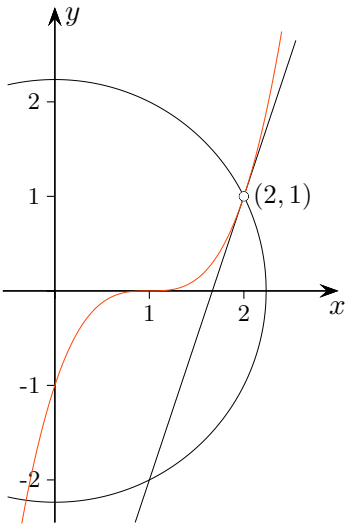
1. Gröbner Basis
2. Reduktion, verallgemeinerte Polynomdivision
3. Algorithmus für die reduzierte Gröbner Basis
4. Beispiel
5. Beispiel
6. Gröbner Basis Definition
7. Gröbner Basis
8. Reduzierte Gröbner Basis
9. Eindeutig bestimmte reduzierte Gröbner Basis, Normalform
10. Monomordnung
11. Schnitt von Ellipsen
12. Schnittmenge (Varietät) leer
13. Starke Form des Hilbertschen Nullstellensatzes
14. Elimination mit Gröbner Basen, Satz (nulldim. Ideal)
15. Implizite Darstellung
16. Formel von Heron
17. Resultante, Gröbner Basis
18. Einfärben von Landkarten
19. Polynom-Transformation
20. Schwache Form des Hilbertschen Nullstellensatzes
21. Nullstellensatz Erläuterungen
22. Lemma von Dickson
23. Hilbertscher Basissatz
24. Vektorraum der Normalformen
25. Multiplikation mod G
26. Endlichkeitssatz
27. $|V(I)|$ = Dimension des Vektorraums der Normalformen
28. Syzygie 5 Seiten
29. Polynomdivision (Reduktion) mit dem Gauss-Algorithmus

↑ Gröbner Basis

$$\begin{aligned} y - 3x + 5 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 5 &= 0 \\ y - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 &= 0 \end{aligned}$$



Mit WolframAlpha
GroebnerBasis[$\{y - 3x + 5, x^2 + y^2 - 5, y - x^3 + 3x^2 - 3x + 1\}, \{x, y\}$]

mit Maple
with(Groebner):
Basis($[y - 3 * x + 5, x^2 + y^2 - 5, -x^3 + 3 * x^2 - 3 * x + y + 1]$, plex($x$, y));
$[y - 1, x - 2]$

plex (oder lex) lexikographische Ordnung $x > y$

Buchberger entwickelte 1965 ein über die Resultanten-Methode hinausreichendes Verfahren zur Lösung umfangreicher nichtlinearer Gleichungssysteme mit vielen Variablen. Sein Lehrer Gröbner hatte im Seminar ein damit zusammenhängendes Problem geschildert. Er erwähnte nicht, dass er sich schon über zwei Jahrzehnte vergeblich um eine Lösung bemüht hatte. Buchberger griff die Fragestellung begierig auf und seine intensiven Bemühungen - er war auch als Programmierer angestellt - waren nach eineinhalb Jahren erfolgreich. Der im Allgemeinen erhebliche Rechenaufwand seines Verfahrens konnte mit der zu dieser Zeit eingeführten Computertechnologie bewältigt werden. Ein Jahr zuvor entdeckte Hironaka algebraisch eng Verwandtes in der Geometrie, ohne jedoch einen Weg zur Berechnung aufzuzeigen.
Der Buchberger-Algorithmus führt für ein lineares Gleichungssystem zum selben Ergebnis wie der Gauss-Algorithmus, bei dem Gleichungen sukzessive durch Linearkombinationen mit anderen Gleichungen ersetzt werden, so dass sich an der Lösungsmenge nichts ändert.

$$\begin{array}{rrrl} 2x + & y - & 4 = & 0 \\ 4x - & 3y + & 2 = & 0 \\ \hline 2x + & y - & 4 = & 0 \\ & -5y + & 10 = & 0 \\ \hline & & y = & 2 \\ & & x = & 1 \end{array}$$

$4x - 3y + 2$ wird hier durch $(4x - 3y + 2) - 2(2x + y - 4) = -5y + 10$ ersetzt.
Dies kann weiterführend als Polynomdivision gelesen werden:
$(4x - 3y + 2) : (2x + y - 4) = 2$ Rest $-5y + 10$ oder
$(4x - 3y + 2) = 2(2x + y - 4) + (-5y + 10)$

Aus dieser Linearkombination ist ersichtlich, dass die Systeme $\{2x + 4y - 4 = 0, 4x - 3y + 2 = 0\}$ und $\{2x + 4y - 4 = 0, -5y + 10 = 0\}$ dieselbe Lösung haben.

Diese Strategie kann auf Systeme von Polynomgleichungen in mehreren Veränderlichen anwandt werden, um eine möglichst einfache polynomiale Beschreibung, die Gröbner Basis, der Schnittmenge (Varietät) zu erhalten. Wenden wir uns daher der Division mit mehreren Polynomen und dem Eingangsbeispiel zu.

↑ Reduktion, verallgemeinerte Polynomdivision

$f := -x^3 + 3x^2 - 3x + y + 1$ Die Summanden wurden nach Potenzen von x geordnet.

$g := x^2 + y^2 - 5$

$h := -3x + y + 5$ Mit WolframAlpha

PolynomialReduce$[-x^3 + 3x^2 - 3x + y + 1, \{x^2 + y^2 - 5, -3x + y + 5\}, \{x, y\}]$

$$\begin{array}{lll|l} r_1 = f + xg & = & 3x^2 + xy^2 - 8x + y + 1 & f = -xg + r_1 \\ r_2 = r_1 - 3g & = & xy^2 - 8x - 3y^2 + y + 16 & r_1 = r_2 + 3g \\ r_3 = r_2 + \frac{1}{3}y^2h & = & -8x - \frac{4}{3}y^2 + y + 16 + \frac{1}{3}y^3 & r_2 = r_3 - \frac{1}{3}y^2h \\ r_4 = r_3 - \frac{8}{3}h & = & \frac{1}{3}(y^3 - 4y^2 - 5y + 8) & r_3 = r_4 + \frac{8}{3}h \end{array}$$

Aus der Linearkombination $f = (3 - x)g + \frac{1}{3}(8 - y^2)h + r_4$ ist erkennbar, dass die Polynommenge $\{f, g, h\}$ dieselben gemeinsamen Nullstellen wie $\{f, g, h, r_4\}$ hat. Beachte: r_4 enthält nur Potenzen von y. Für $r_4 = \frac{1}{3}(y - 1)(y^2 - 3y - 8) = 0$ ist auch $y = 1$ eine Lösung. Durch Einsetzen erhalten wir $(2, 1)$.
Für Weiteres beachtenswert: f kann in $\{f, g, h, r_4\}$ wegen der obigen Linearkombination entfallen, die gemeinsamen Nullstellen von $\{g, h, r_4\}$ sind auch Nullstellen von f.

Bei der Polynomdivision in einer Variablen hat der Rest kleineren Grad hat als der Divisor.
Hier können wir bei der Reduktion von f mit $\{g, h\}$ nur feststellen, dass der Rest keine Monome enthält, die durch den führenden (in der Monomordnung größten) Term von g oder h teilbar sind.
Der Divisions-Algorithmus endet nach endlich vielen Schritten:
Bei jedem Divisionsschritt wird der führende Term r_i mit dem ihn teilenden führenden Term des Divisors g bzw. h eliminiert. Alle Monome, die eventuell neu dazukommen, sind daher kleiner oder gleich dem führenden Monom des Divisors. Die führenden Monome der r_i bilden daher eine absteigende, schließlich abbrechende Kette.

Die von $\{f, g, h\}$ und $\{f, g, h, r_4\}$ bzw. $\{g, h, r_4\}$ im Polynomring $\mathbb{Q}[x, y]$ mit den Variablen x und y erzeugten Ideale sind identisch, Schreibweise $\langle f, g, h\rangle = \langle g, h, r_4\rangle$, da ein von $\{f_1, f_2, f_3\}$ erzeugtes Ideal aus allen Linearkombinationen von f_1, f_2, f_3 mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}[x, y]$ besteht. Es gilt: $\{f_1, f_2, f_3\}$ und $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ erzeugen dasselbe Ideal (mit gleicher Schnittmenge), wenn sich jedes Polynom der einen Menge als Linearkombination der anderen darstellen lässt. Gesucht sind Erzeugende minimalen Grades. Diese algebraische Formulierung kommt ohne die Schnittmenge aus, sie kann auch leer sein.

Buchberger verwendet in seinem Algorithmus Linearkombinationen von jeweils zwei Polynomen, wie z. B. r_1, so dass sich der größte Summand heraushebt (S-Polynom, Syzygie gr.-lat. Zusammenfügung, Gespann, in der Astronomie: Sonne, Erde und Mond in einer geraden Linie aufgereiht). Beim S-Polynom $S(f, g)$ werden f und g so multipliziert, dass die jeweils führenden Terme wie im linearen Fall auf das kleinste gemeinsame Vielfache gebracht werden, damit sie bei der Subtraktion herausfallen,
$f = x^3 - 2xy$, $g = x^2y - 2y^2 + x$, $S(f, g) = yf - xg = -x^2$.

Maple with(Groebner): SPolynomial$(x^3 - 2 * x * y, x^2 * y - 2 * y^2 + x, \text{plex}(x, y))$;

Die Polynomdivision hängt von der Monomordnung (und der Reihenfolge der Divisoren ab), alternative Berechnung:

$r_1 := y^2x + y + 3x^2 - 8x + 1$ Siehe oben, die Summanden wurden nach Potenzen von y geordnet.
$g := y^2 + x^2 - 5$
$h := y - 3x + 5$

$r_2 = r1 - xg = y - x^3 + 3x^2 - 3x + 1$
$r_3 = r_2 - h = -x^3 + 3x^2 - 4$
$= (1-x)(x-2)^2$

$r1 = xg + r_2$
$r_2 = h + r_3$
$r_1 = xg + h + r_3$ Das führt zu (2,1).

↑ Algorithmus für die reduzierte Gröbner Basis

In einem Eliminationsschritt des Gauss-Algorithmus wird ein Polynom durch ein S-Polynom ersetzt. Hier kann sich jedoch die Lösungsmenge ändern:
$f = x^2y + xy^2 + 1$, $g = x^3 - xy$, $S(f,g) = xf - yg = x^2y^2 + xy^2 + x$.
$(0,0)$ ist Nullstelle von $S(f,g)$, aber nicht von f, das somit nicht durch $S(f,g)$ ersetzt werden kann.

Der Algorithmus von Buchberger ist im Gegensatz zu den erforderlichen Begründungen einfach zu formulieren. Sei eine Monomordnung festgelegt, z. B. eine lexikographische.

1. $G = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$
2. $G' = G$
   Ermittle für jedes Paar f_i, $f_j \in G'$ $(i < j)$ den Rest r bei der Divison von $S(f_i, f_j)$ durch die Elemente von G' (Reduktion mit G'). Falls $r \neq 0$, füge r G hinzu $(G = G \cup \{r\})$.
3. Falls $G \neq G'$, so gehe zu 2. Diese Polynome ergeben die Gröbner Basis.
4. Streiche alle Elemente aus G, dessen führendes Monom durch ein führendes Monom eines der restlichen Elemente aus G teilbar ist. $g \in G$ normieren, minimale Gröbner Basis (siehe Satz S. 6)
5. Eliminiere durch Multiplikation und Subtraktion aus den Elementen von G Terme, die durch das führende Monom eines anderen Elements aus G teilbar sind. reduzierte Gröbner Basis

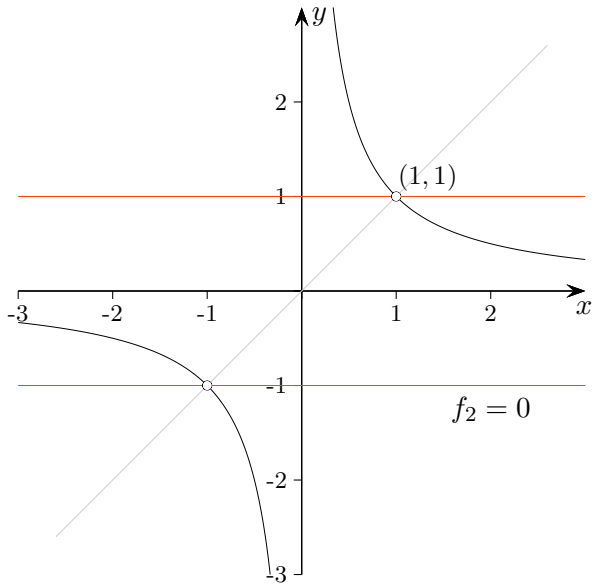
Der Algorithmus kann optimiert werden.
S-Polynome, die im 2. Schritt den Divisionsrest null ergeben, müssen nicht weiter berücksichtigt werden. Der Divisionsrest bleibt bei jedem weiteren Durchgang null, da durch dieselben Polynome (plus einiger neuer) dividiert wird.

