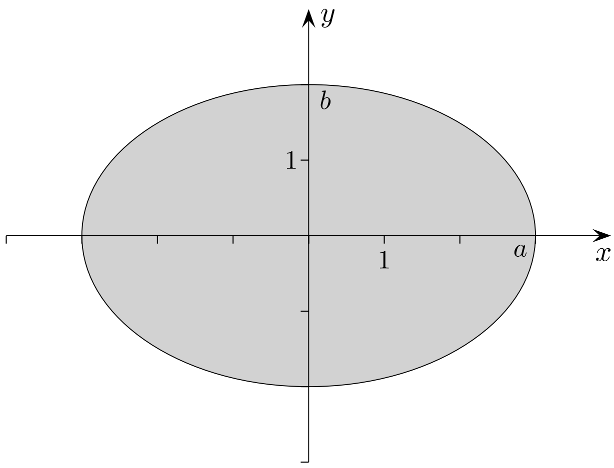
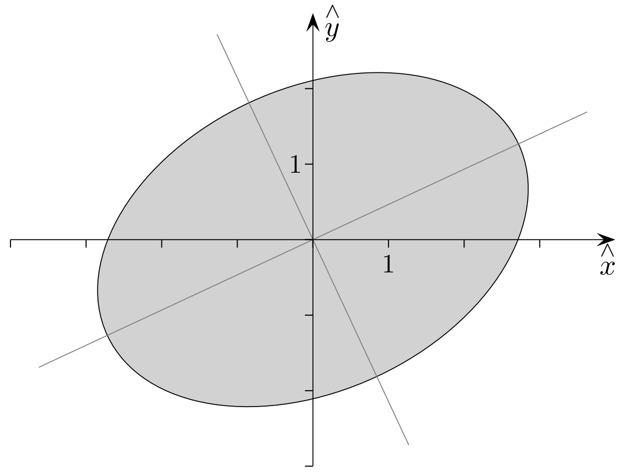
Hauptachsentransformation





Die Hauptachsentransformation dient der einfacheren Darstellung der Kegelschnitte Ellipse, Parabel, Hyperbel und entsprechender rotationssymmetrischer Gebilde höherer Dimension. Es erfolgt ein Übergang vom $\hat{x}\hat{y}$-Koordinatensystem ins xy-Koordinatensystem.

Wir gehen zunächst den umgekehrten Weg und drehen die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{um } \alpha \text{ (um den Ursprung).}$$

Um die Drehmatrix (siehe lineare Abbildungen und Matrizen)

$$Q=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

anwenden zu können, ist die Ellipsengleichung auf eine Matrixform $\vec{x}^{\,T} D\vec{x}=1$ zu bringen. Vektoren werden hier auch als einspaltige Matrizen betrachtet.

$$(x \mid y)\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

Die Matrix Q besteht aus 2 orthogonalen Einheitsvektoren, daher gilt:

$$Q^T \cdot Q = Q\cdot Q^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^T = Q^{-1}$$

Sei

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q^T \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}, \qquad \text{bzw. } (x \mid y) = (\hat{x} \mid \hat{y}) \cdot Q$$

beachte: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Dies wird in die Matrixform $\vec{x}^T D \vec{x} = 1$ eingesetzt:

$$(\hat{x} \mid \hat{y}) \cdot \underbrace{Q \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \cdot Q^T}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = 1$$

Falls nun umgekehrt z. B. die Gleichung $x^2 + y^2 + 4xy = 1$ einer gedrehten Ellipse (?)
oder hiermit gleichwertig (man überprüfe dies)

$$(x \mid y) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

gegeben ist, besteht die Aufgabe, A zu zerlegen (diagonalisieren): $A = Q \cdot D \cdot Q^T$
Die Bezeichnungen wurden hier vertauscht. Es erfolgt nun ein Übergang vom xy-Koordinatensystem ins $\hat{x}\hat{y}$-Koordinatensystem.

Mit

$$\underbrace{(x \mid y) \overbrace{\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}}^{}}_{(\hat{x} \mid \hat{y})} \!\!\overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}^{A} \underbrace{\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}} = 1$$

ergäbe sich die Ellipsengleichung: $\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 = 1$

Wird A (als Abbildung) auf die Spaltenvektoren von Q angewandt, so ist leicht geometrisch zu erkennen, dass es sich um normierte Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 handelt.
Die Spaltenvektoren werden nämlich durch Q^T in die Einheitsvektoren e_1 und e_2 gedreht, mit λ_1 bzw. λ_2 gestreckt und anschließend zurückgedreht.
Man überprüfe dies rechnerisch.

Diagonalisierung von Matrizen

Die Eigenwerte der Matrix $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad$ sind 1 und 7.

Es gilt daher z. B. (für die Eigenvektoren sind auch Vielfache möglich):

$$A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

A kann nun zerlegt (diagonalisiert) werden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Eine leicht zu zeigende Folgerung ist: $\quad A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Der Sachverhalt gilt allgemein für $n \times n$-Matrizen mit n linear unabhängigen Eigenvektoren.
Für $n = 2$ ist alles zu erkennen.

Sei

$$A\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}$$
$$A\vec{y} = \lambda_2 \vec{y}$$

Dann ist

$$A = (\vec{x}, \vec{y}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (\vec{x}, \vec{y})^{-1}$$

$$\iff \quad A\,(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad (A\vec{x}, A\vec{y}) = (\lambda_1 \vec{x}, \lambda_2 \vec{y})$$