

Mathematik 2

Inhaltsverzeichnis

- 1 Kurvendiskussion
- 2 Partialbruchzerlegung
- 3 Regel von l'Hospital
- 4 Extrema von Funktionen mit 2 Variablen
- 5 Extrema von Funktionen mit 3 Variablen
- 6 Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen, Lagrange-Funktion
- 7 Exakte Differentialgleichung
- 8 Newton-Verfahren mehrdimensional
- 9 Partielle Integration
- 10 Integration durch Substitution

↑ Kurvendiskussion $f(x) = e^{-x^2}$

1. Symmetrie:

Der Graph ist achsensymmetrisch, da $f(-x) = f(x)$.

2. Nullstellen:

Bed.: $f(x) = 0$

Es sind keine Nullstellen vorhanden, da e^x stets positiv ist.

3. Extrema:

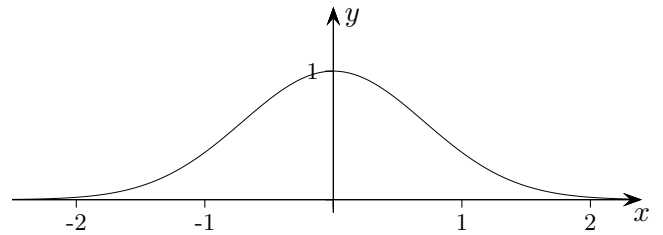
notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} & f''(x) &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \\ x &= 0 & f''(0) &= -2 \quad \text{Max}(0 \mid 1) \end{aligned}$$

4. Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

Auch ohne die 2. Ableitung wäre nun zu erkennen, dass $E(0 \mid 1)$ ein Maximum sein muss.



5. Wendepunkte:

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \\ x_{1/2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & W_{1/2} &= \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \end{aligned}$$

Die Existenz der Wendepunkte folgt aus dem Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$.

Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

1. Nullstellen:

Bed.: $f(x) = 0$

$$x = 0$$

2. Extrema:

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(2x - x^2) & f''(x) &= e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \\ x_1 &= 0 & f''(0) &= 2 \quad \text{Min}(0 \mid 0) \\ x_2 &= 2 & f''(2) &< 0 \quad \text{Max}(2 \mid \frac{4}{e^2}) \end{aligned}$$

3. Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

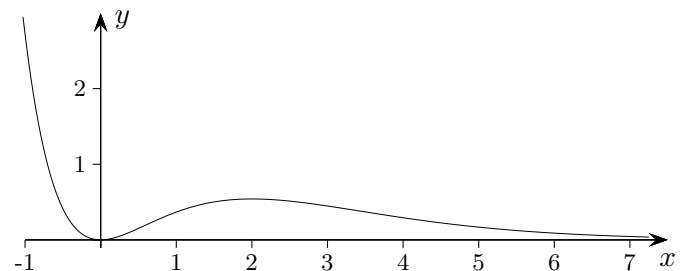
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

4. Wendepunkte:

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Begründung für die Existenz der Wendepunkte ...



↑ _____

© Roofls _____

↑ Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{12x - 9}{x^2 - x - 2} dx = ?$$

Die zu integrierende Funktion besitzt die Polstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$, beachte:
 $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Es erscheint plausibel, dass die Funktion sich aus einer Summe zweier Funktionen zusammensetzt, die jeweils nur eine dieser Polstellen haben. Dies führt zu:

$$\begin{aligned} \frac{12x - 9}{x^2 - x - 2} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} \\ &= \frac{A(x - 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{r} A + B = 12 \\ -2A + B = -9 \\ \hline A = 7 \\ B = 5 \end{array}$$

$$\int \frac{12x - 9}{x^2 - x - 2} dx = \int \frac{7}{x + 1} dx + \int \frac{5}{x - 2} dx = 7 \ln|x + 1| + 5 \ln|x - 2| + C$$

alternativ:

$$\frac{12x - 9}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} \quad | \cdot (x + 1)$$

$$\frac{12x - 9}{x - 2} = A + \frac{B(x + 1)}{x - 2}$$

$$x = -1 \implies A = 7, \quad \text{entsprechend } B = 5$$

Aufg.