Wenn im 2. Schritt ein Divisionsrest $r \neq 0$ auftaucht, ist dessen führendes Monom durch kein führendes Monom eines Polynoms $g \in G$ teilbar. Wir erhalten daher eine Folge m_1, m_2, ... von Monomen mit der Eigenschaft, dass für alle $i < j$ gilt: m_i teilt nicht m_j. Die Folge muss endlich sein. Es gibt z. B. für $m_i = x^2y^3$ oder $m_i = y^3$ für m_j nur die Möglichkeiten y, y^2, x, xy, xy^2, xy^3, xy^4, usw., so dass m_i nicht m_j teilt. Wenn z. B. $m_j = xy^3$ in der Folge erscheint, ist das für xy^k, $k \geq 3$, nicht mehr möglich. Also kann der zweite Schritt nur endlich oft durchlaufen werden.

↑ Beispiel

Aus der folgenden vereinfachten Formulierung ist unmittelbar zu ersehen,
dass die Schnittmenge stets gleich (invariant) bleibt. Sei eine Monomordnung festgelegt.

1. $G = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$
2. $G' = G$
   Ermittle für jedes Paar $f_i,\ f_j \in G'\ (i < j)$ den Rest r bei Reduktion von $S(f_i, f_j)$ mit G'.
   Falls $r \neq 0$, dann $G = G \cup \{r\}$.
3. Reduziere jedes $f \in G$ (Ergebnis r) mit $G \setminus \{f\}$.
   Falls $r = 0$, dann $G = G \setminus \{f\}$, sonst ersetze in G f durch r.
4. Falls $G \neq G'$, gehe zu 2.



$f_1 = xy - 1$

$f_2 = y^2 - 1$

$G = \{f_1, f_2\}$

2.	$G' = \{g_1, g_2\}$		
2.	$S(g_1, g_2) = x - y$	$S(g_1, g_2) = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + x - y$ (Reduktion mit G')	$G = \{g_1, g_2, g_3 = x - y\}$
3.		$g_1 = g_2 + yg_3 + 0,\ g_2 = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_3 + g_2,\ g_3 = \ldots g_3$	$G = \{g_2, g_3\}$
2.	$G' = \{g_2, g_3\}$		
2.	$S(g_2, g_3) = y^3 - x$	$S(g_2, g_3) = yg_2 - g_3 + 0$ (Reduktion mit G')	$G = \{g_2, g_3\}$

$G = \{g_1 = x - y,\ g_2 = y^2 - 1\}$

Schnittpunkte $(1, 1),\ (-1, -1)$

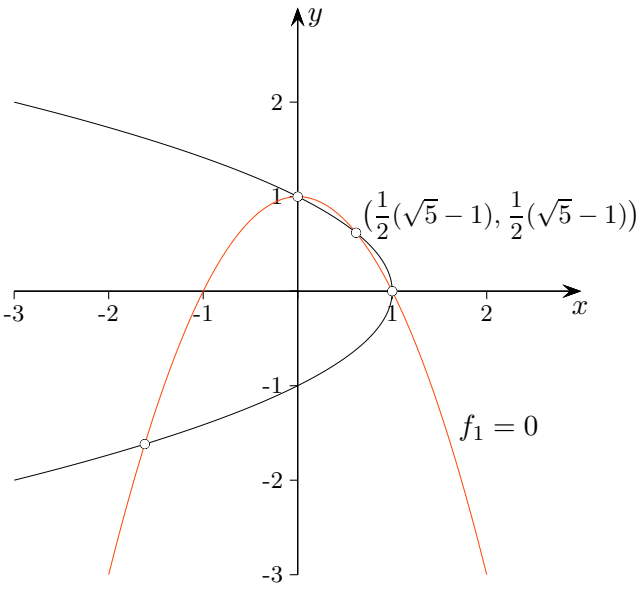
Probe, die Gröbner Basis erzeugt das Ideal $\langle f_1, f_2 \rangle$.

$f_1 = yg_1 + g_2$

$f_2 = g_2$

↑ Beispiel

1. $G = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$
2. $G' = G$
   Ermittle für jedes Paar $f_i,\ f_j \in G'$ $(i < j)$ den Rest r bei Reduktion von $S(f_i, f_j)$ mit G'.
   Falls $r \neq 0$, dann $G = G \cup \{r\}$.
3. Reduziere jedes $f \in G$ (Ergebnis r) mit $G \setminus \{f\}$.
   Falls $r = 0$, dann $G = G \setminus \{f\}$, sonst ersetze in G f durch r.
4. Falls $G \neq G'$, gehe zu 2.



$f_1 = x^2 + y - 1$
$f_2 = x + y^2 - 1$

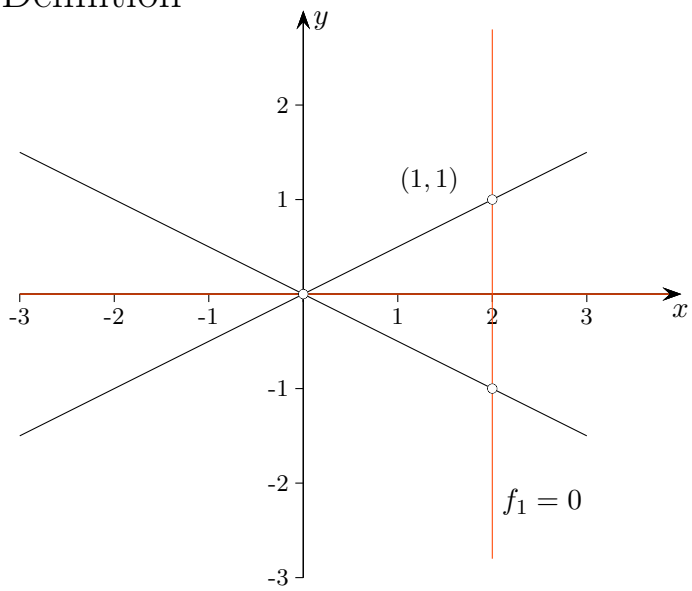
$G = \{f_1, f_2\}$

2.	$G' = \{f_1, f_2\}$	
2.	$S(f_1, f_2) = -xy^2 + x + y - 1$	$S(f_1, f_2) = 0 \cdot f_1 + (1 - y^2) \cdot f_2 + y^4 - 2y^2 + y$ (Reduktion mit G')
		$G = \{f_1, f_2, f_3 = y^4 - 2y^2 + y\}$
3.		$f_1 = (x - y^2 + 1)f_2 + f_3 + 0$ $\quad G = \{f_2, f_3\}$
		$f_2 = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_3 + f_2$
		$f_3 = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + f_3$
2.	$G' = \{f_2, f_3\}$	$S(f_2, f_3) = y^6 - y^4 + 2xy^2 - xy$
		$S(f_2, f_3) = (2y^2 - y)f_2 + (y^2 - 1)f_3 + 0$ (Reduktion mit G')

$G = \{x + y^2 - 1, y^4 - 2y^2 + y\}$ $\qquad y^4 - 2y^2 + y = y(y-1)(y^2 + y - 1)$

Schnittpunkte $\quad (1, 0),\ (0, 1),\ \left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right),\ \left(-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\right)$

↑ Gröbner Basis Definition



$$f_1 = xy - 2y$$
$$f_2 = x^2 - 4y^2$$
$$F = \{f_1, f_2\}$$

Gröbner Basis $G = \{g_1 = xy - 2y,\ g_2 = x^2 - 4y^2,\ g_3 = y^3 - y\}$

G	$= \{g_1, g_2, g_3\}$	
$S(g_1, g_2)$	$= -2xy + 4y^3$	$S(g_1, g_2) = -2 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + 4 \cdot g_3 + 0$ (Reduktion mit G)
$S(g_1, g_3)$	$= xy - 2y^3$	$S(g_1, g_3) = 1 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 - 2 \cdot g_3 + 0$
$S(g_2, g_3)$	$= x^2y - 4y^5$	$S(g_1, g_2) = (x + 2) \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + (-4y^2 - 4) \cdot g_3 + 0$

Sei I das von $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ erzeugte Ideal, das aus allen Linearkombinationen mit Elementen aus F besteht. Die Koeffizienten sind Polynome mit (hier) den Variablen x und y.

Definition
$G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ mit Elementen aus I heißt Gröbner Basis von I,
wenn jedes S-Polynom $S(g_i, g_j)$ bei der Reduktion mit G den Rest 0 hat.

Satz
Das ist genau dann der Fall, falls die Monome $\mathrm{FM}(g_i)$, $g_i \in G$, das Ideal $\mathrm{FM}(I)$ erzeugen,
FM führendes Monom, d. h. für alle $f \in I$, $f \neq 0$, gibt es ein g_i mit $\mathrm{FM}(g_i)$ teilt $\mathrm{FM}(f)$.

Folgerung: Genau die Elemente aus I ungleich 0 haben bei der Reduktion mit G den Rest 0.
Für $f = a_1g_1 + \ldots + a_ng_n + r$ gilt $f \in I \iff r \in I$. $r = 0 \implies f \in I$.
Sei umgekehrt $f \in I$ und $r \neq 0$. Dann ist $r \in I$ und es gibt ein g_i (Satz) mit $\mathrm{FM}(g_i)$ teilt $\mathrm{FM}(r)$.
Das ist ein Widerspruch zur Reduktion von f mit G.

Eine Situation wie

$G = \{g = x^3 - 2xy,\ h = x^2y + x - 2y^2\}$

$-y \cdot g + x \cdot h = x^2 \in I$

kann bei Gröbner Basen G nicht eintreten, x^3, x^2y können nicht x^2 erzeugen (teilen).

Der Satz erscheint naheliegend.

Der Divisionsalgorithmus besagt, dass für

$S(g_i, g_j) = a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n + r, \qquad a_i,\, r$ Polynome

entweder $r = 0$ oder r eine Linearkombination von Monomen ist, so dass keines von ihnen durch einen der führenden Terme der g_i teilbar ist. Wegen $r = S(g_i, g_j) - a_1 g_1 - \ldots - a_n g_n \in I$ ist $r = 0$, wenn die führenden Monome der Elemente aus I jeweils durch ein führendes Monom eines g_i geteilt werden, wenn also die Monome $\mathrm{FM}(g_i)$ das Ideal $\mathrm{FM}(I)$ erzeugen (es hinreichend viele kleine g_i's gibt).

Der Beweis der Umkehrung,
hat jedes S-Polynom $S(g_i, g_j)$ bei der Reduktion mit G den Rest 0 hat, so erzeugen die Monome $\mathrm{FM}(g_i)$ das Ideal $\mathrm{FM}(I)$, ist nicht so offensichtlich und soll skizziert werden.

1. Fall
Sei $g \in I$, d. h. es gibt eine Darstellung

$g = a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n, \qquad a_i$ Polynome.

Falls sich hier keine führenden Terme der Summanden $a_i g_i$ wegheben, ist der führende Term von g auch auf der rechten Seite zu finden, eventuell als Summe führender Terme. $\mathrm{FM}(g)$ liegt daher im von den $\mathrm{FM}(g_i)$ erzeugten Ideal.

2. Fall
Für $g = a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n$ ist es jedoch möglich, wie im Beispiel auf der vorigen Seite, dass die Summe S einiger führender Terme von $a_j g_j$ mit gleichem Monom null ist und damit - wie bei $S(g_i, g_j)$ - herausfällt. O.B.d.A sei $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ für eine herausfallende Summe mit gleichen führenden Monomen. Es verwundert daher nicht, dass S als Linearkombination der $S(g_i, g_j)$ dargestellt werden kann. Die S-Polynome wiederum sind Linearkombinationen der g_i (Rest null nach Voraussetzung).
Betrachte hierzu die Umformungen:

$$\begin{aligned}
S &= a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3 + a_4 g_4 && g_i \text{ normiert, d. h. leitender Koeffizient} = 1 \\
&= a_1(g_1 - g_2) + (a_1 + a_2)(g_2 - g_3) + (a_1 + a_2 + a_3)(g_3 - g_4) + \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}_{0} g_4 \\
&= a_1 S(g_1, g_2) + (a_1 + a_2) S(g_2, g_3) + (a_1 + a_2 + a_3) S(g_3, g_4), && S(g_i, g_j) = g_i - g_j \\
g &= b_1 g_{n_1} + \ldots + b_k g_{n_k}
\end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung können wir wie im 1. und 2. Fall argumentieren: Falls sich bei den führenden Termen nichts weghebt, haben wir $\mathrm{FM}(g)$ als Element des von den $\mathrm{FM}(g_i)$ erzeugten Ideals dargestellt, andernfalls erhalten wir wieder mit Hilfe der S-Polynome und deren Reduktion eine neue Darstellung von g als Linearkombination der g_i mit kleinerem maximalen Grad der Summanden, und so weiter. Das Verfahren muss schließlich mit einer Summe enden, in der die führenden Terme erhalten bleiben, da eine absteigende Monomordnungs-Folge endlich ist.

Der Satz zeigt die besondere Bedeutung der Elemente aus I mit kleinen (minimalen) führenden Monomen. In der Literatur wird, von wenigen Ausnahmen abgesehen, die Aussage des Satzes in wenig genetischer Weise als Definition für eine Gröbner Basis genommen. Dieses Vorgehen ist erst dann didaktisch gerechtfertigt, wenn die Relevanz der führenden (minimalen) Monome erkannt wurde.

