↑ Wegintegral, Kurven- oder Linienintegral 2. Art

Gegeben ist ein Vektorfeld $\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

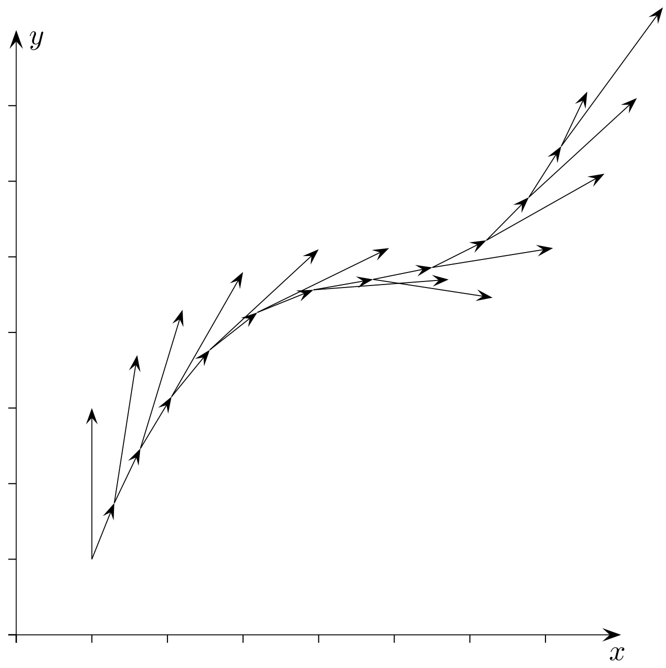
und eine Kurve C in Parameterdarstellung
$\big(x(t), y(t)\big), \quad a \le t \le b.$

Ein Punkt bewegt sich unter dem Einfluss des Vektorfeldes entlang der Kurve.

Die hierbei verrichtete Arbeit wird mit dem

Skalarprodukt $\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$

berechnet, hierbei wird stets nur die Kraftkomponente in Wegrichtung berücksichtigt.
Summation und Grenzwertbildung führen zum Wegintegral



$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$$= \int_a^b P(x(t),y(t)) \cdot x'(t)\,dt + Q(x(t),y(t)) \cdot y'(t)\,dt$$

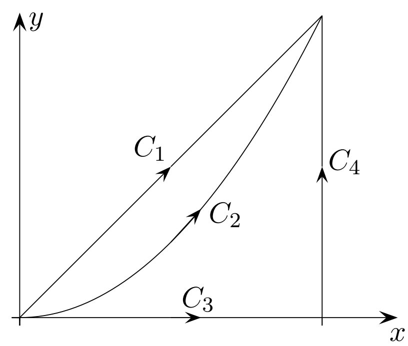
Beachte hierbei $\quad \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t_n)-x(t_{n-1})}{\Delta t} \approx x'(t^*)$ und Entsprechendes für $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$.

Als Beispiel betrachten wir ein Kurvenintegral längs verschiedener Wege in Parameterdarstellung.

C_1: (t,t) $\qquad 0 \le t \le 1$

C_2: (t,t^2)

C_3: $(t,0)$ $\qquad C_4$: $(1,t)$



$$\int_{C_1} 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy = \int_0^1 \Big(3t^3 + (t^3+1)\Big)\,dt = \ldots = 2$$

$$\int_{C_2} 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy = \int_0^1 \Big(3t^4 + (t^3+1)\cdot 2t\Big)\,dt = \ldots = 2$$

$$\int_{C_3+C_4} 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy = \int_{C_3} 3x^2y\,dx + \int_{C_4} (x^3+1)\,dy = \int_0^1 2\,dt = 2$$

beachte: $y = const \implies y'(t) = 0$
$\qquad\qquad x = const \implies x'(t) = 0$

Auffällig ist, dass das Integral für die verschiedenen Wege denselben Wert annimmt, also unabhängig vom eingeschlagenen Weg zu sein scheint.
Der Grund hierfür ist das Vorhandensein einer Potential- oder Stammfunktion $U(x,y) = x^3y + y$, für die gilt $(*)$:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = U_x(x,y) = P(x,y)$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = U_y(x,y) = Q(x,y)$$

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; U_x(x,y)\,dx + U_y(x,y)\,dy \;=\; 3x^2y\,dx + (x^3+1)\,dy$$

ist daher ein exaktes (totales) Differential von $U(x,y)$ (anschaulich ist dies eine Höhendifferenz, siehe Tangentialebene), so dass lediglich die Potentialdifferenz der Endpunkte bestimmt werden muss.