1. $\int \frac{2}{x^2 - 1} dx$

2. $\int \frac{4x - 1}{x^2 - 2x} dx$

$$1. \int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{1}{x + 1} dx = \ln|x - 1| - \ln|x + 1| + C$$

$$2. \int \frac{4x - 1}{x^2 - 2x} dx = \int \frac{1}{2x} dx + \int \frac{7}{2(x - 2)} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{7}{2} \ln|x - 2| + C$$

↑ Regel von l'Hospital

Die Regel von l'Hospital vereinfacht in vielen Fällen die Grenzwertberechnungen.

Betrachten wir das Beispiel: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{x} = ?$ Hier liegt der Fall $\frac{0}{0}$ vor.

Nach der Regel von l'Hospital kann der Grenzwert bestimmt werden, indem man Zähler und Nenner getrennt ableitet. Beachte: Dies hat nichts mit der Quotientenregel zu tun!

Also:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x}{1} = 2e^0 = 2$$

Mit Hilfe der Regel von l'Hospital lassen sich Grenzwerte für die Fälle $\frac{0}{0}$ und $\pm \frac{\infty}{\infty}$ mit $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ oder $x \rightarrow a$ ermitteln.

Die Regel kann wiederholt angewandt werden, falls der Fall $\frac{0}{0}$, bzw. $\pm \frac{\infty}{\infty}$, erhalten bleibt.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty$$

Wir können den Satz von l'Hospital für den Fall $\frac{0}{0}$ und $x \rightarrow 0$ einsehen.

Für die beiden Funktionen f und g gelte, dass sie durch den Ursprung verlaufen. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}, \text{ falls } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.}$$

Begründung:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(0) \cdot x}{g'(0) \cdot x} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$
 f und g werden durch ihre Tangenten im Ursprung approximiert.

Der Fall $0 \cdot \infty$ kann manchmal auf einen der genannten Fälle zurückgeführt werden.

Strenggenommen existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ nicht, da ein Grenzwert eine reelle Zahl ist. Diese Schreibweise beinhaltet, dass die Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x}$ für $x \rightarrow \infty$ unbegrenzt wächst.

1. Bestimme die Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot e^{-x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot \ln x$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x^3 - 4x^2}{2x^5 + 8x^3}$

1. Lösungen

a) 0 b) 0
c) 0 d) $-\infty$

↑ Extrema von Funktionen mit 2 Variablen

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y)$ an der Stelle $(x_0 | y_0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 0$$

Für eine hinreichende Bedingung ist die Hesse-Matrix aufzustellen:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

partielle Ableitungen an der Stelle $(x_0 | y_0)$, die Reihenfolge der Ableitungen ist für zweimal stetig differenzierbare Funktionen unerheblich. M ist daher symmetrisch.

$$(u_1, u_2) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 | y_0)$$

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^2, \vec{u} \neq \vec{0}, M \text{ ist positiv definit}$$

$$(u_1, u_2) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^2, \vec{u} \neq \vec{0}, M \text{ ist negativ definit}$$

$\vec{u} \longrightarrow \vec{u}^T M \vec{u}$ ist die Verallgemeinerung von $x \longrightarrow f''(x_0)x^2$.
Das Vorzeichen von $f''(x_0)$ bestimmt die Art des Extremums.

alternativ

$$\det M > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 | y_0)$$

$$\det M > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

$$\det M < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Sattelpunkt an der Stelle } (x_0 | y_0)$$