↑ Reduzierte Gröbner Basis

1. $G = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$
2. $G' = G$
   Ermittle für jedes Paar $f_i,\ f_j \in G'\ (i < j)$ den Rest r bei der Divison von $S(f_i, f_j)$ durch die Elemente von G' (Reduktion mit G'). Falls $r \neq 0$, füge r G hinzu $(G = G \cup \{r\})$.
3. Falls $G \neq G'$, so gehe zu 2. Diese Polynome ergeben die Gröbner Basis.
4. Streiche alle Elemente aus G, dessen führendes Monom durch ein führendes Monom eines der restlichen Elemente aus G teilbar ist. $g \in G$ normieren, minimale Gröbner Basis
5. Eliminiere durch Multiplikation und Subtraktion aus den Elementen von G Terme, die durch das führende Monom eines anderen Elements aus G teilbar sind. reduzierte Gröbner Basis

Da eine Gröbner Basis G genau dann vorliegt,
falls es für alle $0 \neq g \in I$ ein g_i mit $\mathrm{FM}(g_i)$ teilt $\mathrm{FM}(g)$ gibt,
bleibt die Gröbner Basis im 4. Schritt erhalten. Die Normierung ändert daran nichts.

Wenn irgendein Term eines Polynoms $g \in G$ durch das führende Monom eines anderen Polynoms $h \in G$ teilbar ist, können wir diesen Term zum Verschwinden bringen, indem wir g durch g minus ein Vielfaches von h ersetzen. Da sich dabei nichts an den führenden Monomen der Elemente von G ändert, bleibt G im 5. Schritt eine Gröbner Basis.

Eine minimale Gröbner Basis erhält man mit dem folgenden Algorithmus:

1. $G = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$
2. $G' = G$
   Ermittle für jedes Paar $f_i,\ f_j \in G'\ (i < j)$ den Rest r bei Reduktion von $S(f_i, f_j)$ mit G'.
   Falls $r \neq 0$, dann $G = G \cup \{r\}$.
3. Reduziere jedes $f \in G$ (Ergebnis r) mit $G \setminus \{f\}$.
   Falls $r = 0$, dann $G = G \setminus \{f\}$, sonst ersetze in G f durch r.
4. Falls $G \neq G'$, gehe zu 2.

In der im 3. Schritt schließlich entstehenden Basis hat kein $f \in G$ mehr einen führenden Term, der durch den führenden Term eines Elements von $G \setminus \{f\}$ teilbar wäre.

↑ Eindeutig bestimmte reduzierte Gröbner Basis, Normalform

Satz
Jedes (endlich erzeugte) Ideal I hat eine eindeutig bestimmte reduzierte Gröbner Basis (hinsichtlich einer Monomordnung).

Seien $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ und $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ reduzierte Gröbner Basen für das Ideal.
Für f_i existiert ein j mit $\mathrm{FM}(g_j)$ teilt $\mathrm{FM}(f_i)$, da die Reduktion von f_i mit G null ist.
Für dieses g_j existiert genau ein k mit $\mathrm{FM}(f_k)$ teilt $\mathrm{FM}(g_j)$, da die Reduktion von g_j mit F null ist.
Dann folgt: $\mathrm{FM}(f_k)$ teilt $\mathrm{FM}(f_i)$. Es muss $k = i$ sein, da F als reduzierte Gröbner Basis minimal ist, und dann auch $\mathrm{FM}(f_i) = \mathrm{FM}(g_j)$. Somit gibt es zu jedem $f_i \in F$ genau ein $g_j \in G$ mit $\mathrm{FM}(f_i) = \mathrm{FM}(g_j)$.
Die Situation ist symmetrisch. Zu jedem $g_j \in G$ gibt es genau ein $f_i \in F$ mit $\mathrm{FM}(f_i) = \mathrm{FM}(g_j)$.
Insbesondere haben G und F gleichviele Elemente.
Tatsächlich muss sogar $f_i = g_j$ sein, denn:
$f_i - g_j \in I$ reduziert mit F ergibt null. $\mathrm{FM}(f_i - g_j)$ muss daher durch ein führendes Monom eines $f \in F$ teilbar sein. Nun sind die Basen aber reduziert und die Menge der führenden Monome von $f \in F$ stimmt mit der Menge der führenden Monome von $g \in G$ überein. Somit enthält $f_i - g_j$ kein Monom (die führenden Monome von f_i und g_j heben sich weg), das durch das führende Monom irgendeines Elements von F teilbar wäre. Also ist $f_i - g_j = 0$. □

Satz
Der Rest r bei Reduktion von $f \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ mit einer Gröbner Basis G ist eindeutig.

Mit $f - r_1 \in \langle G \rangle$ (von G erzeugtes Ideal) und $f - r_2 \in \langle G \rangle$ (r_i Reste) ist auch $r_1 - r_2 \in \langle G \rangle$.
Dann muss es ein $\mathrm{FM}(g_i)$ ($g_i \in G$) geben, dass $\mathrm{FM}(r_1 - r_2)$ teilt.
Das ist ein Widerspruch zur Reduktion mit G, somit gilt $r_1 - r_2 = 0$.

Der Divisionsrest r von f unter G heißt Normalform von f bezüglich G, $r = \mathrm{N}_G(f)$.

↑ Monomordnung

Monome mit z. B. 3 Variablen (x^4, xy^2z^3, yz^5) sind Terme $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$
mit einem Exponentenvektor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}_0^3$.
$(x_1, x_2, x_3) = (y, x, z)$, (3! Permutationen möglich) $\quad x^4 = y^0x^4z^0 \mathrel{\hat{=}} (0, 4, 0), \quad yz^5 = y^1x^0z^5 \mathrel{\hat{=}} (1, 0, 5)$

Eine Monomordnung lässt sich bei festgelegter Reihenfolge der Variablen als Ordnung der Exponentenvektoren auffassen. Es gibt sehr viele Möglichkeiten, diese Menge anzuordnen. Für die Polynomdivision ist es erforderlich, dass die Ordnung bei der Multiplikation erhalten bleibt

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \implies (\alpha_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \gamma_2, \alpha_3 + \gamma_3) < (\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2, \beta_3 + \gamma_3)$

(der führende Term des Produkts zweier Polynome ist dann das Produkt der führenden Terme der Faktoren) und jede Teilmenge $\subseteq \mathbb{N}_0^n$ ein kleinstes Element hat, damit die Division nach endlich vielen Schritten abbricht.

lexikographische Ordnung lex, Maple plex(x, y, z) mit $x > y > z$
$(1, 3, 4) < (2, 1, 2), \quad (3, 1, 4) < (3, 2, 1), \quad (3, 3, 1) < (3, 3, 2)$
Die Werte der ersten gemeinsamen Koordinaten von links, in der sich die beiden Vektoren unterscheiden, bestimmen die Ordnung.

für $x > y$ in $k[x, y]$ $\quad (x, y) \mathrel{\hat{=}} (1, 1)$
$x^3 > x^2y > x^2 > xy^2 > xy > x > y^3 > y^2 > y > 1$

für $y > x$ in $k[x, y]$ $\quad (y, x) \mathrel{\hat{=}} (1, 1)$
$y^3 > xy^2 > y^2 > x^2y > xy > y > x^3 > x^2 > x > 1.$

Grad-lexikographische Ordnung deglex, Maple grglex(x, y, z) mit $x > y > z$
Der Grad (Summe der einzelnen Grade) eines Monoms ist erstes Ordnungskriterium.
Falls beide Monome gleichen Grad haben, wird lexikographisch geordnet,

für $x > y > z$ in $k[x, y, z]$ $\quad (x, y, z) \mathrel{\hat{=}} (1, 1, 1)$
$x^3 > z^3 > x^2 > xy > xz > y^2 > yz > z^2 > x > y > z > 1.$

Grad-revers-lexikographische Ordnung degrevlex, Maple tdeg(x, y, z) mit $x > y > z$
Der Grad (Summe der einzelnen Grade) eines Monoms ist erstes Ordnungskriterium.
Falls beide Monome gleichen Grad haben, wird revers lexikographisch geordnet, d. h.
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, falls für die ersten gemeinsamen Koordinaten von rechts, in der sich die beiden Vektoren unterscheiden, $\alpha_i > \beta_i$ gilt.

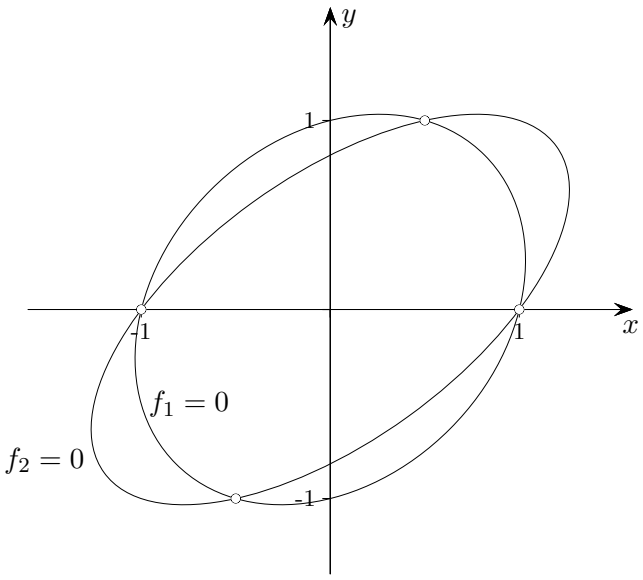
für $x > y > z$ in $k[x, y, z]$ $\quad (x, y, z) \mathrel{\hat{=}} (1, 1, 1)$
$x^3 > z^3 > x^2 > xy > y^2 > xz > yz > z^2 > x > y > z > 1.$

$y^2 > xz \iff (0, 2, 0) > (1, 0, 1) \iff 0 < 1$

Mit WolframAlpha
MonomialList$[1 + z + y + x + z^2 + yz + xz + y^2 + xy + x^2 + z^3 + x^3, \{x, y, z\},$ "Lexicographic"]

"DegreeLexicographic"
"DegreeReverseLexicographic"

↑ Schnitt von Ellipsen



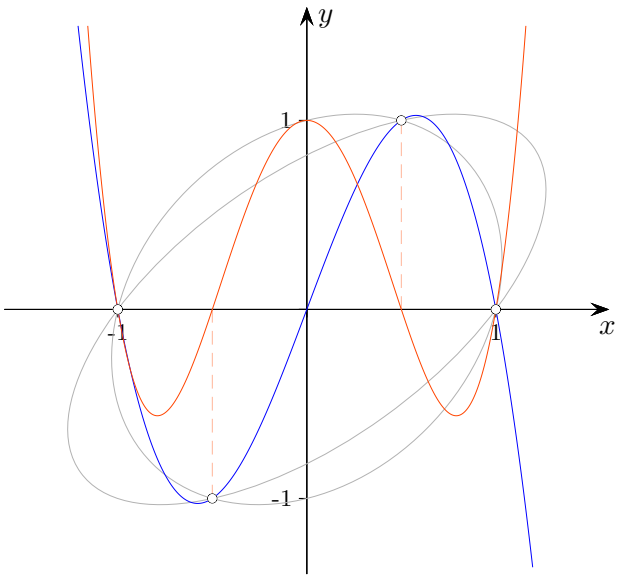
$$f_1 = 2x^2 - xy + 2y^2 - 2$$
$$f_2 = 2x^2 - 3xy + 3y^2 - 2$$

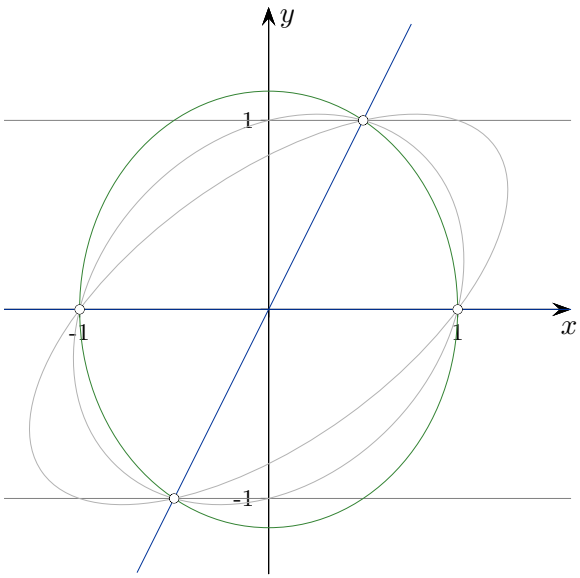
Gröbner Basis lex $y > x$

$$G = \{4x^4 - 5x^2 + 1, 8x^3 - 8x + 3y\}$$

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = (x-1)(x+1)(2x+1)(2x-1)$$

Schnittpunkte $(1,0),\ (-1,0),\ (1/2,1),\ (-1/2,-1)$





Gröbner Basis lex $x > y$

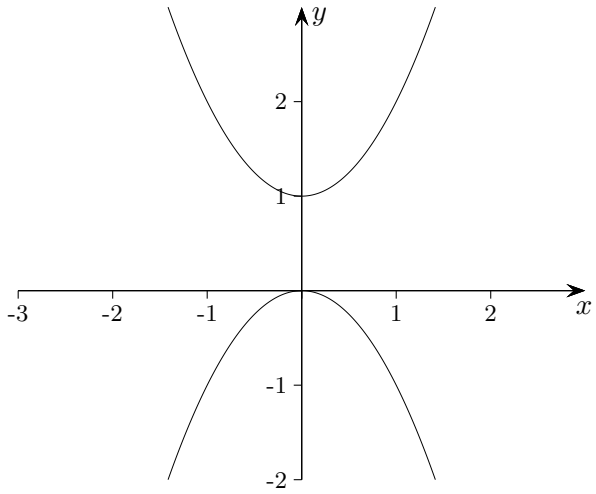
$$G = \{y^3 - y, 2xy - y^2, 4x^2 + 3y^2 - 4\}$$

$$y^3 - y = y(y-1)(y+1)$$

Die Graphen veranschaulichen die von der Monomordnung abhängige Berechnung der Schnittpunkte mit Hilfe der Gröbner Basen.

