

# Jacobi-Verfahren

$$\begin{array}{rcl} 10x + y - z & = & -2 \\ -x + 8y + z & = & 1 \\ \underline{x - y - 20z} & = & \underline{3} \end{array}$$

Wir wollen uns der Lösung schrittweise nähern.

Es fällt auf, dass die Diagonalelemente dominieren.

Wir formen nach den Variablen auf der Diagonale um und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{2}{10} - \frac{1}{10}y + \frac{1}{10}z \\ y & = & \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}z \\ \underline{z} & = & \underline{-\frac{3}{20} + \frac{1}{20}x - \frac{1}{20}y} \end{array}$$

Ein plausibler Startvektor lautet (die anderen Komponenten werden durch größere Zahlen geteilt):

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

Die erste Iteration ergibt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} - \frac{1}{80} - \frac{3}{200} \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{40} + \frac{3}{160} \\ -\frac{3}{20} - \frac{1}{100} + \frac{3}{400} \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Das Verfahren konvergiert, falls für die Diagonalelemente  $|a_{i,i}| > \sum_{i \neq k} |a_{i,k}|$  gilt.

Matrizenschreibweise ( $\mathbf{A}$  wird in zwei Dreiecksmatrizen und eine Diagonalmatrix zerlegt):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \vec{x} &= (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{R}) \cdot \vec{x} = \vec{b} \\ &= \mathbf{L} \cdot \vec{x} + \mathbf{D} \cdot \vec{x} + \mathbf{R} \cdot \vec{x} = \vec{b} \\ \mathbf{D} \cdot \vec{x} &= \vec{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{R}) \cdot \vec{x} \\ \vec{x} &= \mathbf{D}^{-1} \cdot (\vec{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{R}) \cdot \vec{x}) \end{aligned}$$

iterativer Algorithmus

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} \cdot (\vec{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{R}) \cdot \vec{x}^{(k)})$$

# Gauß-Seidel-Iteration

Das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren) kann so abgeändert werden (Gauß-Seidel, Einzelschrittverfahren), dass in einem Iterationsschritt die neu berechnete  $x$ -Koordinate schon gleich zur Berechnung der  $y$ -Koordinate verwendet wird. Zur Bestimmung der  $z$ -Koordinate werden die schon neu ermittelte  $x$ - und die  $y$ -Koordinate herangezogen.

$$\begin{array}{rcl} 5x - y + 2z & = & 12 \\ 3x + 8y - 2z & = & -25 \\ \underline{x + y + 4z} & = & \underline{6} \end{array}$$

Wir formen nach den Variablen auf der Diagonale um und erhalten:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{12}{5} + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z \\ y & = & -\frac{25}{8} - \frac{3}{8}x + \frac{2}{8}z \\ \underline{z} & = & \underline{\frac{6}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y} \end{array}$$

Startvektor sei:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ \frac{-25 - 3 \cdot 2,4 + 2 \cdot 0}{8} = -4,03 \\ \frac{6 - 2,4 + 4,03}{4} = 1,91 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Matrizenschreibweise ( $\mathbf{A}$  wird wieder zerlegt):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \vec{x} &= (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{R}) \cdot \vec{x} = \vec{b} \\ &= \mathbf{L} \cdot \vec{x} + \mathbf{D} \cdot \vec{x} + \mathbf{R} \cdot \vec{x} = \vec{b} \\ \mathbf{D} \cdot \vec{x} &= \vec{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{R}) \cdot \vec{x} && \text{Das hatten wir schon.} \\ &= \vec{b} - \mathbf{L} \cdot \vec{x} - \mathbf{R} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

In jedem Iterationsschritt gilt dann (Rechnung genau ansehen):

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \vec{x}^{(k+1)} &= \vec{b} - \mathbf{L} \cdot \vec{x}^{(k+1)} - \mathbf{R} \cdot \vec{x}^{(k)} \\ (\mathbf{D} + \mathbf{L}) \cdot \vec{x}^{(k+1)} &= \vec{b} - \mathbf{R} \cdot \vec{x}^{(k)} \\ \vec{x}^{(k+1)} &= (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \cdot \vec{b} - (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{R} \cdot \vec{x}^{(k)} \end{aligned}$$

Das Verfahren konvergiert wieder bei Diagonaldominanz, falls  $\mathbf{A}$  symmetrisch und positiv definit ist oder falls der Spektralradius (Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts) von  $-(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{R}$  kleiner 1 ist. Der Startvektor ist beliebig.

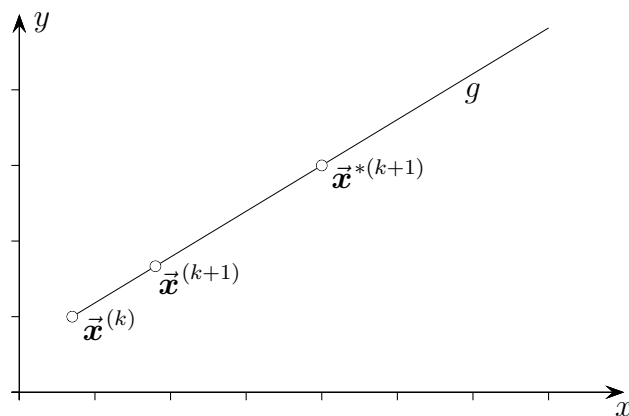
Wird der Startvektor als Linearkombination von Eigenvektoren  $\vec{d}_i$  (Eigenwert  $\lambda_i$ ) dargestellt, entstehen bei der  $k$ ten Iteration Terme wie  $a_i \lambda_i^k \vec{d}_i$ . Für  $|\lambda| < 1$  streben sie gegen null.

## Relaxation für Iterationsalgorithmen (engl. Lockerung, Entspannung)

Die Schrittweite der Iteration können wir beeinflussen.

Nehmen wir an, es liegt  $\vec{x}^{(k)}$  vor und wir führen den nächsten Iterationsschritt aus:  $\vec{x}^{*(k+1)}$

Das Ergebnis wurde umbenannt, weil es noch abgeändert werden soll.



Für das endgültige  $\vec{x}^{(k+1)}$  wäre auch

$$\begin{aligned}\vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} + \omega(\vec{x}^{*(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) \\ &= (1 - \omega)\vec{x}^{(k)} + \omega\vec{x}^{*(k+1)}\end{aligned}$$

mit einem geeignet gewählten  $\omega \in \mathbb{R}$  möglich. Das entspricht einem Punkt auf der Geraden  $g$ .

In  $\vec{x}^{(k+1)} = (1 - \omega)\vec{x}^{(k)} + \omega\vec{x}^{*(k+1)}$  wird für  $\vec{x}^{*(k+1)}$  die rechte Seite des Verfahrens von Jacobi bzw. Gauß-Seidel eingesetzt.

Für  $\omega = 1$  bleibt das Iterationsverfahren unverändert.

Für z.B.  $\omega = 0,3$  nähern wir uns verzögert (vielleicht monoton) der Lösung, allgemein für  $0 < \omega < 1$  (under-relaxation).

Das SOR-Verfahren (successive over-relaxation) verwendet ein  $\omega$  mit  $1 < \omega < 2$ .

Das kann die Konvergenzgeschwindigkeit erhöhen.

# Anhang

Jede Matrix lässt sich in eine untere Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$ ,  
eine Diagonalmatrix  $\mathbf{D}$  und eine obere Dreiecksmatrix  $\mathbf{R}$  zerlegen: d

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$