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = U(x_b,y_b) - U(x_a,y_a) \qquad \text{im Beispiel:}\quad U(1,1) - U(0,0) = 2$$

Da $U_{yx}(x,y) = U_{xy}(x,y)$ gilt (Stetigkeit usw. vorausgesetzt), kann eine Stammfunktion nur existieren, falls $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ ist, im Beispiel ist dies $3x^2$.

Mit den obigen Beziehungen $(*)$ kann die Stammfunktion ermittelt werden.

$$\int P(x,y)\,dx = \int 3x^2y\,dx = yx^3 + f(y)$$

$$\int Q(x,y)\,dy = \int (x^3+1)\,dy = x^3y + y + g(x)$$

$f(y)$ und $g(x)$ werden so angepasst, dass die rechten Seiten übereinstimmen.
Wir erhalten $U(x,y) = x^3y + y + C$.

Die Greensche Integralformel (1793-1841) stellt einen Zusammenhang zwischen einem Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve L und einem Integral über die eingeschlossene Fläche G (Rand L) her:

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\,dx\,dy$$

Die Äquivalenz der folgenden Behauptungen (für ein Gebiet G) erscheint nun plausibel:

1) Das Integral $\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ längs eines beliebigen geschlossenen Weges ist null.

2) Das Integral $\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ längs eines Weges, der die Punkte A und B verbindet, ist unabhängig von der speziellen Wahl des Weges.

3) $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ist das totale (exakte) Differential einer Funktion.

4) Es gilt $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$.

$\uparrow$ Kurvenintegral, alternative Berechnung

Falls der Weg z. B. durch eine Relation $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, gegeben ist,
besteht eine weitere Berechnungsmöglichkeit:

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, f(x)) \\ Q(x, f^{-1}(y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; \int_a^b P(x, f(x))\,dx + \int_c^d Q(f^{-1}(y), y)\,dy$$

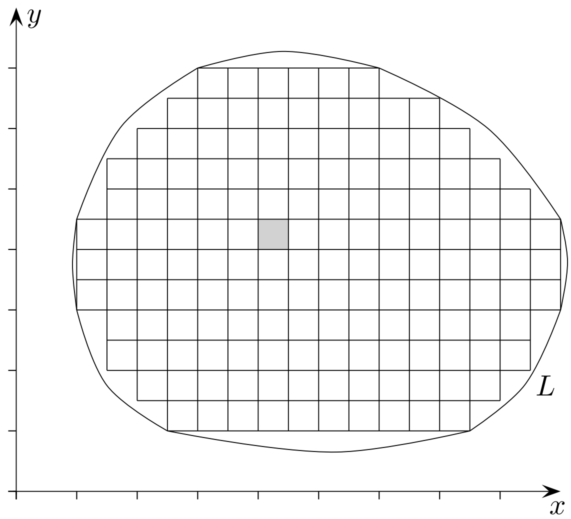
$$\int_{C_2} 3x^2 y\,dx + (x^3+1)\,dy \;=\; \int_0^1 3x^2 \cdot x^2\,dx + \int_0^1 ((\sqrt{y})^3 + 1)\,dy \;=\; \ldots = 2$$

Der Nutzen wird erst bei der Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen deutlich.
Falls die Auflösung nach den Variablen nicht gelingt, ist die Kurve geeignet zu unterteilen.