↑ Extrema von Funktionen mit 3 Variablen

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y, z)$ an der Stelle $(x_0 | y_0 | z_0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Für eine hinreichende Bedingung ist die Hesse-Matrix an der Stelle $(x_0 | y_0 | z_0)$ aufzustellen:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad M \text{ ist symmetrisch.}$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 | y_0 | z_0)$$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} \neq \vec{0}, M \text{ ist positiv definit}$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} \neq \vec{0}, M \text{ ist negativ definit}$

alternativ

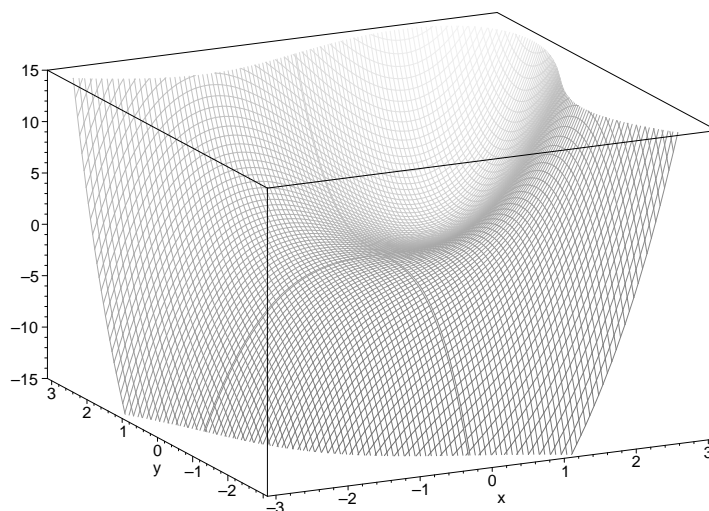
$$\begin{matrix} M_1 & & M_2 & & M_3 \\ \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\det M_1 > 0, \det M_2 > 0, \det M_3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 | y_0 | z_0)$$

$$\det M_1 < 0, \det M_2 > 0, \det M_3 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

Das Kriterium kann für $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ verallgemeinert werden. Für ein lokales Maximum ist die Reihe der Vorzeichen der Hauptabschnittsdeterminanten alternierend und beginnt mit -1 .

Extrema Beispiel



Wir suchen nach Extremwerten für die Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Die notwendige Bedingung lautet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= 0 & 3x^2 - 3y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= 0 & 3y^2 - 3x &= 0\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = y^2$.

Dies in die erste Gleichung eingesetzt, y ausgeklammert, ergibt $y_1 = 0, y_2 = 1$.

Falls $y_1 = 0$ ist, folgt mit der ersten Gleichung $x_1 = 0$,

so dass der erste Kandidat für einen Extremwert $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Falls $y_2 = 1$ ist, folgt mit der ersten Gleichung $x_{1/3} = \pm 1$.

$x_3 = -1$ scheidet aus, weil die zweite Gleichung nicht erfüllt wird.

Der zweite Kandidat für einen Extremwert ist $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinreichende Bedingung

Die (symmetrische) Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

wird an den Stellen \vec{x}_1, \vec{x}_2 auf positiv/negativ definit überprüft.

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -3u_1u_2 - 3u_1u_2$$

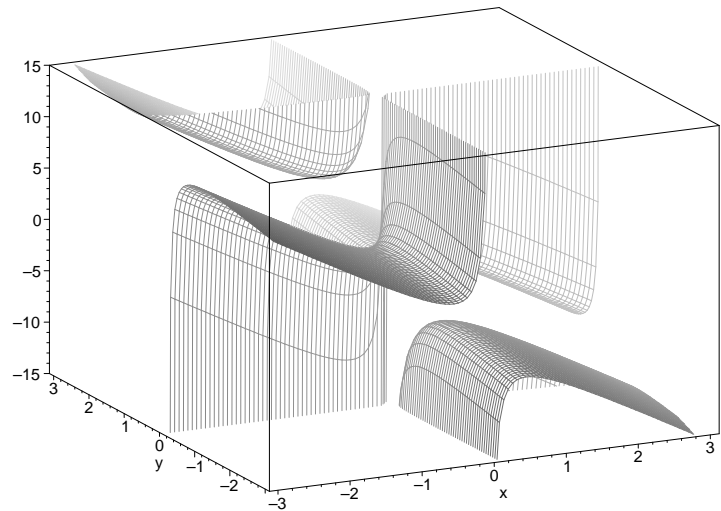
für $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ mal positiv, mal negativ

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 6(u_1^2 + u_2^2 - u_1u_2) > 0 \quad \text{beachte: } (u_1 - u_2)^2 = u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2$$

\implies lokales Minimum an der Stelle \vec{x}_1

Extrema weiteres Beispiel



Wir suchen nach Extremwerten für die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$.

