Householder-Transformation 1958

Eine Matrix kann durch Multiplikation mit einer Matrix $\boldsymbol{Q}$
in eine Dreiecksmatrix überführt werden.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A}$$

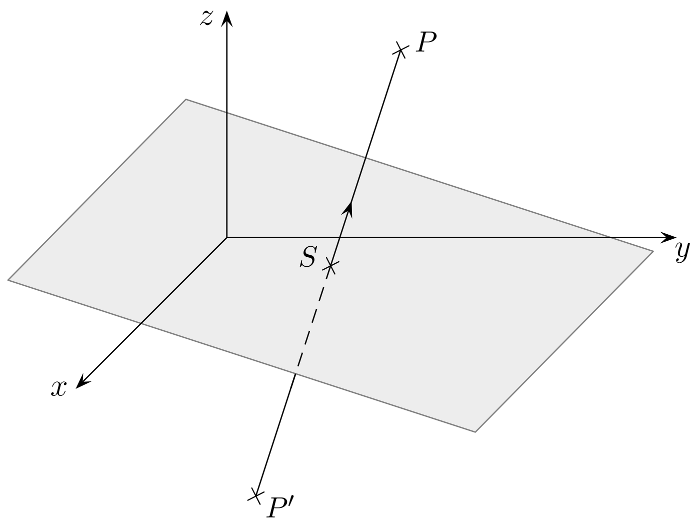
Dies erfolgt durch wiederholte Spiegelungen.
Zunächst wird eine Spiegelmatrix $\boldsymbol{Q}_1$ ermittelt, die Folgendes leistet:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Q}_1$ spiegelt die 1. Spalte (als Ortsvektor oder Punkt) von $\boldsymbol{A}$ auf einen Punkt,
der auf der x-Achse liegt.

Spiegelung

Ein (beliebiger) Punkt P wird an einer Ursprungsebene E gespiegelt, deren Normalenvektor gegeben ist. Für diese orthogonale Projektion ist die Abbildungsmatrix gesucht.



$$E: \quad \vec{n}^\circ\, \vec{x} \,=\, 0$$

$$g: \vec{x} \,=\, \overrightarrow{OP} + \lambda\, \vec{n}^\circ$$

Schnitt:

$$\begin{aligned}
\vec{n}^\circ (\overrightarrow{OP} + \lambda\, \vec{n}^\circ) &= 0 \\
\vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} + \lambda &= 0 \\
\lambda &= -\vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP} \qquad \text{Abstand } d(P,E) = \lambda \text{ wegen } |\vec{n}^\circ| = 1
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2(\vec{n}^\circ\, \overrightarrow{OP})\,\vec{n}^\circ$$

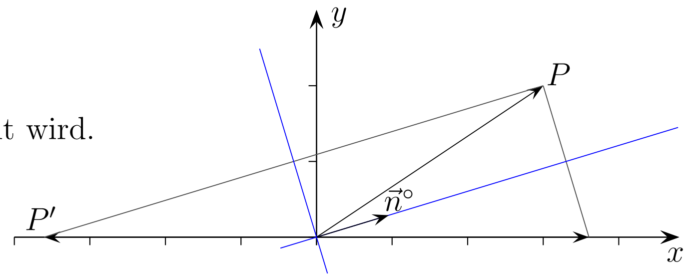
Der Übergang zu Koordinaten ergibt für $\vec{n}$ (durch leichtes Nachrechnen):

$$\overrightarrow{OP'} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\vec{n}^2} \underbrace{\begin{bmatrix} n_1n_1 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2n_2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3n_3 \end{bmatrix}}_{= \vec{n}\vec{n}^{\mathrm{T}} \text{ dyadisches Produkt, sym. } (= \vec{n} \otimes \vec{n})} \right) \overrightarrow{OP}$$

kurz: $\overrightarrow{OP'} = \boldsymbol{Q}\, \overrightarrow{OP}$

beachte: $\vec{n}^{\mathrm{T}}\vec{n} = \vec{n}^2$, Skalarprodukt

$\boldsymbol{Q}$ heißt Householder-Matrix, wenn P in der angegebenen Weise auf die x-Achse gespiegelt wird. Mit $|\,\overrightarrow{OP}\,| = |\,\overrightarrow{OP'}\,|$ ist die Spiegelachse (-ebene) festgelegt.