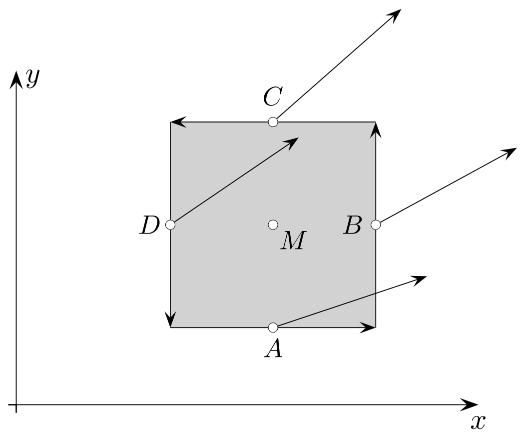
↑ Greensche Integralformel

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\;dx\,dy$$

Zur Begründung unterteilen wir das Gebiet G in Quadrate.



Für ein Quadrat gilt dann:

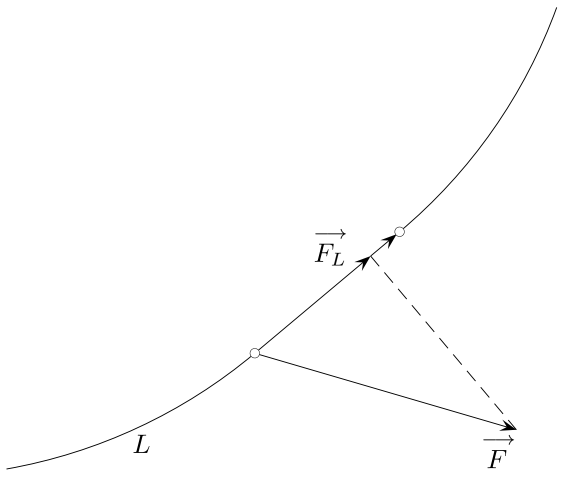


$$\begin{pmatrix} P(A) \\ Q(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(B) \\ Q(B) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(C) \\ Q(C) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -dx \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(D) \\ Q(D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -dy \end{pmatrix} =$$

$$\big(Q(B) - Q(D)\big)\,dy \;-\; \big(P(C) - P(A)\big)\,dx \;=\; Q_x(M)\,dx\,dy \;-\; P_y(M)\,dx\,dy \;=\; \big(Q_x(M) - P_y(M)\big)\,dx\,dy$$

Bei der Summation über alle Quadrate ist zu beachten, dass sich die Arbeit an gemeinsamen Quadratseiten wegen der entgegengesetzten Orientierung aufhebt und nur das Kurvenintegral über den Gebietsrand übrigbleibt, wenn wir die Quadrate schrumpfen lassen.
Dieses Kurvenintegral ist andererseits das obige Doppelintegral.

$\uparrow$ Weitere Darstellung des Kurvenintegrals



Aus den Eigenschaften des Skalarprodukts ergibt sich eine weitere Darstellung des Kurvenintegrals:

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; \int_L |\overrightarrow{F_L}\,(x,y)|\;ds$$

Hierbei sind:

$$\overrightarrow{F}\,(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{F_L}\,(x,y)$ die senkrechte Projektion des Vektors $\overrightarrow{F}$ auf den Kurventangentenvektor,

$$\Delta s \;=\; \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \;=\; |\overrightarrow{F_L}\,(x,y)| \,\cdot\, |\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}|$$

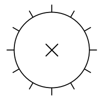
↑ Rotation

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;=\; \iint_G \underbrace{\big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)}_{\text{Rotation}}\,dx\,dy$$

Die Rotation hat eine anschauliche Bedeutung.
Das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ beschreibe die Geschwindigkeitsverteilung in einer ebenen strömenden Flüssigkeit. Lassen wir eine kleine Papierscheibe auf die Oberfläche fallen, so wird sie sich nicht nur mit der Flüssigkeit fortbewegen, sondern sie wird sich auch um ihren Mittelpunkt M mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{1}{2}\big(Q_x(M) - P_y(M)\big)$$

drehen.