Die notwendige Bedingung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= 0 & \frac{1}{x^2} - 4 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= 0 & -\frac{1}{y^2} + 1 &= 0 & x_{1/2} = \pm \frac{1}{2}, \quad y_{1/2} = \pm 1 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung

Die (symmetrische) Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

wird an den 4 Stellen auf positiv/negativ definit überprüft.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Sattelpunkt}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Maximum}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Minimum}$$

$$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Sattelpunkt}$$

↑

Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen

$$f(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \text{Max! (oder Min!)}$$

Nebenbedingungen in die gleich-Null-Form bringen:

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Lagrange-Funktion notieren, für jede Nebenbedingung eine neue Variable λ_i :

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, x_3)$$

Gleichungssystem aufstellen und lösen:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(\quad) = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{\partial}{\partial x_1} f(\quad) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(\quad) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(\quad) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(\quad) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} L(\quad) = 0$$

$$g_1(\quad) = 0$$

$$g_2(\quad) = 0$$

↑ Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

1. Man bestimme denjenigen Punkt in der Ebene $z = x + y$, der vom Punkt $P(1 | 0 | 0)$ den kleinsten Abstand hat.

$$L(x, y, z, \lambda) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y - z) \quad d \text{ minimal gdw. } d^2 \text{ minimal}$$

1. $2(x - 1) + \lambda = 0$
2. $2y + \lambda = 0$
3. $2z - \lambda = 0$
4. $x + y - z = 0$

$$2. + 3. \implies z = -y$$

$$\text{mit 4.} \implies y = -\frac{x}{2}$$

$$\text{mit 2.} \implies \lambda = x$$

$$\text{mit 1.} \implies x = \frac{2}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{3}$$

2. Man bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x \cdot y$ auf dem Einheitskreis.

$$L(x, y, \lambda) = x \cdot y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

1. $y + 2\lambda x = 0$
2. $x + 2\lambda y = 0$
3. $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$1. \cdot x - 2. \cdot y \implies x^2 = y^2$$

$$\text{mit 3.} \implies x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}$$

$$f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1) = -\frac{1}{2}$$

3. Man bestimme die Punkte auf der Fläche $z = \frac{1}{xy}$ mit geringstem Abstand zum Nullpunkt des Koordinatensystems.

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - \frac{1}{xy}) \quad d \text{ minimal gdw. } d^2 \text{ minimal}$$

1. $2x + \frac{\lambda}{x^2 y} = 0$
 2. $2y + \frac{\lambda}{x y^2} = 0$
 3. $2z + \lambda = 0$
 4. $z - \frac{1}{xy} = 0$
- $$x_{1/2} = \pm 1, \quad y_{1/2} = \pm 1$$

Hinreichende Bedingung

Bei Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen wird die Art der Extrema über die Definitheit der Hesse-Matrix bestimmt (positiv definit lokales Minimum, negativ definit lokales Maximum). Dieses Vorgehen kann übertragen werden.

Die zu untersuchende kritische Stelle wird in die Matrix (z.B.)

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix}$$

Das ist die Hesse-Matrix einer geänderten Lagrange-Funktion $L(x, y)$. Die λ -Variablen wurden zu Parametern.

eingesetzt, die dann auf Definitheit überprüft wird.

L_x, L_y wurden bereits für die kritische Stelle ermittelt.

Man bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x + y$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$.

