

Kettenbrüche

Um die Verfahren der höheren Mathematik besser verstehen zu können, ist es ratsam, sich über die verwendeten Zahlen Gedanken zu machen. Der Grieche Hippasos (5. Jahrh. v. Chr.) entdeckte, dass die Diagonale eines Quadrats z. B. der Seitenlänge 1 sich nicht ganz exakt berechnen lässt (im Altertum waren nur ganze Zahlen und Brüche bekannt). Die Griechen entwickelten Näherungsbrüche, die $\sqrt{2}$ approximieren. $\sqrt{2}$ ist eine sogenannte irrationale Zahl. Die Brüche, die wiederum die ganzen Zahlen umfassen, und die irrationalen Zahlen ergeben zusammen die reellen Zahlen. Die reellen Zahlen bereiteten den Mathematikern wie Cauchy, Cantor, Weierstraß und Dedekind, die die Existenz, die Eigenschaften und die Rechenregeln dieser Zahlen begründen wollten, in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts viel Kopfzerbrechen.

Um die Schwierigkeiten, die den reellen Zahlen anhafteten, zu verstehen, stelle man sich vor, nur die Brüche zu kennen.

Für uns ist eine reelle Zahl eine Zahl, für die es ein Verfahren gibt, beliebig genaue Näherungsbrüche zu entwickeln, d. h. beliebig viele Stellen dieser Zahl zu berechnen (siehe jedoch letzte Seite).

Solche Verfahren stellen die Kettenbrüche wie

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} \quad \text{dar,} \quad \text{und allgemein:} \quad a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \dots}}}}$$

wobei die Folge der Näherungsbrüche: $1; \quad 1 + \frac{1}{2}; \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}; \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}; \quad \dots$

eine irrationale Zahl - wie wir noch sehen werden - approximiert.

Huygens stand im 17. Jahrhundert bei der Konstruktion eines Planetariums vor der Aufgabe, ineinandergreifende Zahnräder zu konstruieren, deren Zähneanzahl sich wie die Umlaufzeiten (z. B. Erde 365 Erdentage, Mars 687 Erdentage) verhalten. Um das mechanische Problem zu vereinfachen, suchte Huygens einfache Näherungen für das Verhältnis $\frac{365}{687}$.

Mit der Entwicklung in einen Kettenbruch erhalten wir (beachte $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$):

$$\frac{365}{687} = \frac{1}{\frac{687}{365}} = \frac{1}{1 + \frac{322}{365}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{365}{322}}} = \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2 + \frac{1}{21}}}} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{32}$$

Die Näherung ist erstaunlich gut. $\left| \frac{365}{687} - \frac{17}{32} \right| = 0,000045$

Die Entstehung eines Kettenbruchs soll am Beispiel von $\sqrt{2}$ gezeigt werden.

Wir gehen von der Gleichung aus:

$$x = 2 + \frac{1}{x}$$

Die Gleichung multiplizieren wir mit x , die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind:

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

Umgekehrt hätten wir auch x_1 und x_2 vorgeben, eine quadratische Gleichung mit diesen Lösungen aufstellen und umstellen können: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ oder $x^2 + px + q = 0$ mit $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 \cdot x_2$.

Die erste Lösung setzen wir in die obige Gleichung ein und erhalten:

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \quad *$$

oder
$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Für den auf der rechten Seite im Nenner stehenden Term $1 + \sqrt{2}$ setzen wir die rechte Seite von $*$ ein und erhalten:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}$$

Dieser Einsetzungsprozeß läßt sich beliebig oft wiederholen:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}}}$$

Dass die Näherungsbrüche des Kettenbruchs:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

tatsächlich $\sqrt{2}$ approximieren, muss noch nachgewiesen werden.

Aufg.

Entwickle aus der Gleichung einen Kettenbruch für die angegebene Wurzel:

1. $x = 4 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{5}$ 2. $x = 6 + \frac{1}{x}$, $\sqrt{10}$ 3. $x = 4 - \frac{1}{x}$, $\sqrt{3}$

4. $\sqrt{7}$

Lösungen:

1.
$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}$$

2.
$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \dots}}}$$

3.
$$\sqrt{3} = 2 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \frac{1}{4 - \dots}}}$$