Es erscheint naheliegend anzunehmen, dass der Betrag der Geschwindigkeit jedes Punktes auf dem Kreis gleich dem Mittelwert der Funktionswerte $|\overrightarrow{F_L}\,(x,y)\,|$ auf der Kreislinie L ist, d. h.

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{2\pi r}\int_L |\overrightarrow{F_L}\,(x,y)\,|\,ds \\
&\overset{\text{Green}}{=} \frac{1}{2\pi r}\iint \big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi r}\big(Q_x(M) - P_y(M)\big)\cdot \pi r^2 \\
v &= \frac{r}{2}\big(Q_x(M) - P_y(M)\big) \qquad \Longrightarrow \\
\frac{v}{r} &= \frac{1}{2}\big(Q_x(M) - P_y(M)\big)
\end{aligned}$$

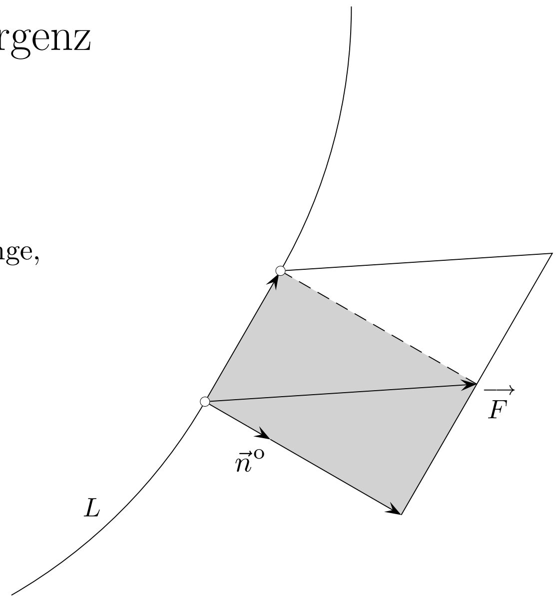
$\frac{v}{r}$ ist gerade die Winkelgeschwindigkeit ω.

↑ Fluss und Divergenz

Das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ beschreibe wieder die Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit, die über die Ebene fließt.
Der Fluss von $\overrightarrow{F}$ über L ist die in Einheitszeit fließende Menge, die über L (häufig geschlossen) fließt, er wird mit

$$\int_L \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\, ds$$

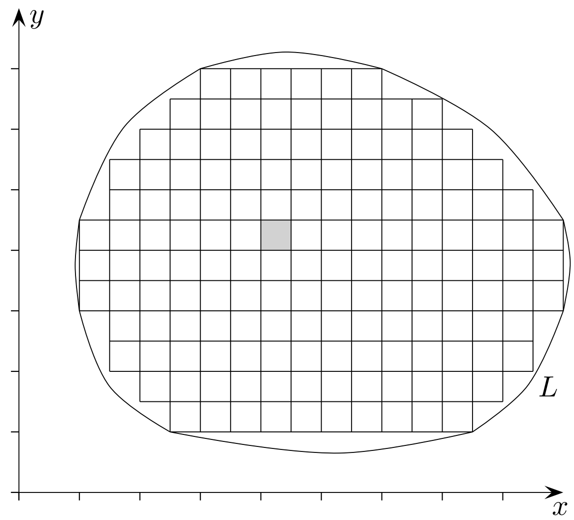
berechnet.
Aufgrund der Orientierung des Normaleneinheitsvektors ist der Fluss vorzeichenbehaftet. Bei geschlossenen Kurven zeigt der Normalenvektor nach außen. Die Kurve wird stets so durchlaufen, dass das Gebiet auf der linken Seite liegt.

