die Formel von de Moivre erhalten:

$$f_n(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot \frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{2}{n}\left(k-\frac{2}{n}\right)^2}$$

In der Formulierung mit μ und σ lautet diese Formel

$$f_n(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{mit } \mu = n \cdot p = \frac{n}{2},\ \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{\frac{n}{4}}$$

1812 konnte sie Laplace in dieser Form verallgemeinern.