↑ Schnittmenge (Varietät) leer

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ -x^2 &= 0 \end{aligned}$$



$I = \langle x^2 + 1, -x^2 \rangle$

Die Gröbner Basis für das Ideal I lautet: $\{1\}$

Das Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung in $\mathbb{C}$, wenn das Ideal I die Eins enthält, also genau dann, wenn die 1 als Linearkombination der erzeugenden Elemente von I darstellbar ist.

Ob ein Ideal die Eins enthält oder nicht, kann man seiner Gröbner Basis leicht ansehen. Da der führende Term eines jeden Polynoms aus dem Ideal durch den führenden Term eines Elements der Gröbner Basis teilbar sein muss, enthält diese im Falle eines Ideals, das die Eins enthält, ein Polynom, dessen führendes Monom die Eins ist. Da diese bezüglich jeder Monomordnung das kleinste Monom ist, muss somit die Gröbner Basis eine Konstante enthalten. Die zugehörige minimale und erst recht die reduzierte Gröbner Basis besteht in diesem Fall nur aus der Eins.

Wir halten fest:
Ein nichtlineares Gleichungssystem ist genau dann unlösbar selbst in $\mathbb{C}$, wenn seine reduzierte Gröbner Basis nur aus der Eins besteht.

Zu zeigen ist jedoch noch

Schwache Form des Hilbertschen Nullstellensatzes, siehe hier
Genau dann, wenn die I erzeugenden Polynome f_i keine gemeinsame Nullstelle in $\mathbb{C}$ haben, gilt $1 \in I$ (1 kann als Linearkombination der f_i dargestellt werden, $I = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$).

> Für Polynome mit einer Variablen ist die Aussage offensichtlich, da gilt $\text{ggT}(f, g) = 1 \iff$ f, g haben keine gemeinsame Nullstelle in $\mathbb{C}$. $\quad \text{ggT}(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$

Starke Form des Hilbertschen Nullstellensatzes
Sei $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ und $g \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ verschwinde in jedem Punkt von $V(I) \subset \mathbb{C}^n$.
Dann gibt es eine natürliche Zahl ℓ, so dass g^ℓ in I liegt.

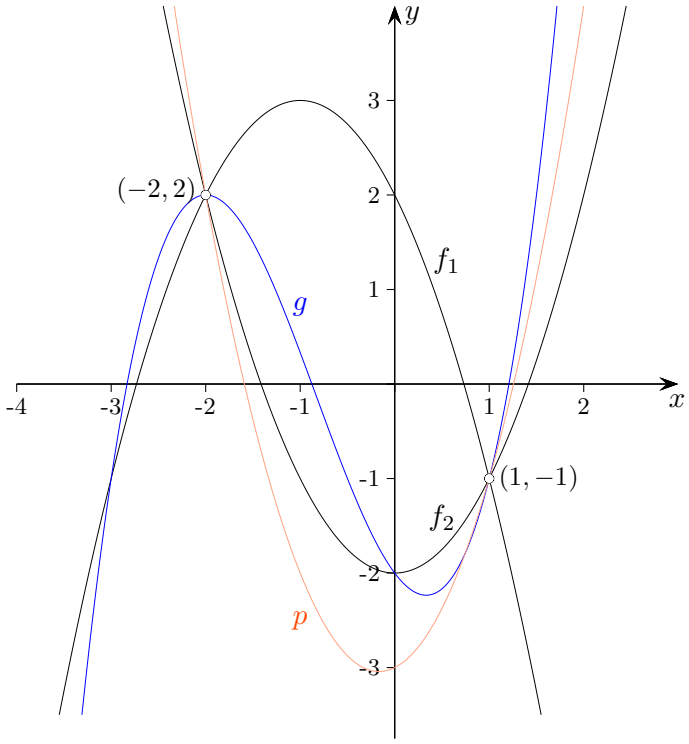
$I = \langle f_1 = x^3, f_2 = y^3, f_3 = xy(x + y) \rangle$

$g = x + y$ verschwindet auf $V(I)$.

$g^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = f_1 + f_2 + 3f_3$

$\implies \quad g^3 \in I$

↑ Starke Form des Hilbertschen Nullstellensatzes



$I = \langle f_1 = -x^2 - 2x + 2 - y,\ f_2 = x^2 - 2 - y \rangle$

Die Gröbner Basis für das Ideal I lautet: $\{g_1 = y^2 - y - 2,\ g_2 = x + y\}$, $\quad V(I) = \{(-2, 2), (1, -1)\}$

p und g verschwinden auf $V(I)$, siehe Grafik.
Nach der starken Form des Hilbertschen Nullstellensatzes liegt jeweils eine Potenz dieser Polynome in I (hier ist der Exponent 1).

$p = 3x^2 + x - 6 - 2y = 3g_1 + (3x - 3y + 1)g_2$

$g = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 6 - 3y = (3 + 2x)g_1 + (5x + 2x^2 - 3y - 2xy)g_2$

$\Longrightarrow \quad p, g \in I$

trickreiche Beweisidee, betrachte

$J = \langle -x^2 - 2x + 2 - y,\ x^2 - 2 - y,\ 1 - wg \rangle$, die Gröbner Basis ist $\{1\}$,

allgemeiner:

$J = \langle f_1, f_2, \ldots, f_k, 1 - wg \rangle \subset \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n, w]$

Es ist zu erkennen, dass keine gemeinsamen Nullstellen vorliegen können, dass also $V(J) = \emptyset$ ist.
Dann kann die schwache Form des Hilbertschen Nullstellensatzes angewandt werden.

$$1 \ = \ a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k + a_0(1 - wg), \quad a_i \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n, w]$$

Für w wird in diese Linearkombination $1/g$ eingesetzt (der letzte Summand fällt weg).
Dadurch können die Summanden Potenzen von g in ihre Nenner bekommen. Durch Multiplikation mit der höchsten auftretenden Potenz g^ℓ erhalten wir die gewünschte Polynomgleichung der Form

$$g^\ell \ = \ b_1 f_1 + \ldots + b_k f_k, \quad b_i \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

↑ Elimination mit Gröbner Basen, Satz (nulldim. Ideal)

$$\begin{aligned} x^2 + y + z &= 1 \\ x + y^2 + z &= 1 \\ x + y + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$I = \langle x^2 + y + z - 1, x + y^2 + z - 1, x + y + z^2 - 1 \rangle$$

Die Gröbner Basis mit lexikographischer Ordnung für das Ideal I lautet:

$$\begin{aligned} g_1 &= x + y + z^2 - 1 \\ g_2 &= y^2 - y - z^2 + z \\ g_3 &= 2yz^2 + z^4 - z^2 \\ g_4 &= z^6 - 4z^4 + 4z^3 - z^2 = z^2(z-1)^2(z^2 + 2z - 1) \end{aligned}$$

Mit den Nullstellen $\alpha_{1/2} = -1 \pm \sqrt{2}$ des quadratischen Terms erhalten wir für das Gleichungssystem die 5 Lösungen: $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1),\ (\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2)$

Bei einer endlichen Lösungsmenge haben die Elemente der Gröbner Basis stets die Form, dass die Lösungen schrittweise ermittelt werden können.

Wenn die Gröbner Basis diese Form hat, ist die Lösungsmenge endlich.
Mit g_4 gibt es nur endlich viele mögliche Werte für z. Diese in g_2 oder g_3 eingesetzt, ergeben endlich viele mögliche Werte für y, usw.

Satz (Elimination)
Sei I ein nulldimensionales Ideal (die Schnittmenge $V(I)$ ist endlich) und G die reduzierte Gröbner Basis für I hinsichtlich der lexikographischen Ordnung $x_n > \ldots > x_2 > x_1$.
Dann kann G so angeordnet werden $(g_1, \ldots, g_k)$, dass g_1 nur die (kleinste) Variable x_1 enthält, g_2 nur die Variablen x_1 und x_2 enthält und $\mathrm{FM}(g_2)$ ist eine Potenz von x_2, g_3 nur die Variablen x_1, x_2 und x_3 enthält und $\mathrm{FM}(g_3)$ ist eine Potenz von x_3, usw.

Die Dreiecksform eines linearen Gleichungssystems ist hier noch zu erkennen. Der Satz (Elimination) folgt unmittelbar aus dem folgenden Satz. Wir ordnen die g_j, so dass $\mathrm{FM}(g_j) = x_j^m$ ist. Wegen der lexikographischen Ordnung sind in g_j nur die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_j$ enthalten.

Satz (nulldimensionales Ideal)
Die Aussagen sind äquivalent.

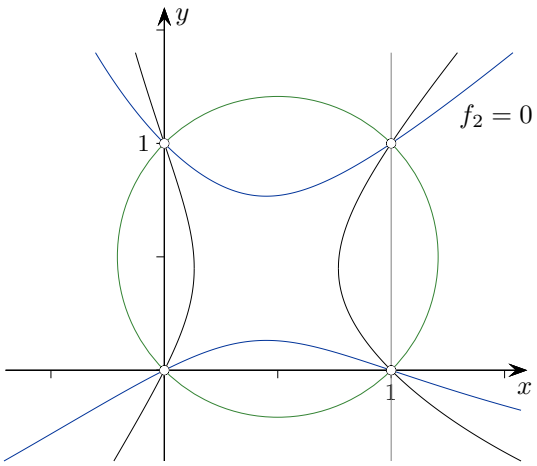
1) $V(I)$ ist endlich.
2) Für jedes $i \in 1, \ldots, n$ gibt es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\mathrm{FM}(g_j) = x_i^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

siehe obiges Beispiel $\mathrm{FM}(g_1) = x,\ \mathrm{FM}(g_2) = y^2,\ \mathrm{FM}(g_4) = z^6$

1) $\Longrightarrow$ 2)
Sei die Schnittmenge endlich, z. B. $(a_1, a_2),\ (b_1, b_2),\ (c_1, c_2)$.
Um die starke Form des Hilbertschen Nullstellensatzes anwenden zu können, benötigen wir ein Polynom $g(x)$ mit diesen Nullstellen, analog $g(y)$. Da es auch mehr Nullstellen sein dürfen, nehmen wir einfacherweise $g(x) = (x - a_1)(x - b_1)(x - c_1) = x^3 + \ldots \in k[x, y]$. Dann folgt für eine natürliche Zahl ℓ $g^\ell(x) = x^{3\ell} + \ldots \in I$.
$x^{3\ell}$ wird von einem $\mathrm{FM}(g_j)$ geteilt. Es gibt somit ein g_j mit einer Potenz von x als führendes Monon.

2) $\Longrightarrow$ 1)
Wir hatten uns schon überlegt, dass die Lösungsmenge endlich ist, wenn die Gröbner Basis diese Form hat.

↑ Beispiel



Die Abbildung veranschaulicht die Berechnung der Schnittpunkte mit Hilfe der Gröbner Basis.

$$f_1 = x^2y + 2x^2 - xy^2 - 2x - y^2 + y$$
$$f_2 = x^2y + x^2 - xy^2 - x - 2y^2 + 2y$$

Gröbner Basis lex $y > x$

$$G = \{g_1 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6x,\ g_2 = x^3 + x^2y + 2x^2 - xy - 3x,\ g_3 = x^2 + y^2 - x - y\}$$
$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6x = x(x-1)(x^2 + 3x + 6)$$

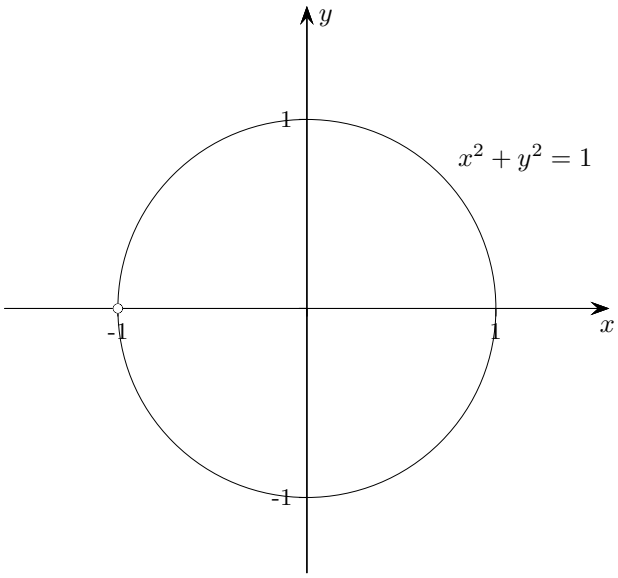
Schnittpunkte $(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)$

Probe, die Gröbner Basis erzeugt das Ideal $\langle f_1, f_2 \rangle$.

$$f_1 = g_2 + (-x - 1)g_3$$
$$f_2 = g_2 + (-x - 2)g_3$$

↑ Implizite Darstellung

Für nichtlineare Gleichungssysteme gibt es vielfältige Anwendungen, z. B.
können Parameterdarstellungen in implizite Darstellungen umgeformt werden.