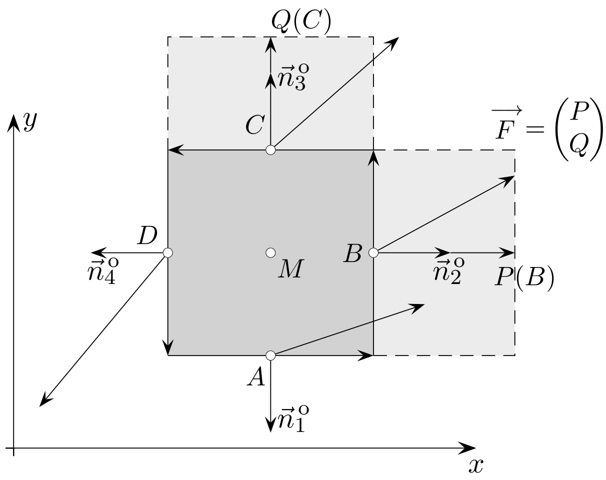


Nach dem Gaußschen Integralsatz kann die Berechnung mit einem Doppelintegral erfolgen.

$$\int_L \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\, ds = \iint_G \big(\underbrace{P_x(x,y) + Q_y(x,y)}_{\text{Divergenz}}\big)\, dx\, dy$$

(siehe Greensche Integralformel)





Fluss für ein einzelnes Quadrat ($dx = dy = a$):

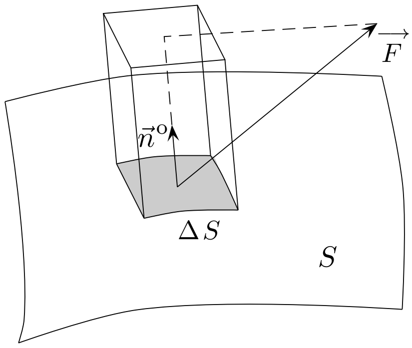
$$P(B)\,dx + Q(C)\,dx - P(D)\,dy - Q(A)\,dy$$
$$= \big(P(B) - P(D)\big)\,a \;+\; \big(Q(C) - Q(A)\big)\,a$$
$$= \big(P_x(M) + Q_y(M)\big)\,a^2$$

Die Divergenz gibt den lokalen Fluss pro Einheitsfläche an, der von M wegfließt divergiert.

↑ Oberflächenintegral 2. Art

Verallgemeinern wir nun das Vorige
und untersuchen den Fluss einer Flüssigkeit durch eine Oberfläche S.

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$$



Der Fluss wird - naheliegend - mit

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\, dS \qquad \text{berechnet, symbolisch:} \qquad \iint\limits_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Je nach Orientierung des Normalenvektors gibt es zwei Möglichkeiten.

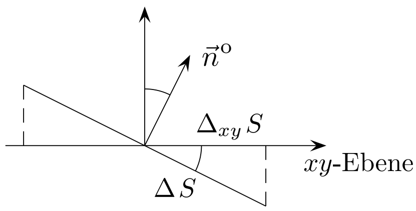
Für einen Normaleneinheitsvektor gilt (folgt aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cos\alpha$):

$$\vec{n}^{\mathrm{o}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

wobei der Normaleneinheitsvektor mit der x-, y- und z-Koordinatenachse jeweils die Winkel α, β und γ einschließt.

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \Delta S = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta S \cos\alpha \\ \Delta S \cos\beta \\ \Delta S \cos\gamma \end{pmatrix} = P\,\Delta_{yz} S + Q\,\Delta_{zx} S + R\,\Delta_{xy} S$$

$\Delta_{xy} S$ ist die Projektion von ΔS auf die xy-Koordinatenebene.
Hieraus wird die symbolische Schreibweise verständlich.



Erwähnt sei noch der Gaußsche Integralsatz für Oberflächen, die ein Volumen V einschließen (siehe Seite 7, statt Quadrate sind lediglich Würfel zu nehmen):

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\, dS = \iiint\limits_V \big(P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_y(x,y,z)\big)\; dx\, dy\, dz$$

$\uparrow$ Oberflächenintegral Beispiel

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

S sei das Ebenenstück $x+y+z=1$, das von den drei Koordinatenebenen eingeschlossen wird.

