Mathematik 2

Inhaltsverzeichnis

Kurvendiskussion $\quad f(x) = e^{-x^2}$

1. Symmetrie:
   Der Graph ist achsensymmetrisch, da $f(-x) = f(x)$.

2. Nullstellen:
   Bed.: $f(x) = 0$
   Es sind keine Nullstellen vorhanden, da e^x stets positiv ist.

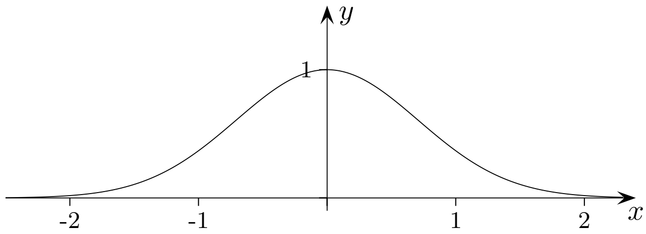
3. Extrema:
   notw. Bed.: $f'(x) = 0$

   $$f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$$
   $$x = 0 \qquad f''(0) = -2 \qquad Max(\,0 \mid 1\,)$$

4. Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$

   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

   Auch ohne die 2. Ableitung wäre nun zu erkennen, dass $E(\,0 \mid 1\,)$ ein Maximum sein muss.



5. Wendepunkte:
   notw. Bed.: $f''(x) = 0$

   $$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$$
   $$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad W_{1/2}(\,\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{1}{\sqrt{e}}\,)$$

   Die Existenz der Wendepunkte folgt aus dem Verhalten von f für $x \longrightarrow \pm\infty$.

Funktion $\quad f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

1. Nullstellen:
   Bed.: $f(x) = 0$
   $$x = 0$$

2. Extrema:
   notw. Bed.: $f'(x) = 0$

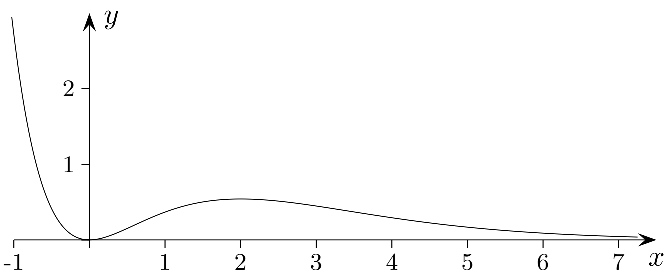
   $$f'(x) = e^{-x}\,(2x - x^2) \qquad f''(x) = e^{-x}(x^2-4x+2)$$
   $$x_1 = 0 \qquad f''(0) = 2 \qquad Min(\,0 \mid 0\,)$$
   $$x_2 = 2 \qquad f''(2) < 0 \qquad Max(\,2 \mid \frac{4}{e^2}\,)$$

3. Verhalten von f für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

4. Wendepunkte:
   notw. Bed.: $f''(x) = 0$
   $$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

   Begründung für die Existenz der Wendepunkte ...



Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{12x-9}{x^2-x-2}\ dx \ = ?$$

Die zu integrierende Funktion besitzt die Polstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2,$ beachte: $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Es erscheint plausibel, dass die Funktion sich aus einer Summe zweier Funktionen zusammensetzt, die jeweils nur eine dieser Polstellen haben. Dies führt zu:

$$\begin{aligned} \frac{12x-9}{x^2-x-2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \\ &= \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 12 \\ -2A & + & B & = & -9 \\ \hline & & A & = & 7 \\ & & B & = & 5 \end{array}$$

$$\int \frac{12x-9}{x^2-x-2}\ dx \ = \int \frac{7}{x+1}\ dx \ + \int \frac{5}{x-2}\ dx \ = \ 7\ \ln|\,x+1\,| \ +5\ \ln|\,x-2\,| \ + C$$

alternativ:

$$\frac{12x-9}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \quad |\cdot(x+1)$$

$$\frac{12x-9}{x-2} = A + \frac{B(x+1)}{x-2}$$

$$x \ = -1 \ \implies \ A = 7, \quad \text{entsprechend } \ B = 5$$

Aufg.

1. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\ dx$

2. $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2-2x}\ dx$

1. $\displaystyle \int \frac{2}{x^2-1}\, dx \;=\; \int \frac{1}{x-1}\, dx \;-\; \int \frac{1}{x+1}\, dx \;=\; \ln|\,x-1\,| \;-\; \ln|\,x+1\,| \;+C$

2. $\displaystyle \int \frac{4x-1}{x^2-2x}\, dx \;=\; \int \frac{1}{2x}\, dx \;+\; \int \frac{7}{2(x-2)}\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}\ln|\,x\,| \;+\tfrac{7}{2}\ln|\,x-2\,| \;+C$

Regel von l´Hospital

Die Regel von l´Hospital vereinfacht in vielen Fällen die Grenzwertberechnungen.

Betrachten wir das Beispiel: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2}{x} = \ ?$ Hier liegt der Fall $\dfrac{0}{0}$ vor.

Nach der Regel von l´Hospital kann der Grenzwert bestimmt werden, indem man Zähler und Nenner getrennt ableitet. Beachte: Dies hat nichts mit der Quotientenregel zu tun!

Also: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x}{1} = 2e^0 = 2$

Mit Hilfe der Regel von l´Hospital lassen sich Grenzwerte für die Fälle $\dfrac{0}{0}$ und $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ mit $x \to \infty$, $x \to -\infty$ oder $x \to a$ ermitteln.

Die Regel kann wiederholt angewandt werden, falls der Fall $\dfrac{0}{0}$, bzw. $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$, erhalten bleibt.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6} = \infty$$

Wir können den Satz von l´Hospital für den Fall $\dfrac{0}{0}$ und $x \to 0$ einsehen.

Für die beiden Funktionen f und g gelte, dass sie durch den Ursprung verlaufen. Dann gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} \qquad \text{, falls} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existiert.}$$

Begründung: $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(0)\,x}{g'(0)\,x} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$ f und g werden durch ihre Tangenten im Ursprung approximiert.

Der Fall $0 \cdot \infty$ kann manchmal auf einen der genannten Fälle zurückgeführt werden.

Strenggenommen existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$ nicht, da ein Grenzwert eine reelle Zahl ist. Diese Schreibweise beinhaltet, dass die Funktion $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ für $x \to \infty$ unbegrenzt wächst.

1. Bestimme die Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 \cdot e^{-x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

   c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \cdot \ln x$ d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{5x^3 - 4x^2}{2x^5 + 8x^3}$

1. Lösungen

a) 0 *b)* 0

c) 0 *d)* $-\infty$

Extrema von Funktionen mit 2 Variablen

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y)$ an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 0$$

Für eine hinreichende Bedingung ist die Hesse-Matrix aufzustellen:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

partielle Ableitungen an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0)$, die Reihenfolge der Ableitungen ist für zweimal stetig differenzierbare Funktionen unerheblich. M ist daher symmetrisch.

$$(u_1, u_2) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 \,|\, y_0)$$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, M ist positiv definit

$$(u_1, u_2) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, M ist negativ definit

$\vec{u} \longrightarrow \vec{u}^{\mathrm{T}} M \vec{u}$ ist die Verallgemeinerung von $x \longrightarrow f''(x_0) x^2$.
Das Vorzeichen von $f''(x_0)$ bestimmt die Art des Extremums.

alternativ

$$\det M > 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 \,|\, y_0)$$

$$\det M > 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

$$\det M < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Sattelpunkt an der Stelle } (x_0 \,|\, y_0)$$

Extrema von Funktionen mit 3 Variablen

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y, z)$ an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0 \,|\, z_0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Für eine hinreichende Bedingung ist die Hesse-Matrix an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0 \,|\, z_0)$ aufzustellen:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \qquad M \text{ ist symmetrisch.}$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 \,|\, y_0 \,|\, z_0)$$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, M ist positiv definit