$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

Gröbner Basis lex $t > x > y$ für
$I = \langle (1+t^2)x - (1-t^2), (1+t^2)y - 2t \rangle$:

$$G = \{x^2 + y^2 - 1, ty + x - 1, tx + t - y\}$$

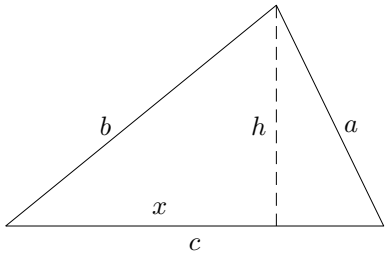
$(-1, 0)$ ist in der Parameterdarstellung nicht enthalten.

$$x = t_1 t_2$$
$$y = t_1 t_2^2$$
$$z = t_1^2$$

Gröbner Basis lex $t_1 > t_2 > x > y$ für
$I = \langle x - t_1 t_2, y - t_1 t_2^2, z - t_1^2 \rangle$:

$G = \{x^4 - y^2 z, t_2 yz - x^3, \ldots\}$ ergibt die Fläche $z = x^4/y^2$.

↑ Formel von Heron



Wie lässt sich der Flächeninhalt A eines Dreiecks durch die Seitenlängen a, b, c ausdrücken?

Nach dem Satz von Pythagoras gilt: $b^2 = x^2 + h^2, \quad a^2 = (c-x)^2 + h^2,$ und weiter $A = \frac{1}{2}ch.$

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + h^2 - b^2 \\ f_2 &= c^2 - 2cx + x^2 + h^2 - a^2 \\ f_3 &= ch - 2A \end{aligned}$$

x, h sind zu eliminieren, von Hand wäre das sehr aufwändig.

Gröbner Basis lex $x > h > a > b > c > A$

$$G = \{a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4 + 16A^2, \dots\}$$

$$\begin{aligned} -16A^2 &= a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4 \\ &= (a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c) \\ A^2 &= \frac{1}{16}(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(-a+b+c) \\ A &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(-a+b+c)} \end{aligned}$$

alternative Formulierung

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{mit dem halben Umfang} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

↑ Resultante, Gröbner Basis

$$\begin{aligned} f &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ g &= b_2x^2 + b_1x + b_0 \end{aligned}$$

In $\mathbb{C}$ gilt:

$$\mathrm{Res}(f,g) = 0 \iff f \text{ und } g \text{ haben eine gemeinsame Nullstelle.}$$

$$\mathrm{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & \square \\ \square & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \square \\ \square & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = a_0^2b_2^2 - a_0a_1b_1b_2 - 2a_0a_2b_0b_2 + a_0a_2b_1^2 + a_1^2b_0b_2 - a_1a_2b_0b_1 + a_2^2b_0^2$$

Gröbner Basis lex $x > a0 > a1 > a2 > b0 > b1 > b2$ für

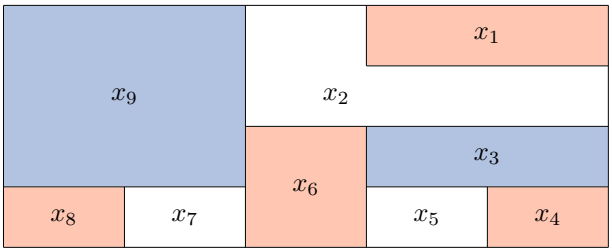
$I = \langle a_2x^2 + a_1x + a_0,\, b_2x^2 + b_1x + b_0\rangle \subset \mathbb{C}[x, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2]$:

$$G = \{a_0^2b_2^2 - a_0a_1b_1b_2 - 2a_0a_2b_0b_2 + a_0a_2b_1^2 + a_1^2b_0b_2 - a_1a_2b_0b_1 + a_2^2b_0^2,\ \dots\}$$

Das Element aus G ohne x stimmt mit $\mathrm{Res}(f,g)$ überein.
Das von diesem Element erzeugte Ideal heißt 1. Eliminationsideal (hier wurde x eliminiert).

Die Berechnung der Gröbner Basis für f und g mit jeweils Grad 4 übersteigt
im Allgemeinen die Speicherkapazität.

↑ Einfärben von Landkarten



Alle Landkarten können mit vier Farben so gefärbt können, dass benachbarte Gebiete nicht dieselbe Farbe haben (Vier-Farben-Satz). Um zu entscheiden, ob drei Farben zum Färben einer speziellen Landkarte ausreichen, analysiert man ein System von Polynomen, das die Landkarte repräsentiert. Jede Farbe wird durch eine komplexe kubische Einheitswurzel und jedes Gebiet wird durch eine Variable x_i so codiert, dass die Variable nur einen der drei Werte annehmen kann, der für eine der drei Farben steht. Somit erhalten wir die Bedingung ${x_i}^3 - 1 = 0$ für jedes Gebiet $i = 1, \ldots, 9$.
Für zwei benachbarte Gebiete, vertreten durch x_j und x_k,
$(j,k) \in \{(1,2), (2,3), (2,6), (2,9), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (5,6), (6,7), (6,9), (7,8), (7,9), (8,9)\}$,
gilt die Bedingung

$$0 = 1 - 1 = x_j^3 - x_k^3 = (x_j - x_k)(x_j^2 + x_j x_k + x_k^2) \quad \text{und wegen } x_j \neq x_k \quad x_j^2 + x_j x_k + x_k^2 = 0.$$

Wir überprüfen, ob das System mit 23 polynomialen Gleichungen gelöst werden kann.

mit Maple

```
with(Groebner):
Basis([x1^3 - 1, x2^3 - 1, x3^3 - 1, x4^3 - 1, x5^3 - 1, x6^3 - 1, x7^3 - 1, x8^3 - 1, x9^3 - 1,
       x1^2 + x1*x2 + x2^2, x2^2 + x2*x3 + x3^2, x2^2 + x2*x6 + x6^2, x2^2 + x2*x9 + x9^2, x3^2 + x3*x4 + x4^2,
       x3^2 + x3*x5 + x5^2, x3^2 + x3*x6 + x6^2, x4^2 + x4*x5 + x5^2, x5^2 + x5*x6 + x6^2, x6^2 + x6*x7 + x7^2,
       x6^2 + x6*x9 + x9^2, x7^2 + x7*x8 + x8^2, x7^2 + x7*x9 + x9^2, x8^2 + x8*x9 + x9^2],
            plex(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9));
```

$$[x1^3 - 1, x1^2 + x1*x2 + x2^2, -x1^2 - x1*x2 + x2*x3 + x3^2, x4 + x3 + x2,$$
$$x5 - x2, x6 + x3 + x2, x7 - x2, x8 + x3 + x2, x9 - x3]$$

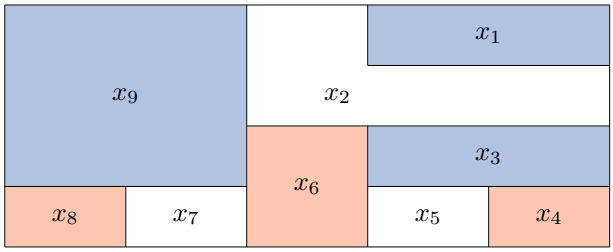
$$\begin{aligned} 0 &= -x_1^2 - x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_3 - x_1) \end{aligned}$$

Somit können x_1, x_2 und x_3 verschiedene Farben vertreten $(x_1 + x_2 + x_3 = 0)$ oder es gilt $x_1 = x_3$.

Für x_1, x_2 und x_3 verschieden erhalten wir weiter $x_2 = x_5 = x_7$, $x_3 = x_9$ und x_8, x_6 müssen von x_2 und x_3 verschieden sein, also $= x_4$.

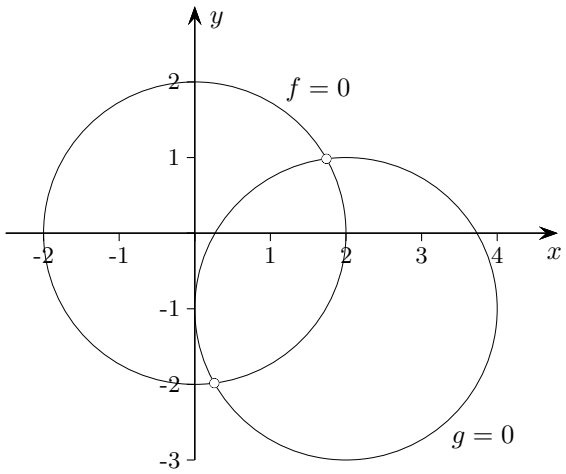
Im 2. Fall erhalten wir $x_1 = x_3 = x_9$, $x_4 = x_6 = x_8$ und $x_2 = x_5 = x_7$.

Es gibt daher, von Permutationen der Farben abgesehen, 2 verschiedene Lösungen.

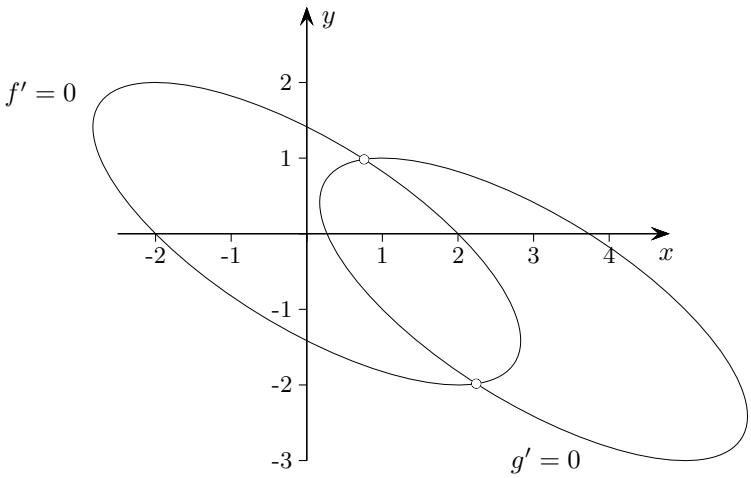

x_9
x_2
x_1
x_6
x_3
x_8
x_7
x_5
x_4

↑ Polynom-Transformation

$$\begin{aligned} f &= x^2+y^2-4 \\ g &= (x-2)^2+(y+1)^2-4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f &= x^2+y^2-4 \\ g &= (x-2)^2+(y+1)^2-4 \\ & \quad x \leftarrow x+y \qquad \text{Transformation} \\ f' &= (x+y)^2+y^2-4 \\ g' &= (x+y-2)^2+(y+1)^2-4 \end{aligned}$$



Hier wird ein gemeinsamer Schnittpunkt (x_0, y_0) von $f = 0$ und $g = 0$
auf den gemeinsamen Schnittpunkt $(x_0 - y_0, y_0)$ von $f' = 0$ und $g' = 0$ transformiert.

$$\begin{aligned} f &= x^2yz + 2xy + x \\ & \quad x \leftarrow x + 2z \\ & \quad y \leftarrow y - z \\ f' &= (x+2z)^2(y-z)z + 2(x+2z)(y-z) + x + 2z \\ &= -4z^4 - (4x-4y)z^3 - (x^2-4xy+4)z^2 + (x^2y - 2x + 4y + 2)z + 2xy + x \end{aligned}$$

Für den Beweis der schwachen Form des Hilbertschen Nullstellensatzes benötigen wir eine in einer Variablen linearen Transformation, so dass wie hier ein Polynom in z mit dem größten Potenzterm $-4z^4$ vom Grad des (höchsten) Grades von f $(2+1+1)$ und Koeffizienten aus $\mathbb{Q}[x, y]$ vorliegt.
Es wird dann nur um die Existenz von gemeinsamen Schnittpunkten gehen, und nicht um die spezielle Lage.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ linear in x_n transformiert: $f'(x_1 + \lambda_1 x_n, x_2 + \lambda_2 x_n, \ldots, x_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n, x_n) = c x_n^{\operatorname{grad} f} + \ldots$

c ist ein Polynom in den λ_i, die so gewählt werden können, dass $c \neq 0$ ist.

↑ Schwache Form des Hilbertschen Nullstellensatzes

Schwache Form des Hilbertschen Nullstellensatzes
Genau dann, wenn die I erzeugenden Polynome $f_1, f_2, \ldots, f_m$ keine gemeinsame Nullstelle in $\mathbb{C}$ haben, ist $1 \in I$ (1 kann als Linearkombination der f_i dargestellt werden, $I = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$).

> Für Polynome mit einer Variablen ist die Aussage offensichtlich, da Polynome in $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfallen.

Der Nullstellensatz wird durch Induktion über die Anzahl n der Variablen bewiesen.

Für $n > 1$ betrachten wir ein Erzeugendensystem $f_1, f_2, \ldots, f_m$ von I. Wir können annehmen, dass f_1 den Term $x_n^{\operatorname{grad} f_1}$ enthält. Eine lineare Koordinatentransformation ändert schließlich nichts daran, ob $V(I)$ leer ist oder nicht und auch nichts daran, ob I die Eins enthält oder nicht.

Unter der Annahme, dass $V(I) = \emptyset$ ist, basteln wir uns Polynome a_i aus $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, die in I enthalten sind und keine gemeinsame Nullstelle in $\mathbb{C}^{n-1}$ haben. Nach Induktionsannahme kann die Eins als Linearkombination der a_i dargestellt werden. Mit den a_i liegt dann die Eins in I, und wir sind fertig.