Näherungsbruch	stabile Dezimalstellen	Differenz	Quadrat
$\frac{1}{1}$	1, ...	0,50	1,0
$\frac{3}{2}$	1,5 ...	- 0,10	2,25
$\frac{7}{5}$	1,4 ...	0,016	1,96
$\frac{17}{12}$	1,41 ...	- 0,0028	2,006
$\frac{41}{29}$	1,41 ...	0,00049	1,998
$\frac{99}{70}$	1,4142 ...	- 0,000084	2,0002
$\frac{239}{169}$	1,4142 ...	0,000014	1,99996
$\frac{577}{408}$	1,41421 ...	- 0,0000024	2,000006
$\frac{1393}{985}$	1,414213 ...	0,00000042	1,999998
$\frac{3363}{2378}$	1,414213 ...	- 0,000000073	2,0000001
$\frac{8119}{5741}$	1,4142135 ...	0,000000012	1,99999996
$\frac{19601}{13860}$	1,41421356 ...	- 0,0000000021	2,000000005
$\frac{47321}{33461}$	1,414213562 ...	0,00000000037	1,999999991
$\frac{114243}{80782}$	1,414213562 ...	- 0,000000000063	2,0000000001
$\frac{275807}{195025}$	1,4142135623 ...	0,000000000011	1,9999999997
$\frac{665857}{470832}$	1,41421356237 ...	- 0,000000000002	2,000000000004

Dass diese Brüche $\frac{Z_n}{N_n}$, $n = 1, 2, \dots$ tatsächlich

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807317668 \dots$$

approximieren, erkennen wir an ihren Quadraten.

Die Abweichung der Quadrate von 2 ist durch

$$\left(\frac{Z_n}{N_n}\right)^2 = 2 + (-1)^n \frac{1}{N_n^2} \quad (1)$$

gegeben.

Um dieses Ergebnis zu beweisen, ist eine genauere Betrachtung der Näherungsbrüche erforderlich.

Man entdeckt zunächst den rekursiven Aufbau von Zähler und Nenner ($n \geq 3$) :

$$Z_n = 2 \cdot Z_{n-1} + Z_{n-2} \quad (2)$$

$$N_n = 2 \cdot N_{n-1} + N_{n-2} \quad (3)$$

Zähler und Nenner werden daher stets grösser.

Die Betrachtung der Näherungsbrüche des Kettenbruchs:

führt zum allgemeinen Zusammenhang:

$$Z_n = a_n \cdot Z_{n-1} + Z_{n-2} \quad (4)$$

$$N_n = a_n \cdot N_{n-1} + N_{n-2} \quad (5)$$

Weiter ist zu erkennen:

$$Z_n^2 = 2 \cdot N_n^2 + (-1)^n \quad (6)$$

Dies ist die Behauptung (1).

Beim Beweis von (6) stößt man auf ($n \geq 2$) :

$$Z_n \cdot Z_{n-1} = 2 \cdot N_n \cdot N_{n-1} + (-1)^{n+1} \quad (7)$$

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Näherungsbrüche ist durch

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{N_n \cdot N_{n-1}} \quad (8)$$

gegeben. Dies ergibt umgeformt:

$$Z_n \cdot N_{n-1} - Z_{n-1} \cdot N_n = (-1)^n \quad (9)$$

Es gilt auch ($n \geq 3$) :

$$Z_n \cdot N_{n-2} - Z_{n-2} \cdot N_n = (-1)^{n+1} \cdot 2 \quad (10)$$

Das Beweisschema für die obigen Behauptungen sieht folgendermaßen aus:

Es ist zuerst nachzuweisen, dass die Behauptung für $n = 1$ gilt, sodann ist zu zeigen, dass, wenn sie für $n = 1$ gilt, auch für $n = 2$ richtig ist, dass, wenn sie für $n = 2$ gilt, auch für $n = 3$ richtig ist, usw. (das schon Bewiesene darf also benutzt werden), allgemein:

Es ist zu zeigen, dass, wenn die Behauptung für n gilt, so auch für $n + 1$.

Dieses Beweisschema heisst vollständige Induktion.

Der Nachweis für $n = 1$ heisst Induktionsanfang (möglich ist auch ein Anfang bei $n = 2$ oder $n = 3$).

Kettenbrüche für π und e

$$\pi = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}$$

$$e = 2 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{\dots}}}}$$

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{\dots}}}}}}}}}}}}$$

\mathbb{R}

Die reellen Zahlen, die sich durch einen endlichen Text beschreiben oder durch ein Rechenprogramm charakterisieren lassen, die berechenbaren reellen Zahlen also, stellen nur eine abzählbare Teilmenge von \mathbb{R} dar. Texte der Länge $n = 1, 2, 3, \dots$ lassen sich jeweils lexikographisch ordnen und sind somit abzählbar. Dasselbe gilt für Computerprogramme.