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{S_{yz}} x\,dy\,dz + \iint\limits_{S_{zx}} x\,dz\,dx + \iint\limits_{S_{xy}} x\,dx\,dy$$

$$\iint\limits_{S_{yx}} x\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx = \frac{1}{6} \qquad \text{(Volumen einer dreiseitigen Pyramide, anschaulich klar)}$$

Die beiden anderen Integrale ergeben dasselbe. Der Fluss beträgt daher $\frac{1}{2}$.

Die Berechnung des Flusses ist auch direkt möglich:

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\mathrm{o}}\,dS = \iint\limits_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dS = \iint\limits_{S_{xy}} (x+y+z)\;dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1\;dy\,dx = \frac{1}{2}$$

Beachte hierbei:

$$\vec{n}^{\mathrm{o}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$dS = \sqrt{3}\;dx\,dy$$

$$z = 1-x-y$$

Allgemein gilt, falls die Oberfläche durch $z = f(x,y)$ gegeben ist:

$$\vec{n}^{\mathrm{o}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\,\vec{n}^{\mathrm{o}}\,| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$$

$$dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\;dx\,dy \qquad \Longrightarrow \qquad \iint\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\mathrm{o}}\,dS = \iint\limits_{S_{xy}} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}\;dx\,dy$$

mit $P = P(x,y,f(x,y))$

Q, R entsprechend

↑ Satz von Stokes (1819-1903)

Die Greensche Integralformel

$$\oint_{\partial G} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_G \big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\;dx\,dy$$

kann verallgemeinert werden (∂G ist der Rand von G), wobei an die Stelle der Fläche in der xy-Ebene eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ tritt.

Sei ein Vektorfeld $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ gegeben.

Der Satz von Stokes stellt eine Verbindung zwischen einem Oberflächenintegral 2. Art und einem Integral über den Rand (Zirkulation) her:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz &= \iint\limits_S (Q_x - P_y)\,dx\,dy + (R_y - Q_z)\,dy\,dz + (P_z - R_x)\,dz\,dx \\ &= \iint\limits_S \begin{pmatrix} Q_x - P_y \\ R_y - Q_z \\ P_z - R_x \end{pmatrix} \cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\;dS\end{aligned}$$

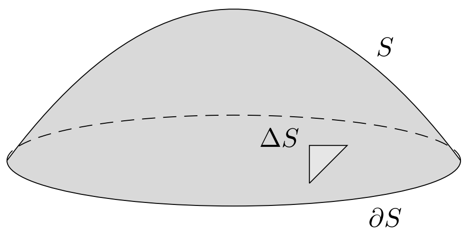
Der in Klammern stehende Vektor heißt Rotation von $\overrightarrow{F}$.

Die Fläche S pflastern wir (siehe Greensche Integralformel) dieses Mal mit Dreiecken - der Vorteil wird gleich erkennbar - und berechnen für deren Ränder die Zirkulation.

Das Ergebnis wird sein:

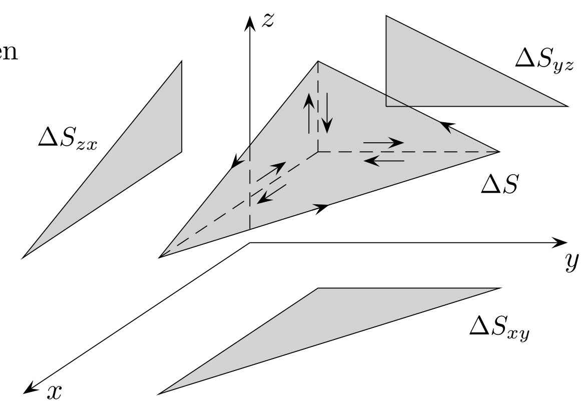
$$(Q_x - P_y)\,\Delta S_{xy} + (R_y - Q_z)\,\Delta S_{yz} + (P_z - R_x)\,\Delta S_{zx}$$

also $\begin{pmatrix} Q_x - P_y \\ R_y - Q_z \\ P_z - R_x \end{pmatrix} \cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\;\Delta S$



Bei der Summation über alle Dreiecke heben sich die Kurvenintegrale längs gemeinsamer Kanten wieder auf, so dass nur das Integral über den Flächenrand ∂S übrig bleibt (die Dreiecke lassen wir vorher noch schrumpfen). Dieses ist dann das angegebene Oberflächenintegral.