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, M ist negativ definit

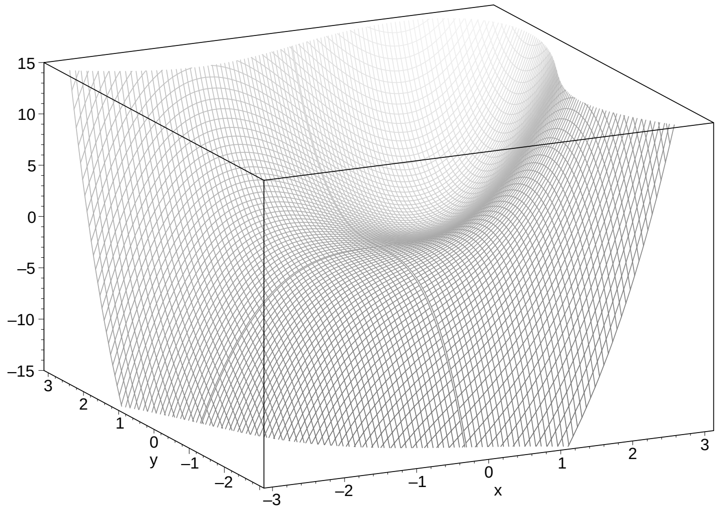
alternativ

$$\underset{M_1}{\begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}} \qquad \underset{M_2}{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}} \qquad \underset{M_3}{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}}$$

$$\det M_1 > 0, \ \det M_2 > 0, \ \det M_3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 \,|\, y_0 \,|\, z_0)$$
$$\det M_1 < 0, \ \det M_2 > 0, \ \det M_3 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

Das Kriterium kann für $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verallgemeinert werden. Für ein lokales Maximum ist die Reihe der Vorzeichen der Hauptabschnittsdeterminanten alternierend und beginnt mit -1.

Extrema Beispiel



Wir suchen nach Extremwerten für die Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Die notwendige Bedingung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \qquad 3x^2 - 3y = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad 3y^2 - 3x = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = y^2$.
Dies in die erste Gleichung eingesetzt, y ausgeklammert, ergibt $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.
Falls $y_1 = 0$ ist, folgt mit der ersten Gleichung $x_1 = 0$,
so dass der erste Kandidat für einen Extremwert $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.
Falls $y_2 = 1$ ist, folgt mit der ersten Gleichung $x_{1/3} = \pm 1$.
$x_3 = -1$ scheidet aus, weil die zweite Gleichung nicht erfüllt wird.
Der zweite Kandidat für einen Extremwert ist $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinreichende Bedingung
Die (symmetrische) Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

wird an den Stellen $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ auf positiv/negativ definit überprüft.

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -3u_1u_2 - 3u_1u_3$$

für $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ mal positiv, mal negativ

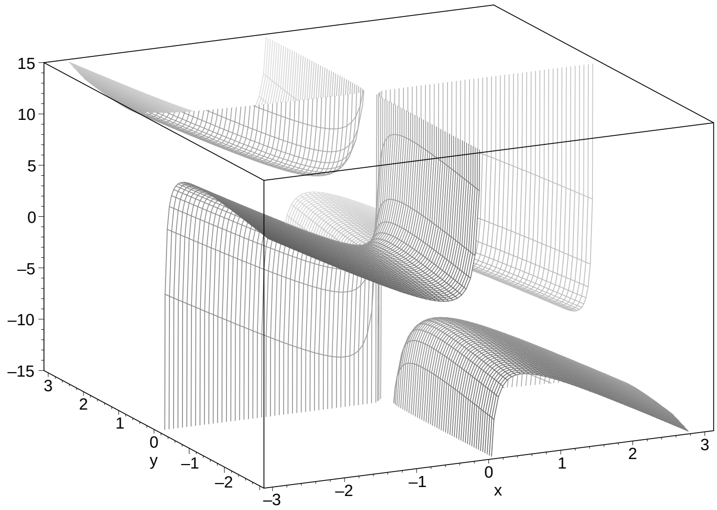
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 6(u_1^2 + u_2^2 - u_1u_2) > 0$$

beachte: $(u_1 - u_2)^2 = u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2$

$\Longrightarrow$ lokales Minimum an der Stelle $\vec{x}_1$

Extrema weiteres Beispiel



Wir suchen nach Extremwerten für die Funktion $f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y$.

