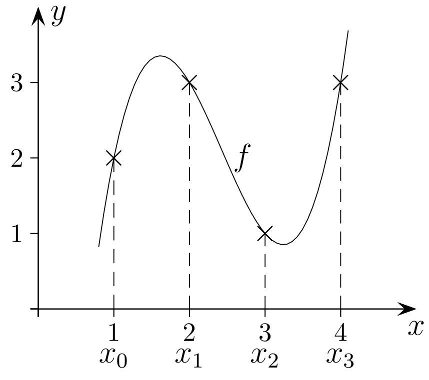
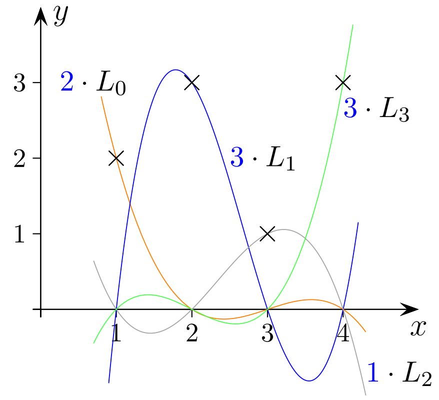
Lagrange-Interpolation





Eine Funktion f verläuft durch die Punkte $P_0(1 \mid 2)$, $P_1(2 \mid 3)$, $P_2(3 \mid 1)$ und $P_3(4 \mid 3)$. Gesucht ist ein Polynom von möglichst niedrigem Grad, auf dem die Punkte liegen.

Die x-Werte heißen Stützstellen.
Das Lagrangesche Polynom (Grad N = Anzahl der Stützstellen -1) kann sofort angegeben werden. Die Idee ist, zu jeder Stützstelle x_i das Polynom 3. Grades L_i zu verwenden, das an der Stelle x_i den Funktionswert 1 hat und an den anderen Stützstellen null ist.

Das gesuchte Interpolationspolynom lautet dann:

$$L(x) = 2 \cdot L_0(x) + 3 \cdot L_1(x) + 1 \cdot L_2(x) + 3 \cdot L_3(x), \qquad L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=N} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \qquad \frac{\text{es fehlt} \quad (x-x_0)}{(x_0-x_0)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = -\frac{1}{6}\,(x^3 - 9x^2 + 26x - 24)$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \qquad \frac{\text{es fehlt} \quad (x-x_1)}{(x_1-x_1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{2}\,(x^3 - 8x^2 + 19x - 12)$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{2}\,(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{6}\,(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

Man kann allgemein eine Formel für die Fehlerabschätzung für das Lagrangesche Polynom $P_N(x)$ herleiten.
f muss $n+1$-mal stetig differenzierbar sein.

$$|f(x) - P_N(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{N} (x - x_k) \right|$$

Aufgabe (hinterhältig)

Geben Sie die Lagrangesche Form der Polynominterpolation wieder.
Berechnen Sie das Interpolationspolynom der Funktion

$$f(x) = \cos(\pi x)$$

zu den Stützstellen $-2, -1, 0, 1, 2$.

Aufgabe (hinterhältig)

Geben Sie die Lagrangesche Form der Polynominterpolation wieder.
Berechnen Sie das Interpolationspolynom der Funktion

$$f(x) = \cos(\pi x)$$

zu den Stützstellen $-2, -1, 0, 1, 2$.

Zu den Datenpaaren (x_k, y_k), $k = 0, \ldots, N$, (x_k verschieden)
existiert ein Polynom (Grad $\leq N$)

$$L(x) = \sum_{k=0}^{N} y_k L_k(x),$$

dass alle Interpolationsbedingungen $L(x_k) = y_k$ erfüllt.
Für die Lagrangeschen Basispolynome gilt

$$L_k(x_j) = \delta_{k,j} \quad \text{mit} \quad k, j \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}.$$

Sie lauten:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{j=N} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

geschickter Ansatz: $P(x) = 1 + ax^2 + bx^4$
Die Symmetrie wird ausgenutzt.

$$\begin{aligned} 1 + a + b &= -1 \\ 1 + 4a + 16b &= 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad P(x) = 1 - \tfrac{8}{3}x^2 + \tfrac{2}{3}x^4$$