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

1. $1 + 2\lambda x = 0$
2. $1 + 2\lambda y = 0$
3. $x^2 + y^2 - 1 = 0$

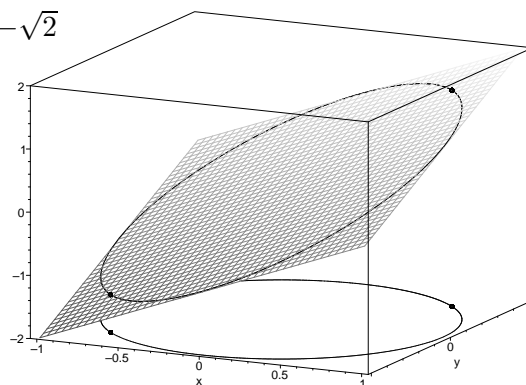
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\implies \text{Max}(x_1 | y_1), \quad \text{Min}(x_2 | y_2)$$

Aufgrund der Funktionswerte $f(x_1, y_1) = \sqrt{2}$, $f(x_2, y_2) = -\sqrt{2}$ lag das Ergebnis ohnehin auf der Hand.



Der Einheitskreis wurde nach unten verschoben.

↑

↑ exakte Differentialgleichung

Sei eine DGL der Art

$$P(x, y) + Q(x, y) \cdot y' = 0$$

zu lösen.

Die DGL heißt *exakt*, wenn eine Funktion $F(x, y)$ existiert, so dass $F_x = P$ und $F_y = Q$ gilt (P, Q stetig).

Wenn F existiert, ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen unerheblich (Satz von Schwarz):

$$F_{xy} = F_{yx}$$

Es ist daher zunächst

$$(F_{xy} =) P_y = Q_x (= F_{yx})$$

zu überprüfen.

$F(x, y)$ wird durch Integration von $P = F_x$ nach x (Variante 1) oder von $Q = F_y$ nach y (Variante 2) berechnet, je nachdem, was einfacher ist.

Exakte Differentialgleichung

Variante 1

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y) \quad *$$

P nach x integrieren, $C(y)$ addieren

$$F_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + C'(y) \stackrel{!}{=} Q(x, y) \quad \implies \quad C'(y) = \dots$$

partiell nach y ableiten,
mit Q gleichsetzen
und nach $C'(y)$ umstellen

$$C(y) = \int \dots dy$$

$C'(y)$ nach y integrieren und in $*$ einsetzen

Variante 2

$$F(x, y) = \int Q(x, y) dy + C(x) \quad *$$

Q nach y integrieren, $C(x)$ addieren

$$F_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int Q(x, y) dy + C'(x) \stackrel{!}{=} P(x, y) \quad \implies \quad C'(x) = \dots$$

partiell nach x ableiten,
mit P gleichsetzen
und nach $C'(x)$ umstellen

$$C(x) = \int \dots dx$$

$C'(x)$ nach x integrieren und in $*$ einsetzen

$F(x, y) = C$ ist eine implizite Darstellung der Lösungskurve.

Falls eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gegeben ist, wird die Konstante C angepasst.

$F(x, y) = C$ wird, wenn möglich, nach y aufgelöst.

einfaches Beispiel einer exakten Differentialgleichung

$$\frac{1}{250}xy + \left(\frac{1}{500}x^2 + \frac{1}{4}\right)y' = 0, \quad y(0) = 4$$

Exakte Differentialgleichung

$$F(x, y) = \frac{1}{500}yx^2 + \frac{1}{4}y$$

$$F(0, 4) = 1$$

$$F(x, y) = 1$$

$$y(x) = \frac{500}{125 + x^2}$$

Exakte Differentialgleichung

In einer chemischen Reaktion setzen sich die Stoffe A und B zu einem neuen Stoff zusammen. Man kann annehmen, dass die Geschwindigkeit der Reaktion proportional zu den jeweils vorhandenen Mengen an A und B ist. Dies führt zur Differentialgleichung

$$y' = k(a - y) \cdot (b - y)$$

Wir bringen sie auf die Form

$$-k + \frac{1}{(a - y) \cdot (b - y)} y' = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung $P_y = Q_x$ ist erfüllt.