\mathbb{R} ist jedoch überabzählbar. Die unbequeme Wahrheit ist, dass es nicht berechenbare reelle Zahlen gibt, und dann müssen es auch noch überabzählbar viele sein. Das ist der Preis für die Vollständigkeit:

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge von reellen Zahlen besitzt ein Supremum.

Es wurden Folgen von berechenbaren reellen Zahlen konstruiert, deren Grenzwert nicht berechenbar ist. Kurioserweise denkt man sich beim Cantorsche Diagonalverfahren die reellen Zahlen, auch die nicht berechenbaren, in einer Folge angeordnet.

Vergleichen wir die Situation mit der Potenzmenge von \mathbb{N} .

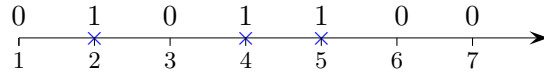
Wir können viele Elemente (abzählbar viele) beschreiben, z. B. alle endlichen und alle diejenigen, denen ein Bildungsgesetz zugrunde liegt. Viele Teilmengen (überabzählbar viele) entziehen sich aufgrund ihrer Komplexität unserem direkten Zugriff, obwohl wir an ihrer Existenz nicht zweifeln.

Die Operationen Vereinigung und Durchschnittsbildung, angewandt auf abzählbar viele beschreibbare Mengen, kann eine Menge ergeben, für die algorithmisch nicht überprüft werden kann, ob ein Element zu dieser Menge gehört.

Es sei nicht verschwiegen, dass es eine konstruktivistische Sichtweise in der Mathematik gibt, die Konstruiertes bevorzugt.

Die Funktionen $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$,

d. h. die 0/1-Folgen, lassen sich bijektiv den Teilmengen von \mathbb{N} zuordnen.



1 bedeutet *in der Menge A enthalten*, hier $A = \{2, 4, 5, \dots\}$

Eine 0/1-Folge kann mit vorangestelltem 0, ... als Dualdarstellung einer reellen Zahl gelesen werden, so dass sich eine Zuordnung von $[0, 1]$ zur Potenzmenge von \mathbb{N} ergibt.

Hierbei ist zu beachten, dass z.B.

0,10101111... und

0,10110000... gleich sind.

Um die Eindeutigkeit zu erhalten, nehmen wir die mit null endenden 0/1-Folgen heraus.

Ihnen entsprechen die endlichen Teilmengen. Diese 0/1-Folgen sind von links nach rechts gelesene Dualdarstellungen $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ der natürlichen Zahlen \mathbb{N}^0 (einschließlich null) und somit abzählbar.

Die Menge der 0/1-Folgen und damit die Potenzmenge von \mathbb{N} ist überabzählbar.

Indirekter (Diagonal-)Nachweis:

Wären sie abzählbar, könnte leicht eine 0/1-Folge angegeben werden, die nicht in der Aufzählung enthalten ist: Ihre jeweils n -te Stelle weicht von der n -ten Stelle der n -ten Folge ab.

Aus dem Widerspruch zur Annahme folgern wir, dass die Negation richtig sein muss.

Die Funktionen $g: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, d. h. die 0/1/2/3 ... /9-Folgen, lassen sich bijektiv den unendlichen Teilmengen von \mathbb{N} zuordnen.

Unendliche Teilmengen von \mathbb{N} werden auch durch streng monoton wachsende Folgen (Aufzählung ihrer Elemente), beschrieben. Der 0/1/2/3 ... /9-Folge a_1, a_2, a_3, \dots wird (umkehrbar) die Folge (Teilmenge) $(a_1 + 1), (a_1 + 1) + (a_2 + 1), (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + (a_3 + 1), \dots$ zugeordnet.

Die Addition der Einsen ist wegen der möglichen Nullen erforderlich.

Hierbei ist wieder zu beachten (0, ... vorangestellt), dass z.B.

0,30499999... und

0,30500000... gleich sind.

Eine Sorte (abzählbar viele) nehmen wir heraus.

Alle 0/1/2/3 ... /9-Folgen mit vorangestelltem a, \dots ($a \in \mathbb{Z}$) bilden die Menge der reellen Zahlen. Nichts soll ausgeschlossen werden.

Zahlen sind virtuell, sie existieren nur in unserem Geist. Daher sind derartige Konstruktionen möglich. Wir hatten auch kein Problem, uns unendlich viele natürliche Zahlen und die Menge aller Teilmengen vorzustellen. Erwartungsgemäß erfordert eine von der Zahldarstellung unabhängige Konstruktion der reellen Zahlen erheblichen Aufwand (Cauchy-Folgen, Dedekindsche Schnitte).