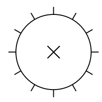
Die weitere Begründung ist überraschend einfach.
Die Zirkulation um ΔS kann als Summe der Zirkulationen um Dreiecke berechnet werden, die jeweils zu einer Koordinatenebene parallel sind (siehe Zeichnung, nur solche Dreiecksflächen ΔS wurden für die Zerlegung von S verwendet). Auf diese Dreiecke kann die Greensche Integralformel angewandt werden.
Zu beachten ist hierbei, dass die Vektoren
$(P_y, Q_x, 0)^{\mathrm{T}}$ parallel zu ΔS_{xy},
$(0, Q_z, R_y)^{\mathrm{T}}$ parallel zu ΔS_{yz} und
$(P_z, 0, R_x)^{\mathrm{T}}$ parallel zu ΔS_{zx} verlaufen.



↑ Ergänzung Rotation

Die Zirkulation für den Rand unserer Mini-Turbine (siehe Seite 6) beträgt:

$$\begin{pmatrix} Q_x - P_y \\ R_y - Q_z \\ P_z - R_x \end{pmatrix} \cdot \vec{n}^{\,\mathrm{o}}\, \Delta S \;=\; \operatorname{rot}\, \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}^{\,\mathrm{o}}\, \Delta S$$

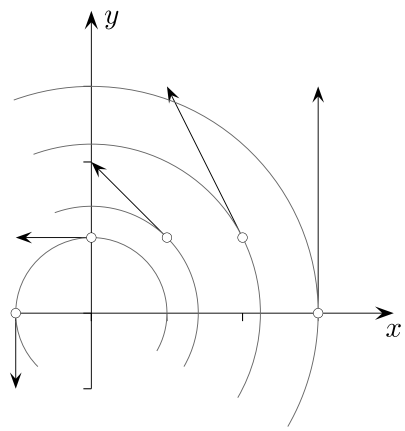


Die Zirkulation - und damit die Winkelgeschwindigkeit - ist maximal, falls die Turbine so in der fließenden Flüssigkeit platziert wird, dass der Normalenvektor des Scheibchens in Richtung des Rotationsvektors zeigt, sie ist dann $|\operatorname{rot}\, \overrightarrow{F}\,| \cdot \Delta S$.
Die Winkelgeschwindigkeit beträgt $\frac{1}{2}\ |\operatorname{rot}\, \overrightarrow{F}\,|$; die Überlegungen für den $\mathbb{R}^2$ können übertragen werden.

Das Geschwindigkeitsfeld $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{pmatrix}$

beschreibe die Rotation des mit einer Flüssigkeit gefüllten Raumes um die z-Achse.

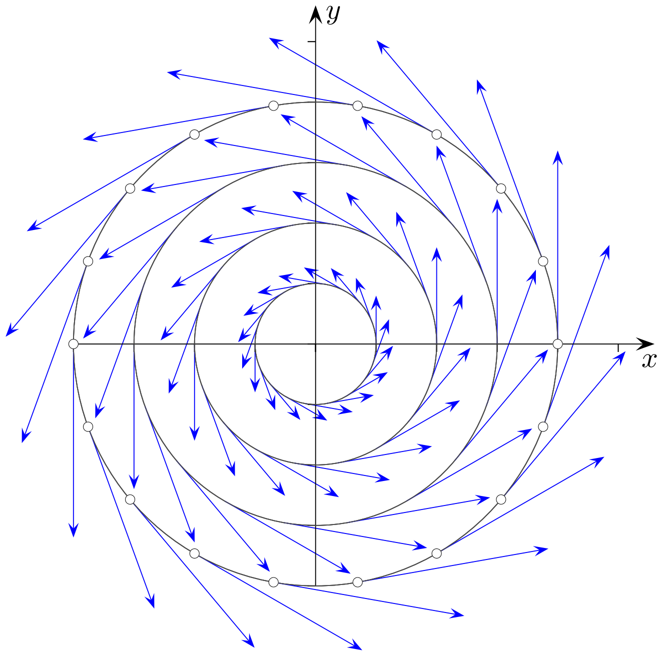
Die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$.