Variante 1

$$F(t, y) = \int P(t, y) dt + C(y) = -kt + C(y)$$

$$F_y(t, y) = C'(y) \stackrel{!}{=} Q(t, y) = \frac{1}{(a - y) \cdot (b - y)}$$

$$C(y) = \frac{1}{a - b} \left[\int \frac{dy}{b - y} - \int \frac{dy}{a - y} \right] + C$$

$$\text{Partialbruchzerlegung} \quad \frac{1}{(a - y) \cdot (b - y)} = \frac{1}{(a - b) \cdot (b - y)} - \frac{1}{(a - b) \cdot (a - y)}$$

integrieren ergibt:

$$-kt + \frac{1}{a - b} \ln \frac{a - y}{b - y} + C = 0$$

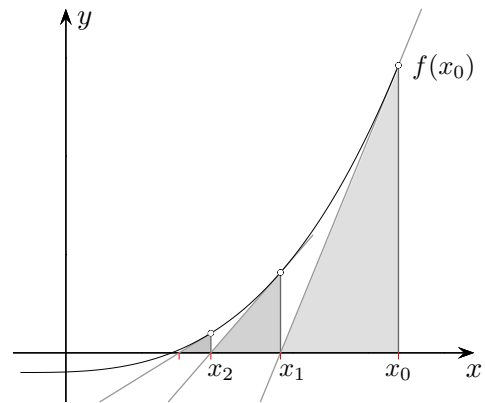
Um C zu bestimmen, muss berücksichtigt werden, dass zur Zeit $t = 0$ die Menge an umgesetztem Material $y = 0$ ist.

$$\frac{1}{a - b} \ln \frac{a}{b} + C = 0 \quad \implies \quad C = \frac{1}{a - b} \ln \frac{b}{a}$$

Das Endresultat lautet

$$\frac{1}{a - b} \ln \frac{b(a - y)}{a(b - y)} = kt.$$

↑ Newton-Verfahren mehrdimensional



Betrachtet man die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren aus einem bestimmten Blickwinkel, so erscheint die Verallgemeinerung auf den \mathbb{R}^n plausibel.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{Startwert } x_0$$

$$\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{\Delta x_n = z} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x_n) \cdot z = -f(x_n)$$

Die letzte Zeile ist eine Gleichung für z , die zu lösen ist.
Der neue Wert ergibt sich zu $x_{n+1} = x_n + z$.

Z.B. führt die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y)$ auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Es ist daher ein Gleichungssystem der Art

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Dies kann iterativ erfolgen. In jedem Schritt ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_n, y_n) \\ -f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix} \quad \text{Startvektor } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Der neue Vektor ergibt sich zu } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

↑

Newton-Verfahren mehrdimensional

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y, z)$ führt auf das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = 0$$

Es ist daher ein Gleichungssystem der Art

$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

$$f_3(x, y, z) = 0$$

zu lösen. Dies kann iterativ erfolgen. In jedem Schritt ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_n, y_n, z_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_n, y_n, z_n)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(x_n, y_n, z_n)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(x_n, y_n, z_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_n, y_n, z_n)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(x_n, y_n, z_n)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3(x_n, y_n, z_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(x_n, y_n, z_n)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(x_n, y_n, z_n)}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_n, y_n, z_n) \\ -f_2(x_n, y_n, z_n) \\ -f_3(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}$$

$$\text{Der neue Vektor ergibt sich zu } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Newton-Verfahren Beispiel

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

An welcher Stelle $(x | y)$ ist die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt?

Startvektor sei $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Newton-Verfahren Beispiel

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

An welcher Stelle $(x | y)$ ist die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt?

Startvektor sei $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= 0 & 3x^2 - 3y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= 0 & 3y^2 - 3x &= 0 \end{aligned}$$

$$f_1(x, y) = 3x^2 - 3y$$

$$f_2(x, y) = 3y^2 - 3x$$

Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} \\ -\frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{16}{15} \\ \frac{16}{15} \end{pmatrix}$$

Die Lösung $(1 | 1)$ war auch schon vorher sichtbar. Die Rechnung dient der Erläuterung.

↑

↑ Partielle Integration

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

↑ Integration durch Substitution

Der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad \text{mit } g(t_1) = a \quad \text{und} \quad g(t_2) = b$$

liegt ein Wechsel der Variablen von x nach t zugrunde.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$