Wir fassen $f_2, \ldots, f_m$ mit einer Linearkombination mit einer neuen Variablen u zusammen und bilden

$h = f_2 + uf_3 + \ldots + u^{m-2} f_m \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n, u]$, sowie die Resultante

$\operatorname{Res}(f_1, h, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{n-1}, u]$ und schreiben sie als Polynom in u

$\operatorname{Res}(f_1, h, x_n) = a_k(x_1, \ldots, x_{n-1})u^k + \ldots, +a_0(x_1, \ldots, x_{n-1})$ mit $a_i \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots x_{n-1}]$.

Die Resultante zweier Polynome lässt sich als Linearkombination dieser Polynome darstellen.
Es gibt daher Polynome $p, q \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n, u]$, so dass gilt

$$\operatorname{Res}(f_1, h, x_n) = pf_1 + qh = pf_1 + qf_2 + quf_3 + \ldots + qu^{m-2} f_m.$$

Vergleichen wir dies mit obiger Darstellung der Resultante als Polynom in u, sehen wir, dass die Koeffizientenpolynome $a_i(x_1, \ldots, x_{n-1})$ im Ideal $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ liegen müssen.

Angenommen, die a_i hätten eine gemeinsame Nullstelle $(z_1, \ldots z_{n-1})$ in $\mathbb{C}^{n-1}$. Dann wäre

$\operatorname{Res}(f_1, h, x_n)(z_1, \ldots z_{n-1}, u) \in \mathbb{Q}[u]$ das Nullpolynom. Somit hätten die beiden Polynome

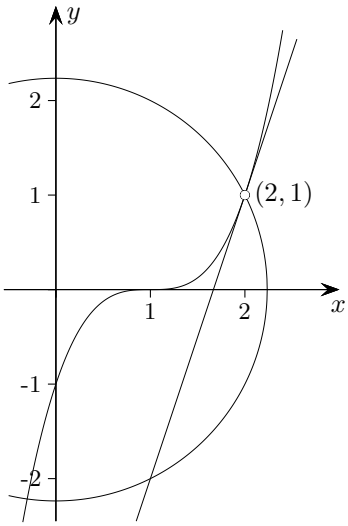
$f_1(z_1, \ldots z_{n-1}, x_n) \in \mathbb{Q}[x_n]$ und
$h(z_1, \ldots z_{n-1}, x_n, u) \in \mathbb{Q}[x_n, u]$

einen nichtkonstanten gemeinsamen Faktor. In $\mathbb{C}$ gäbe es dann eine Nullstelle z_n von $f_1(z_1, \ldots z_{n-1}, x_n)$, für die $h(z_1, \ldots z_{n-1}, z_n, u)$ das Nullpolynom wäre (der gemeinsame Faktor hängt nicht von u ab, da f_1 diese Variable nicht enthält). $f_1(z_1, \ldots z_{n-1}, z_n)$ verschwände und nach Definition von h auch alle $f_j(z_1, \ldots z_{n-1}, z_n)$ für $j = 2, \ldots, m$. Damit läge $(z_1, \ldots z_{n-1}, z_n)$ in $V(I)$, was wir aber als leer vorausgesetzt haben. Damit ist klar, dass die a_i keine gemeinsame Nullstelle haben können, und der Satz ist bewiesen.

Die folgende Beispielrechnung erhellt die Beweisführung.

↑ Nullstellensatz Erläuterungen

$$\begin{aligned} f_1 &= y - 3x + 5 \\ f_2 &= x^2 + y^2 - 5 \\ f_3 &= y - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$



$V(I)$ soll mit Hilfe von Resultanten ermittelt werden.

Mit WolframAlpha

GroebnerBasis[$\{y - 3x + 5, x^2 + y^2 - 5, y - x^3 + 3x^2 - 3x + 1\}, \{x, y\}$]

$\{y - 1, x - 2\}$

Die Polynome f_1, f_2, f_3 erzeugen das Ideal I.

Spitzen-Idee: f_2, f_3 mit einer Linearkombination mit einer neuen Variablen u zusammenzufassen

$h = f_2 + uf_3 \in \mathbb{Q}[x, y, u]$, die Resultante

$\mathrm{Res}(f_1, h, y) \in \mathbb{Q}[x, u]$ zu bilden und sie als Polynom in u

$\mathrm{Res}(f_1, h, y) = \underbrace{(-x^3 + 3x^2 - 4)}_{a_1} u + \underbrace{10x^2 - 30x + 20}_{a_2}$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}[x]$ zu schreiben.

Die Resultante zweier Polynome lässt sich als Linearkombination dieser Polynome darstellen.
Es gibt daher Polynome $p, q \in \mathbb{Q}[x, y, u]$, so dass gilt

$\mathrm{Res}(f_1, h, y) = pf_1 + qh = pf_1 + qf_2 + quf_3$.

Vergleichen wir dies mit obiger Darstellung der Resultante als Polynom in u, z. B. $a_1 = qf_3$,
sehen wir, dass die Koeffizientenpolynome $a_1(x)$ und $a_2(x)$ im Ideal $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ liegen müssen.

Die Probe mit der Gröbner Basis $a_1 = (-x^2 + x + 2)(x - 2)$, $a_2 = 10(x - 1)(x - 2)$ zeigt auch $a_i \in I$.

Die a_i haben die gemeinsame Nullstelle $z_1 = 2$ in $\mathbb{C}$. Dann ist

$\mathrm{Res}(f_1, h, y)(z_1, u) \in \mathbb{Q}[u]$ das Nullpolynom

Somit haben die beiden Polynome (in $\mathbb{C}$ gilt: $\mathrm{Res}(f, g) = 0 \iff f$ und g haben eine gemeinsame Nullstelle)

$f_1(z_1, y) = y - 1 \in \mathbb{Q}[y] \subset \mathbb{Q}[y, u]$ und
$h(z_1, y, u) = (y - 1)(y + u + 1) \in \mathbb{Q}[y, u]$

einen nichtkonstanten gemeinsamen Faktor, hier $(y - 1)$. In $\mathbb{C}$ gibt es dann die Nullstelle $z_2 = 1$ von $f_1(z_1, y)$, für die $h(z_1, z_2, u)$ das Nullpolynom ist (der gemeinsame Faktor hängt nicht von u ab, da f_1 diese Variable nicht enthält). $f_1(z_1, z_2)$ verschwindet und nach Definition von h auch alle $f_j(z_1, z_2)$ für $j = 2, 3$.
Damit liegt $(z_1, z_2) = (2, 1)$ in $V(I)$.

Für eine alternative Berechnung mit Resultanten siehe hier.

↑ Lemma von Dickson

Jedes monomiale Ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ kann von endlich vielen Monomen erzeugt werden.

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach n geführt.
Im Fall $n = 1$ wird I vom Monom mit dem kleinsten Exponenten erzeugt.

Sei heuristisch $n = 2$.
Die erzeugenden Monome besitzen die Form $x^\alpha y^\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.
Wir benötigen eine endliche Menge L an Monomen, so dass jedes Monom aus I
von einem Monom aus L geteilt wird.
Sei $J \subset k[x]$ das Ideal (Projektion von I auf $k[x]$), das von allen x^α erzeugt wird, für die $x^\alpha y^\beta \in I$ ist.

Nach Induktionsvoraussetzung wird J (hier $n = 1$) von einem Monom $x^{\alpha_{\min}}$ erzeugt.
Sei für $x^{\alpha_{\min}} y^\beta \in I$ für β der größte Exponent $\beta_{\max}$. L enthält $x^{\alpha_{\min}} y^\beta$.

Betrachte für $\beta = 0, \ldots, \beta_{\max} - 1$ jeweils das Ideal $J_\beta \subset k[x]$, das von den Monomen x^α erzeugt wird,
für die $x^\alpha y^\beta \in I$ gilt. Jedes der J_β wird nach Induktionsannahme von einem Monom erzeugt.

L besteht zusätzlich aus all diesen, mit dem zugehörigen y^β ergänzten Monomen.

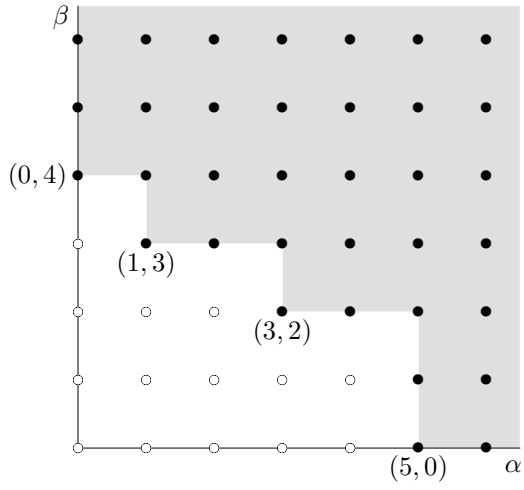
Sei heuristisch $n = 3$.
Die erzeugenden Monome besitzen die Form $x^\alpha y^\beta z^\gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$.
Wir benötigen eine endliche Menge L an Monomen, so dass jedes Monom aus I
von einem Monom aus L geteilt wird.
Sei $J \subset k[x, y]$ das Ideal (Projektion von I auf $k[x, y]$), das von allen $x^\alpha y^\beta$ erzeugt wird,
für die $x^\alpha y^\beta z^\gamma \in I$ ist.

Nach Induktionsvoraussetzung wird J (hier $n = 2$) von endlich vielen Monomen $x^{\alpha_k} y^{\beta_k}$ erzeugt.
Für ein bestimmtes k' gibt es dann einen größten Exponenten $\gamma_{\max}$ mit $x^{\alpha_{k'}} y^{\beta_{k'}} z^{\gamma_{\max}} \in I$.
L enthält die J erzeugenden, mit $z^{\gamma_{\max}}$ ergänzten Monome $x^{\alpha_k} y^{\beta_k} z^{\gamma_{\max}}$.

Betrachte für $\gamma = 0, \ldots, \gamma_{\max} - 1$ jeweils das Ideal $J_\gamma \subset k[x, y]$, das von den Monomen $x^\alpha y^\beta$ erzeugt wird, für die
$x^\alpha y^\beta z^\gamma \in I$ gilt. Jedes der J_γ wird nach Induktionsannahme von endlich vielen Monomen erzeugt.

L besteht zusätzlich aus all diesen, mit dem zugehörigen z^γ ergänzten Monomen.

Der Induktionsschritt von $n - 1$ nach n erfordert mehr Indizes, aber keine weitere Idee.



Das Ideal I wird von den zugehörigen Monomen
$x^\alpha y^\beta$ des grau gefärbten Bereichs erzeugt.

$\beta_{\max} = 4,\ y^4 \in L$
$J_0 = J_1 = \langle x^5 \rangle,\ x^5 \in L,\ x^5 y \in L$
$J_2 = \langle x^3 \rangle,\ x^3 y^2 \in L$
$J_3 = \langle x \rangle,\ xy^3 \in L$
$I = \langle y^4, x^5, x^3 y^2, xy^3 \rangle$

↑ Hilbertscher Basissatz

Für ein beliebiges, im Allgemeinen nicht monomiales Ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ wählen wir eine Monomordnung und definieren das monomiale Ideal $\mathrm{FM}(I) = \langle \mathrm{FM}(f) \,|\, f \in I \setminus \{0\} \rangle$, das von den führenden Monomen aller Elemente von I erzeugt wird. Für die null existiert kein führender Term.

Nach dem Lemma von Dickson wird $\mathrm{FM}(I)$ von endlich vielen Monomen erzeugt, und zwar
von der Form $\mathrm{FM}(f_i),\ i = 1, \ldots, m$. Wir werden sehen, dass diese Elemente f_i das Ideal I erzeugen.
Damit folgt

Hilbertscher Basissatz
Jedes Ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ hat ein endliches Erzeugendensystem.

Um zu zeigen, dass die Elemente f_i das Ideal I erzeugen, ist nachzuweisen,
dass ein beliebiges Element $f \in I$ als Linearkombination der f_i darstellbar ist.
Eine Division von f durch $f_1, \ldots, f_m$ ergibt $f = a_1 f_1 + \ldots, + a_m f_m + r$, a_i und r Polynome.
Falls r nicht verschwindet, zeigt der Divisionsalgorithmus, dass das führende Monom $\mathrm{FM}(r)$ von r
durch keines der führenden Monome $\mathrm{FM}(f_i)$ teilbar ist. Andererseits ist aber $r = f - (a_1 f_1 + \ldots, + a_m f_m) \in I$, und
damit liegt $\mathrm{FM}(r)$ im Ideal $\mathrm{FM}(I)$. Da dieses von den $\mathrm{FM}(f_i)$ erzeugt wird, muss $\mathrm{FM}(r)$ Vielfaches eines $\mathrm{FM}(f_i)$
sein, ein Widerspruch. Also ist $r = 0$.

Einfache Folgerung
Sei $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ eine aufsteigende Kette von Idealen im Polynomring.
Dann stabilisiert sich die Kette irgendwann: $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$

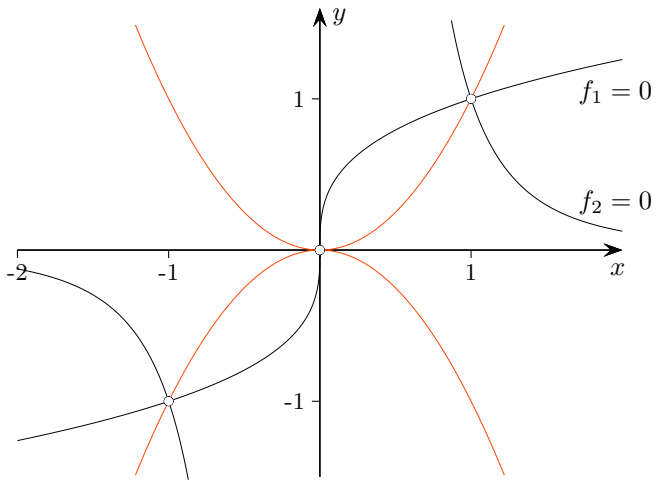
$I := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ ist auch ein Ideal.