Die notwendige Bedingung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \qquad \frac{1}{x^2} - 4 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad -\frac{1}{y^2} + 1 = 0 \qquad x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}, \quad y_{1/2} = \pm 1$$

Hinreichende Bedingung
Die (symmetrische) Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

wird an den 4 Stellen auf positiv/negativ definit überprüft.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Sattelpunkt}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Maximum}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Minimum}$$

$$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Sattelpunkt}$$

Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen

$f(x_1, x_2, x_3) \quad \longrightarrow \quad \mathit{Max}! \quad (\text{oder } \mathit{Min}!)$

Nebenbedingungen in die gleich-Null-Form bringen:

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Lagrange-Funktion notieren, für jede Nebenbedingung eine neue Variable λ_i:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 \, g_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 \, g_2(x_1, x_2, x_3)$$

Gleichungssystem aufstellen und lösen:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(\quad) = 0 \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\partial}{\partial x_1} f(\quad) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(\quad) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(\quad) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(\quad) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x_3} L(\quad) = 0$$
$$g_1(\quad) = 0$$
$$g_2(\quad) = 0$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

1. Man bestimme denjenigen Punkt in der Ebene $z = x + y$,
   der vom Punkt $P(1\,|\,0\,|\,0)$ den kleinsten Abstand hat.

   $L(x, y, z, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y - z)$ $\qquad$ d minimal gdw. d^2 minimal

   $$\begin{aligned} &1. & 2(x-1) + \lambda &= 0 \\ &2. & 2y + \lambda &= 0 \\ &3. & 2z - \lambda &= 0 \\ &4. & x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

   $2. + 3. \quad \Longrightarrow \quad z = -y$

   mit 4. $\quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{x}{2}$

   mit 2. $\quad \Longrightarrow \quad \lambda = x$

   mit 1. $\quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}, \; y = -\frac{1}{3}, \; z = \frac{1}{3}$

2. Man bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = x \cdot y$ auf dem Einheitskreis.

   $L(x, y, \lambda) = x \cdot y + \lambda(x^2 + x^2 - 1)$

   $$\begin{aligned} &1. & y + 2\lambda x &= 0 \\ &2. & x + 2\lambda y &= 0 \\ &3. & x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

   $1. \cdot x - 2. \cdot y \quad \Longrightarrow \quad x^2 = y^2$

   mit 3. $\quad \Longrightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

   $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}$

   $f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1) = -\frac{1}{2}$

3. Man bestimme die Punkte auf der Fläche $z = \frac{1}{xy}$ mit geringstem Abstand
   zum Nullpunkt des Koordinatensystems.

   $L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - \frac{1}{xy})$ $\qquad$ d minimal gdw. d^2 minimal

   $$\begin{aligned} &1. & 2x + \frac{\lambda}{x^2 y} &= 0 \\ &2. & 2y + \frac{\lambda}{x y^2} &= 0 \\ &3. & 2z + \lambda &= 0 \\ &4. & z - \frac{1}{xy} &= 0 \end{aligned}$$

   $x_{1/2} = \pm 1, \quad y_{1/2} = \pm 1$

Hinreichende Bedingung

Bei Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen wird die Art der Extrema über die Definitheit der Hesse-Matrix bestimmt (positiv definit lokales Minimum, negativ definit lokales Maximum).
Dieses Vorgehen kann übertragen werden.
Die zu untersuchende kritische Stelle wird in die Matrix (z. B.)

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix}$$

Das ist die Hesse-Matrix einer geänderten Lagrange-Funktion $L(x,y)$.
Die λ-Variablen wurden zu Parametern.

eingesetzt, die dann auf Definitheit überprüft wird.
L_x, L_y wurden bereits für die kritische Stelle ermittelt.