Bestätige: $\operatorname{rot}\, \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$,

daher ist $|\operatorname{rot}\, \overrightarrow{F}\,| = 2\omega$.

↑ Rotation



Wir betrachten die Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse, $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit beträgt

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y(t) \\ \omega x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\perp \text{ zum Ortsvektor, in der Grafik } \omega = 0{,}8)$$

und kann als Vektorfeld dargestellt werden (z. B. als Strömungsfeld einer Flüssigkeit)

$$f(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Die Zirkulation für einen Kreis $r(t) = (r\cos(t), r\sin(t), 0)^{\mathrm{T}}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, beträgt

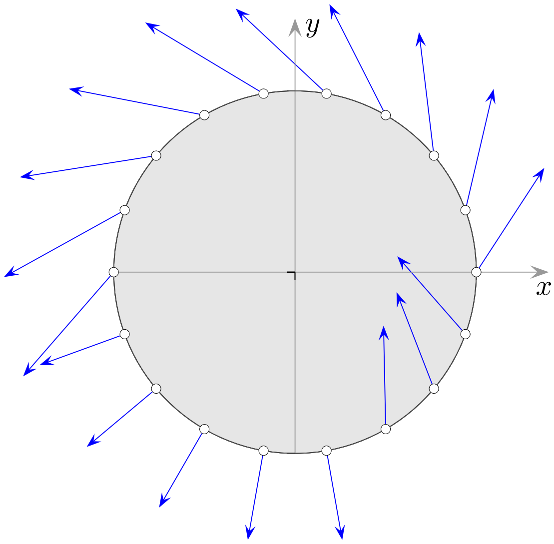
$$\int_C f(x, y, z) = \ldots = \omega r^2 \int_0^{2\pi} [\underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1}]\, dt = 2\omega\pi r^2$$

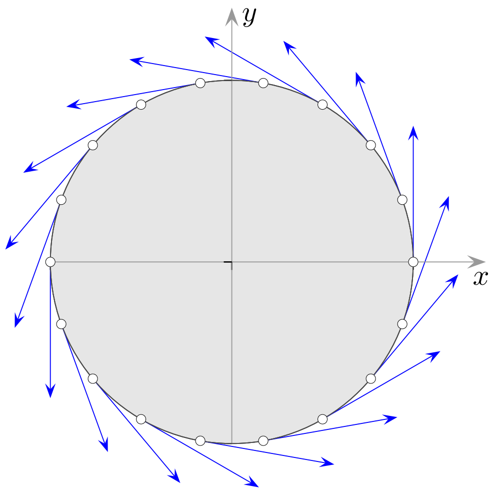
und für den Kreis mit dem Inhalt 1 damit $\displaystyle\int_C f(x, y, z) = 2\omega$.

Andererseits gilt auch $\operatorname{rot} f = (0, 0, 2\omega)^{\mathrm{T}}$.

Die Rotation von f beschreibt die Drehachse (z-Achse) und die doppelte Winkelgeschwindigkeit 2ω.

↑ Rotation





Die Zirkulation bestimmt die Drehwirkung.
Für ein beliebiges Vektorfeld und der Zirkulation $\int_C f = a$ (C Einheitskreis)
existiert ein rotationssymmetrisches Vektorfeld mit der Zirkulation $a = 2\omega$.
Mit dem Satz von Green erhalten wir $\int_C f = \operatorname{rot} f \cdot \vec{n}^{\circ} = 2\omega$.