Dieses ist endlich erzeugt: $I = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$

Irgendein I_k enthält alle g_i.

↑ Vektorraum der Normalformen

Die Normalformen $\mathrm{N}_G(f)$ von $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ (Reste bei Reduktion mit einer Gröbner Basis G) sind bei gegebener Monomordnung eindeutig bestimmt und aufgrund der Division nicht teilbar durch die führenden Monome von G. Normalformen sind daher k-Linearkombinationen von Monomen aus der Komplementärmenge von $\mathrm{FM}(G)$. Sie bilden einen Vektorraum.
Schauen wir uns das an einem Beispiel an.

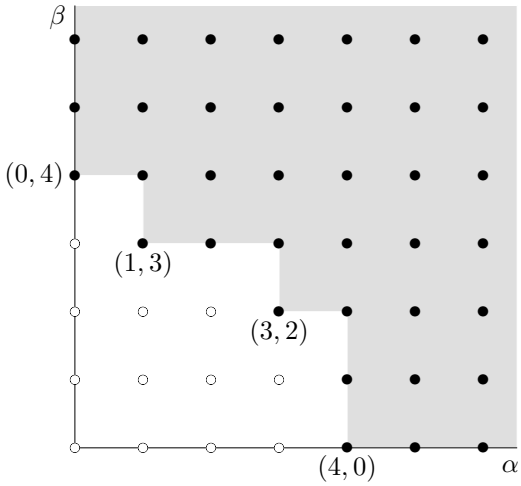


$$I = \langle f_1 = xy^3 - x^2, f_2 = x^3y^2 - y \rangle$$

Gröbner Basis deglex $x > y$

$$G = \{f_1 = x(y^3 - x), f_2 = x^3y^2 - y, y(y^3 - x), x^4 - y^2\}$$

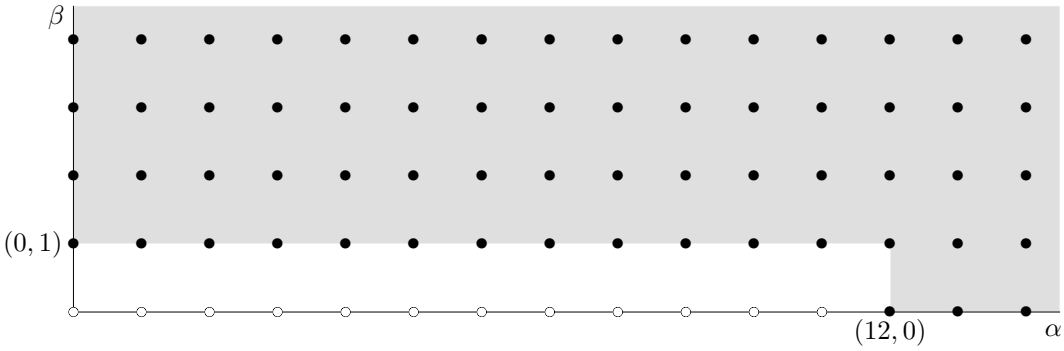
$\langle \mathrm{FM}(I) \rangle = \langle \mathrm{FM}(G) \rangle = \langle xy^3, x^3y^2, y^4, x^4 \rangle$, siehe hier



Eine Basis des Vektorraums der Normalformen besteht aus den Monomen $1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y, y^2, xy^2, x^2y^2, y^3$, die im weißen Bereich liegen.

Wir ändern die Monomordnung.
Gröbner Basis lex $y > x$

$$G = \{x^{12} - x^2, y - x^7\} \quad \langle \mathrm{FM}(I) \rangle = \langle y, x^{12} \rangle$$



Nun bilden die Monome $1, x, x^2, \ldots, x^{11}$ eine Basis. Beachte: Die Dimension 12 ist erhalten geblieben.
$V(I)$ enthält 11 verschiedene Punkte. $V(I) = \{(0,0)\} \cup \{(\zeta, \zeta^7) \,|\, \zeta^{10} = 1\}$ (Es gibt 10 verschiedene 10-te Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.)

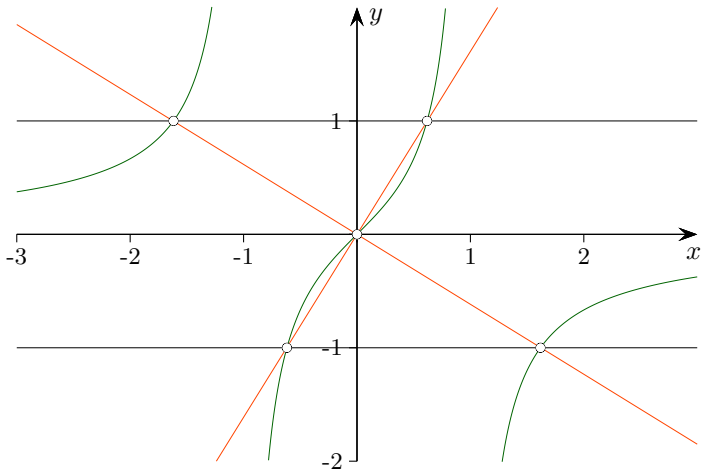
↑ Multiplikation mod G

Aus der Eindeutigkeit (siehe hier) des Restes r folgt für Nebenklassen unmittelbar:

Sei $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ eine Gröbner Basis für das Ideal $I \subset R = k[x_1, \ldots, x_n]$.
Dann gilt für $f, g \in R$: $f - g \in I$ $(f \equiv g,\ f + I = g + I)$ $\iff$ $\mathrm{N}_G(f) = \mathrm{N}_G(g)$

$$\begin{aligned} f &= p + \mathrm{N}_G(f) \\ g &= q + \mathrm{N}_G(g), \quad p, q \in I,\ f \equiv \mathrm{N}_G(f),\ g \equiv \mathrm{N}_G(g) \\ f - g &= p - q + \underbrace{\mathrm{N}_G(f) - \mathrm{N}_G(g)}_{\mathrm{N}_G(f-g)}, \quad f - g \in I \iff \mathrm{N}_G(f - g) = 0 \end{aligned}$$

Mit $f - g \in I$ nehmen f und g auf $V(I)$ gleiche Werte an.



$$I = \langle x^2y + x - y, xy^2 - x \rangle$$

Gröbner Basis $\mathrm{lex}(x, y)$

$$G = \{g_1 = x^2 + xy - y^2, g_2 = y^3 - y, g_3 = xy^2 - x\}$$

$\mathrm{FM}(G)$: x^2, y^3, xy^2

Die Monome $1, x, y, y^2, xy$ sind eine Basis des Vektorraums der Normalformen.
Das Produkt mod G von Basiselementen ergibt wieder eine Normalform.

$\circ$	1	x	y	y^2	xy
1	1	x	y	y^2	xy
x	x	$y^2 - xy$	xy	x	$y - x$
y	y	xy	y^2	y	x
y^2	y^2	x	y	y^2	xy
xy	xy	$y - x$	x	xy	$y^2 - xy$

Mit WolframAlpha

PolynomialReduce$[x^2y^2, \{x^2 + xy - y^2, y^3 - y, xy^2 - x\}, \{x, y\}]$

erhalten wir z. B. $xy \circ xy = x^2y^2 = y^2g_1 + (y - x)g_2 + y^2 - xy$, somit $x^2y^2 \equiv y^2 - xy$.

↑ Endlichkeitssatz

Sei $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ eine Gröbner Basis für das Ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Der Satz (nulldimensionales Ideal) kann zum Endlichkeitssatz erweitert werden.
Die Aussagen sind äquivalent.

1) $V(I)$ ist endlich.
2) Für jedes $i \in 1, \ldots, n$ gibt es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\mathrm{FM}(g_j) = x_i^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.
3) Der Vektorraum der Normalformen ist endlich-dimensional.

(Dieser Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$.)

1) $\Longleftrightarrow$ 2)
nachgewiesen

2) $\Longrightarrow$ 3)
Das Komplement der Menge $\mathrm{FM}(G)$ ist endlich, somit ist der Vektorraum endlich-dimensional.

3) $\Longrightarrow$ 1)
Um zu zeigen, dass $V(I)$ endlich ist, reicht der Nachweis, das es für jedes i nur endlich viele Komponenten x_i der Punkte aus $V(I)$ gibt.
Für ein festes i sind die Elemente 1, $\mathrm{N}(x_i)$, $\mathrm{N}(x_i^2)$, $\mathrm{N}(x_i^3)$, …, $\mathrm{N}(x_i^s)$ für ein s linear abhängig.
Die Null ist damit als nichttriviale Linearkombination darstellbar: $c_0 + c_1\mathrm{N}(x_i) + c_2\mathrm{N}(x_i^2) + \ldots + c_s\mathrm{N}(x_i^s) = 0$
$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{N}(c_0 + c_1x_i + c_2x_i^2 + \ldots + c_sx_i^s) = 0$, d. h. $c_0 + c_1x_i + c_2x_i^2 + \ldots + c_sx_i^s \in I$.
Für $V(I)$ gilt: $c_0 + c_1x_i + c_2x_i^2 + \ldots + c_sx_i^s = 0$ und diese Gleichung hat nur endl. viele Lösungen.
□

Genauer formuliert:

2) Für jedes $i \in 1, \ldots, n$ gibt es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $\mathrm{FM}(g_j) = x_i^{m_i}$, $m_i \in \mathbb{N}$.

Dann folgt: $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n} \in \langle \mathrm{FM}(I) \rangle$

Für die Exponenten α_i der Monome $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ des Komplements von $\langle \mathrm{FM}(I) \rangle$ gilt für jedes i:
$0 \le \alpha_i \le m_i - 1$. Die Anzahl dieser Monome - und damit auch die Dimension des Vektorraums der Normalformen - beträgt damit höchstens $m_1m_2\ldots m_n$.

Es soll noch gezeigt werden, dass die Anzahl der Punkte von $V(I)$
höchstens der Dimension des Vektorraums der Normalformen ist.

Beweisidee:
Zu jedem Punkt $p_i \in V(I)$, $i = 1, \ldots, m$, wird ein Polynom $f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $f_i(p_i) = 1$ und $f_i(p_j) = 0$ für $j \neq i$ konstruiert und nachgewiesen, dass die Normalformen $\mathrm{N}(f_i)$ linear unabhängig sind.

Angenommen, die Punkte p_1 und p_2 haben die unterschiedlichen t-ten Koordinaten a und b.
Für $g_2 = (x_t - b)/(a - b)$ gilt $g_2(p_1) = 1$ und $g_2(p_2) = 0$. In gleicher Weise sei für die Punkte p_1 und p_3 das Polynom g_3 mit $g_3(p_1) = 1$ und $g_3(p_3) = 0$ gebildet, usw.
$f_1 = g_2 \cdot g_3 \cdots g_m$ hat die gewünschte Eigenschaft $f_1(p_1) = 1$ und $f_1(p_j) = 0$ für $j \neq 1$.
Mit der gleichen Vorgehensweise erhalten wir für jeden Punkt p_i ein Polynom f_i mit der angegebenen Eigenschaft.

Zur linearen Unabhängigkeit:
$c_1\mathrm{N}(f_1) + c_2\mathrm{N}(f_2) + \ldots + c_m\mathrm{N}(f_m) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{N}(c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_mf_m) = 0$,
d. h. $c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_mf_m$ ist Element von I und verschwindet daher auf $V(I)$.
p_1 eingesetzt, ergibt $0 = c_1$, p_2 eingesetzt, ergibt $0 = c_2$, usw.

↑ $|V(I)|$ = Dimension des Vektorraums der Normalformen

Betrachten wir das Beispiel auf Seite 4.

$$I = \langle xy - 1, y^2 - 1 \rangle$$

Gröbner Basis $\text{lex}(x, y)$

$$G = \{y^2 - 1, x - y\}$$

$\text{FM}(G)$: x, y^2

Die Monome $1, y,$ bilden eine Basis des Vektorraums der Normalformen.
Die Dimension 2 stimmt hier mit der Anzahl der Schnittpunkte überein.

Beispiel auf Seite 5

$$I = \langle x^2 + y - 1, x + y^2 - 1 \rangle$$

Gröbner Basis $\text{lex}(x, y)$

$$G = \{x + y^2 - 1, y^4 - 2y^2 + y\}$$

$\text{FM}(G)$: x, y^4

Die Monome $1, y, y^2, y^3$ bilden eine Basis des Vektorraums der Normalformen.
Die Dimension 4 stimmt hier mit der Anzahl der Schnittpunkte überein.

Abschließend soll noch eine hinreichende Bedingung gefunden werden, so dass die Anzahl der Punkte von $V(I)$ genau der Dimension des Vektorraums der Normalformen ist.