Man bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x,y) = x + y$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$.

$$L(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + x^2 - 1)$$

$$\begin{array}{lrcl} 1. & 1 + 2\lambda x &=& 0 \\ 2. & 1 + 2\lambda y &=& 0 \\ 3. & x^2 + y^2 - 1 &=& 0 \end{array}$$

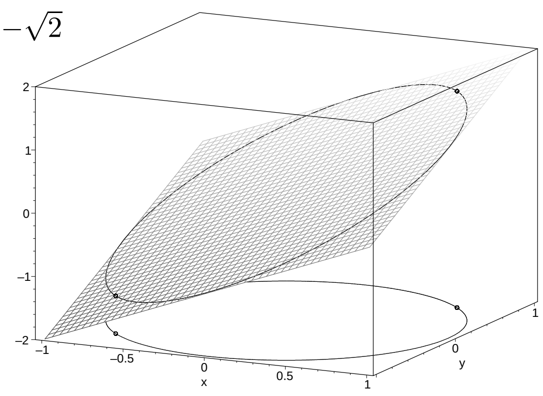
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathit{Max}(x_1 \mid y_1), \quad \mathit{Min}(x_2 \mid y_2)$$

Aufgrund der Funktionswerte $f(x_1, y_1) = \sqrt{2},\ f(x_2, y_2) = -\sqrt{2}$
lag das Ergebnis ohnehin auf der Hand.



Der Einheitskreis wurde nach unten verschoben.

exakte Differentialgleichung

Sei eine DGL der Art

$$P(x, y) + Q(x, y) \cdot y' = 0$$

zu lösen.
Die DGL heißt exakt, wenn eine Funktion $F(x, y)$ existiert, so dass $F_x = P$ und $F_y = Q$ gilt (P, Q stetig).

Wenn F existiert, ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen unerheblich (Satz von Schwarz):

$$F_{xy} = F_{yx}$$

Es ist daher zunächst

$$(F_{xy} =) \;\; P_y = Q_x \;\; (= F_{yx})$$

zu überprüfen.

$F(x, y)$ wird durch Integration von $P = F_x$ nach x (Variante 1) oder von $Q = F_y$ nach y (Variante 2) berechnet, je nachdem, was einfacher ist.

Exakte Differentialgleichung

Variante 1

$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y) \quad *$ — P nach x integrieren, $C(y)$ addieren

$F_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \;+\; C'(y) \overset{!}{=} Q(x,y) \quad\Longrightarrow\quad C'(y) = \ldots$ — partiell nach y ableiten, mit Q gleichsetzen und nach $C'(y)$ umstellen

$C(y) = \int \ldots\, dy$ — $C'(y)$ nach y integrieren und in $*$ einsetzen

Variante 2

$F(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + C(x) \quad *$ — Q nach y integrieren, $C(x)$ addieren

$F_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\int Q(x,y)\,dy \;+\; C'(x) \overset{!}{=} P(x,y) \quad\Longrightarrow\quad C'(x) = \ldots$ — partiell nach x ableiten, mit P gleichsetzen und nach $C'(x)$ umstellen

$C(x) = \int \ldots\, dx$ — $C'(x)$ nach x integrieren und in $*$ einsetzen

$F(x,y) = C$ ist eine implizite Darstellung der Lösungskurve.

Falls eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gegeben ist, wird die Konstante C angepasst.

$F(x,y) = C$ wird, wenn möglich, nach y aufgelöst.

einfaches Beispiel einer exakten Differentialgleichung

$\frac{1}{250}xy + \left(\frac{1}{500}x^2 + \frac{1}{4}\right)y' = 0, \quad y(0) = 4$

Exakte Differentialgleichung

$F(x,y) = \frac{1}{500}yx^2 + \frac{1}{4}y$

$F(0,4) = 1$

$F(x,y) = 1$

$y(x) = \dfrac{500}{125 + x^2}$

Exakte Differentialgleichung

In einer chemischen Reaktion setzen sich die Stoffe A und B zu einem neuen Stoff zusammen.
Man kann annehmen, dass die Geschwindigkeit der Reaktion proportional zu den jeweils vorhandenen Mengen an A und B ist. Dies führt zur Differentialgleichung

$$y' = k(a-y)\cdot(b-y)$$

Wir bringen sie auf die Form

$$-k + \frac{1}{(a-y)\cdot(b-y)}\,y' = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung $P_y = Q_x$ ist erfüllt.