Householder-Transformation

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$$

$\boldsymbol{A}$ wird in eine Dreiecksmatrix (rechts oben) zerlegt. Wir beginnen mit der 1. Spalte.

1. $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_1 + \alpha|\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{e}$ (α Vorzeichen von $\boldsymbol{a}_{11}$) $\quad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{\boldsymbol{n}^2} \begin{bmatrix} n_1n_1 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2n_2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3n_3 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{24} \begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. $\boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

<u>Das Ganze noch einmal mit:</u> $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$

1. $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_1 + \alpha|\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{e}$ (α Vorzeichen von $\boldsymbol{a}_{11}$) $\quad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\boldsymbol{Q}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{\boldsymbol{n}^2} \begin{bmatrix} n_1n_1 & n_1n_2 \\ n_2n_1 & n_2n_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\boldsymbol{Q}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad$ Betrachte $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ und berücksichtige dann $\frac{1}{5}$.

4. $\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -15 & -5 & 10 \\ 0 & 25 & -12 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}$

$\boldsymbol{QR}$-Zerlegung

$$\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \underbrace{\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}}_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{R}$$

beachte $\boldsymbol{Q}_i^{-1} = \boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}$,

wegen der Spiegelung gilt: $\boldsymbol{Q}_i \cdot \boldsymbol{Q}_i = \boldsymbol{I}$

Gleichungssystem lösen

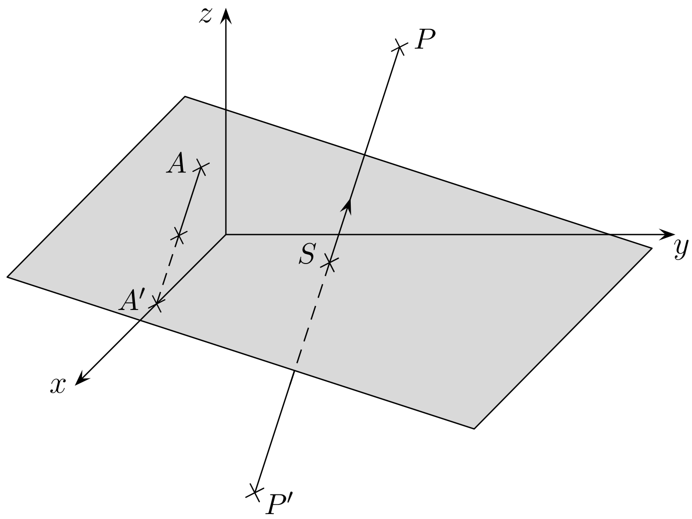
$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{QRx} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Rx} &= \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Auf der linken Seite kann von unten nach oben gerechnet werden.

Alternativ für händische Rechnung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{b} && \mid \boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{b} && \mid \boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{b} \\ &\dots \end{aligned}$$

Wenn auf der linken Seite eine Dreiecksmatrix entstanden ist,
kann von unten nach oben gerechnet werden.
Für verschiedene $\boldsymbol{b}'$s auf der rechten Seite (z. B. Einheitsvektoren für inverse Matrix)
können auf diese Weise mehrere Gleichungssysteme gleichzeitig bearbeitet werden.


z
P
A
S
y
A'
x
P'

Householder-Transformation

Bestimmen Sie eine $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Householder-Transformation

Bestimmen Sie eine $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{Q_1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -10 & -10 & 5 \\ -10 & 11 & 2 \\ 5 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q_1 A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{7}{15} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{26}{15} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q_2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q_2 Q_1 A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q_1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q_2}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$