Variante 1

$$F(t,y) = \int P(t,y)\,dt + C(y) = -kt + C(y)$$

$$F_y(t,y) = C'(y) \overset{!}{=} Q(t,y) = \frac{1}{(a-y)\cdot(b-y)}$$

$$C(y) = \frac{1}{a-b}\left[\int \frac{dy}{b-y} - \int \frac{dy}{a-y}\right] + C$$

Partialbruchzerlegung $\quad \frac{1}{(a-y)\cdot(b-y)} = \frac{1}{(a-b)\cdot(b-y)} - \frac{1}{(a-b)\cdot(a-y)}$

integrieren ergibt:

$$-kt + \frac{1}{a-b}\ln\frac{a-y}{b-y} + C = 0$$

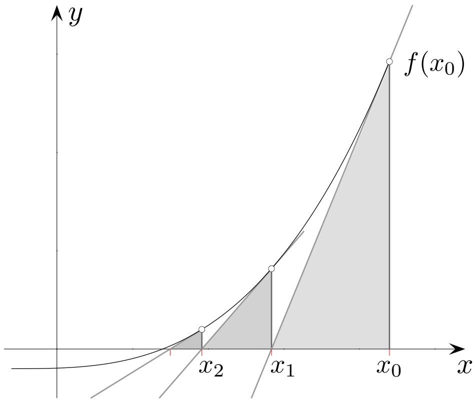
Um C zu bestimmen, muss berücksichtigt werden, dass zur Zeit $t=0$
die Menge an umgesetztem Material $y=0$ ist.

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} + C = 0 \quad\Longrightarrow\quad C = \frac{1}{a-b}\ln\frac{b}{a}$$

Das Endresultat lautet

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{b(a-y)}{a(b-y)} = kt.$$

Newton-Verfahren mehrdimensional



Betrachtet man die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren
aus einem bestimmten Blickwinkel, so erscheint die Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^n$ plausibel.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{Startwert } x_0$$

$$\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{\Delta x_n = z} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x_n) \cdot z = -f(x_n)$$

Die letzte Zeile ist eine Gleichung für z, die zu lösen ist.
Der neue Wert ergibt sich zu $x_{n+1} = x_n + z$.

Z. B. führt die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y)$ auf das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0$$

Es ist daher ein Gleichungssystem der Art

$$f_1(x, y) = 0$$

$$f_2(x, y) = 0$$

zu lösen. Dies kann iterativ erfolgen. In jedem Schritt ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_n, y_n)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_n, y_n)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_n, y_n) \\ -f_2(x_n, y_n) \end{pmatrix} \qquad \text{Startvektor } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Der neue Vektor ergibt sich zu $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

Newton-Verfahren mehrdimensional

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y, z)$ führt auf das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = 0$$

Es ist daher ein Gleichungssystem der Art

$$f_1(x, y, z) = 0$$
$$f_2(x, y, z) = 0$$
$$f_3(x, y, z) = 0$$

zu lösen. Dies kann iterativ erfolgen. In jedem Schritt ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_n, y_n, z_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_n, y_n, z_n)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(x_n, y_n, z_n)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(x_n, y_n, z_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_n, y_n, z_n)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(x_n, y_n, z_n)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3(x_n, y_n, z_n)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(x_n, y_n, z_n)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(x_n, y_n, z_n)}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_n, y_n, z_n) \\ -f_2(x_n, y_n, z_n) \\ -f_3(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}$$

Der neue Vektor ergibt sich zu $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

Newton-Verfahren Beispiel

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

An welcher Stelle $(x \mid y)$ ist die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt?

Startvektor sei $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Newton-Verfahren Beispiel

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

An welcher Stelle $(x \mid y)$ ist die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt?

Startvektor sei $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \qquad\qquad 3x^2 - 3y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad\qquad 3y^2 - 3x = 0$$

$$f_1(x,y) = 3x^2 - 3y$$
$$f_2(x,y) = 3y^2 - 3x$$

Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{15} \\ -\frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{16}{15} \\ \frac{16}{15} \end{pmatrix}$$

Die Lösung $(1 \mid 1)$ war auch schon vorher sichtbar. Die Rechnung dient der Erläuterung.

Partielle Integration

$$\int u \cdot v' \; dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \; dx$$

Integration durch Substitution

Der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \qquad \text{mit} \quad g(t_1)=a \quad \text{und} \quad g(t_2)=b$$

liegt ein Wechsel der Variablen von x nach t zugrunde.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$