Es genügt herauszufinden, unter welcher Voraussetzung die $\text{N}(f_i)$ den Vektorraum der Normalformen aufspannen, die lineare Unabhängigkeit wurde schon nachgewiesen.
Sei g ein Element dieses Vektorraums und $a_i = g(p_i)$. Betrachte $h = g-(a_1f_1+a_2f_2+\ldots+a_mf_m)$. Offensichtlich ist $h(p_i) = 0$ für alle i. h verschwindet also auf $V(I)$. Nach der starken Form des Hilbertschen Nullstellensatzes folgt $h^\ell \in I$ für ein ℓ. Wenn jetzt $h \in I$ wäre, folgte $\text{N}(h) = 0$ und dann weiter $\text{N}(g) = a_1\text{N}(f_1)+a_2\text{N}(f_2)+\ldots+a_m\text{N}(f_m)$ und die Behauptung wäre bewiesen.

Die Voraussetzung: $h^\ell \in I$ impliziert $h \in I$ (anschaulich I enthält die Wurzeln der Elemente aus I) wird in der Idealtheorie mit dem Begriff *Radikal* erfasst.

↑ Syzygie

Betrachten wir die Gleichung $h_1 g_1 + \cdots + h_n g_n = 0,\ g_i, h_i \in \mathbb{Q}[x, y, z]$, g_i seien gegeben.
Gesucht sind für die g_i alle Linearkombinationen der null mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}[x, y, z]$.

Eine Lösung $h = (h_1, \ldots, h_n)$ wird als n-Tupel geschrieben und heißt Syzygie der g_i.
Die Summe zweier Lösungen, sowie ein Vielfaches (mit einem Polynom) einer Lösung ist wieder eine Lösung.
Die Lösungsmenge ist algebraisch ein Modul, Schreibweise $\mathrm{Syz}(g_1, \ldots, g_n)$. Das ist eine Verallgemeinerung eines Vektorraums. Statt eines Körpers liegt bei einem Modul nur ein Ring (hier Polynomring) vor.

Beispiel
Die Polynome seien aus $\mathbb{Q}[x, y, z, w]$.
$\mathrm{Syz}(x^2 - yw,\ xy - wz,\ y^2 - xz) = ?$

$(y, -x, w)$ und $(-z, y, -x)$ sind hier beides Syzygien, denn es ist:

$$\begin{aligned} y(x^2 - yw) - x(xy - wz) + w(y^2 - xz) &= 0 \qquad &&= x^2y - y^2w - x^2y + xzw + y^2w - xzw \\ -z(x^2 - yw) + y(xy - wz) - x(y^2 - xz) &= 0 \qquad &&= -x^2z + yzw + xy^2 - yzw - xy^2 + x^2z \end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir noch nicht einsehen, dass diese beiden Syzygien
den Lösungsmodul erzeugen.

Es ist einfach, Syzygien für eine Gröbner Basis g_i zu bestimmen.
Zu $i \neq j$ wird das S-Polynom $S(g_i, g_j)$ als Linearkombination der g_i dargestellt, z. B. ergeben die Koeffizienten von $S(g_1, g_2) - (h_1 g_1 + \ldots + h_n g_n) = 0$ eine Syzygie.

$\{g_1 = x^2 - yw,\ g_2 = xy - wz,\ g_3 = y^2 - xz\}$ ist eine Gröbner Basis für die Monomordnung degrevlex,
Maple tdeg(x, y, z,w).

$$\begin{aligned} S(g_1, g_2) &= yg_1 - xg_2 = -wy^2 + xwz = -wg_3 \\ &\quad yg_1 - xg_2 + wg_3 = 0, \qquad \text{Syzygie } (y, -x, w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(g_1, g_3) &= y^2 g_1 - x^2 g_3 = x^3 z - y^3 w = xzg_1 - ywg_3 \\ &\quad y^2 g_1 - x^2 g_3 - (xzg_1 - ywg_3) = 0, \qquad \text{Syzygie } (y^2 - xz, 0, -x^2 + yw) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(g_2, g_3) &= yg_2 - xg_3 = x^2 z - yzw = zg_1 \\ &\quad yg_2 - xg_3 - zg_1 = 0, \qquad \text{Syzygie } (-z, y, -x) \end{aligned}$$

beachte: $(y^2 - xz, 0, -x^2 + yw) = y(y, -x, w) + x(-z, y, -x)$

↑ Syzygie

Besonders einfach wird die Gleichung $h_1c_1g_1 + \cdots + h_nc_ng_n = 0$, gegeben $g_i \in \mathbb{Q}[x,y]$ und $c_i \in \mathbb{Q}$, falls die g_i Monome sind, z. B.

$$h_1c_1x + h_2c_2x^2y + h_3c_3xy^2 = 0.$$

Syzygien $h = (h_1, h_2, h_3)$, sie entsprechen den S'-Polynomen $S(c_ig_i, c_{i+1}g_{i+1})$, sind für das Beispiel:

$$\begin{array}{lll}
(c_2xy,\ -c_1,\ 0), & S'_{1,2} = (xy,\ -d_{1,2},\ 0), & d_{1,2} = c_1/c_2, \quad S'_{1,2} = (h_1,\ -d_{1,2}h_2,\ 0) \\
(c_3y^2,\ 0,\ -c_1), & S'_{1,3} = (y^2,\ 0,\ -d_{1,3}), & d_{1,3} = c_1/c_3, \quad S'_{1,3} = (h_1,\ 0,\ -d_{1,3}h_3) \\
(0,\ c_3y,\ -c_2x), & S'_{2,3} = (0,\ y,\ -d_{2,3}x), & d_{2,3} = c_2/c_3, \quad S'_{2,3} = (0,\ h_2,\ -d_{2,3}h_3)
\end{array}$$

Ein Syzygien-Modul wird von den $S'_{i,j}$, $1 < i < j < n$, erzeugt, z. B. $h = e_1S'_{1,2} + e_2S'_{1,3} + e_3S'_{2,3},\ e_i \in \mathbb{Q}$.

Dazu stellen wir uns die linke Seite von $h_1c_1g_1 + \cdots + h_nc_ng_n = 0$ ausmultipliziert vor und nehmen uns einen Term mit dem Monom X vor. Da h als Syzygie angenommen wird, ist die Summe aller Terme mit diesem Monom null. O.B.d.A sei

$$\begin{aligned}
h &= (f_1h_1, f_2h_2, f_3h_3) && \mid \text{ d. h. } f_1h_1c_1g_1 + f_2h_2c_2g_2 + f_3h_3c_2g_2 = \underbrace{(f_1c_1 + f_2c_2 + f_3c_3)}_{0}X = 0 \\
&= f_1\underbrace{(h_1, -d_{1,2}h_2, 0)}_{S'_{1,2}} && \mid (f_1h_1, f_2h_2, f_3h_3) = (f_1h_1, -f_1d_{1,2}h_2, 0) \\
&\quad +(f_1d_{1,2} + f_2)\underbrace{(0, h_2, -d_{2,3}h_3)}_{S'_{2,3}} \mid && \quad + (0, f_1d_{1,2}h_2 + f_2h_2, \underbrace{-(f_1d_1 + f_2)d_{2,3})}_{-\frac{f_1c_1 + f_2c_2}{c_3} = f_3}\ h_3)
\end{aligned}$$

alternativ

$$h_1c_1x + h_2c_2x^2y + h_3c_3xy^2 = 0.$$

Syzygien $h = (h_1, h_2, h_3)$, sie entsprechen den S-Polynomen $S(c_ig_i, c_{i+1}g_{i+1})$, sind für das Beispiel:

$$\begin{array}{lll}
(c_2xy,\ -c_1,\ 0), & S_{1,2} = (c_2xy,\ -c_1,\ 0), & S_{1,2} = (c_2h_1,\ -c_1h_2,\ 0) \\
(c_3y^2,\ 0,\ -c_1), & S_{1,3} = (c_3y^2,\ 0,\ -c_1), & S_{1,3} = (c_3h_1,\ 0,\ -c_1h_3) \\
(0,\ c_3y,\ -c_2x), & S_{2,3} = (0,\ c_3y,\ -c_2x), & S_{2,3} = (0,\ c_3h_2,\ -c_2h_3)
\end{array}$$

Ein Syzygien-Modul wird von den $S_{i,j}$, $1 < i < j < n$, erzeugt, z. B. $h = e_1S_{1,2} + e_2S_{1,3} + e_3S_{2,3},\ e_i \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
h &= (f_1h_1, f_2h_2, f_3h_3) \\
&= \frac{1}{c_2}f_1\underbrace{(c_2h_1, -c_1h_2, 0)}_{S_{1,2}} && \mid (f_1h_1, f_2h_2, f_3h_3) = \frac{1}{c_2}(f_1c_2h_1, -f_1c_1h_2, 0) \\
&\quad + \frac{1}{c_2c_3}(f_1c_1 + f_2c_2)\underbrace{(0, c_3h_2, -c_2h_3)}_{S_{2,3}} \mid && \quad +\big(0, \frac{1}{c_2}(f_1c_1h_2 + f_2c_2h_2), \underbrace{-\frac{1}{c_3}(f_1c_1 + f_2c_2)}_{f_3}\,h_3\big)
\end{aligned}$$

↑ Syzygie

Die Ermittlung von Syzygien für Polynome $f_1, f_2, \ldots, f_n$, die keine Gröbner Basis bilden,
erfolgt mit deren Gröbner Basis $g_1, g_2, \ldots, g_m$ und ihren $s_1, s_2, \ldots, s_\ell$ Syzygien.
Desweiteren wird eine $n \times m$-Matrix T benötigt, mit der die f_i auf die g_j transformiert werden.
Bei der Buchberger-Algorithmus-Ausführung wird ersichtlich, wie sich die g_j als Linearkombinationen der f_i darstellen lassen.

$$[g_1, g_2, \ldots, g_m] = [f_1, f_2, \ldots, f_n] \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1m} \\ \ldots & & \\ t_{n1} & & t_{nm} \end{bmatrix}}_{T}$$

Für eine Syzygie s_k der g_j gilt dann:

$$0 = [g_1, g_2, \ldots, g_m] \begin{bmatrix} s_{1k} \\ \ldots \\ s_{mk} \end{bmatrix} = [f_1, f_2, \ldots, f_n] \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1m} \\ \ldots & & \\ t_{n1} & & t_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1k} \\ \ldots \\ s_{mk} \end{bmatrix}}_{\text{ergibt eine Syzygie für die } f_i}$$

Wir ermitteln für das Beispiel (siehe Seite 6) eine Syzygie.

$f_1 = xy - 2y$
$f_2 = x^2 - 4y^2$ Gröbner Basis $\{g_1 = xy - 2y, g_2 = x^2 - 4y^2, g_3 = y^3 - y\}$

Syzygien für die g_j

$S(g_1, g_2) = xg_1 - yg_2 = -2xy + 4y^4 = -2g_1 + 4g_3 \implies (x+2)g_1 - yg_2 - 4g_3 = 0, \quad s_1 = (x+2, -y, -4)$
$S(g_2, g_3) = y^3 g_2 - x^2 g_3 = x^2 y - 4y^5 = (x+2)g_1 + (-4y^2 - 4)g_3 \implies s_2 = (x+2, -y^3, -4y^2 + x^2 - 4)$

Tabelle T

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4}(x+2) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}y \end{bmatrix} \qquad S(f_1, f_2) = xf_1 - yf_2 = 4y^3 - 2xy = -2f_1 + 4g_3 \implies g_3 = \frac{1}{4}(x+2)f_1 - \frac{1}{4}yf_2$$

Syzygien für die f_j

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4}(x+2) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2 \\ -y \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4}(x+2) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2 \\ -y^3 \\ -4y^2 + x^2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x^3 - xy^2 + \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 \\ -\frac{1}{4}x^2 y + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(x+2)(x^2 - 4y^2) \\ -\frac{1}{4}y(x+2)(x-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix}$$

Mit $f_1 = y(x-2)$ ist die Probe $s_{11}f_1 + s_{12}f_2 = 0$ im Kopf möglich.

Nebenbei: Das Ergebnis für zwei Polynome f_1 und f_2 ist stets auch ohne Rechnung offensichtlich.
Hier kann der Faktor $(x+2)$ entfallen.

↑ Syzygie

Weitere Syzygien ergeben sich möglicherweise durch:

$$\big[g_1, g_2, \ldots, g_m\big] = \big[f_1, f_2, \ldots, f_n\big] \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1m} \\ \ldots & & \\ t_{n1} & & t_{nm} \end{bmatrix}}_{T}$$

$$\big[f_1, f_2, \ldots, f_n\big] = \big[g_1, g_2, \ldots, g_m\big] \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \ldots & & \\ u_{m1} & & u_{mn} \end{bmatrix}}_{U} \qquad U \text{ entsteht durch Reduktion der } f_i.$$

$$\Longrightarrow \qquad \big[f_1, f_2, \ldots, f_n\big] = \big[f_1, f_2, \ldots, f_n\big]\, TU$$

$$\Longrightarrow \qquad \big[f_1, f_2, \ldots, f_n\big](E_n - TU) = 0, \qquad n \times n\text{-Einheitsmatrix } E_n$$

Die (transponierten) Spalten der Matrix $(E_n - TU)$ sind Elemente von $\mathrm{Syz}(f_1, \ldots, f_n)$.

Im einfachen Beispiel auf der vorigen Seite (die f_i gehören zur Gröbner Basis) ist TU die 2×2-Einheitsmatrix und somit $(E_2 - TU)$ die Nullmatrix, so dass sich nichts Neues ergibt.

↑ Syzygie

Ermitteln wir Syzygien für

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 - y \\ f_2 &= xy \\ f_3 &= y^2 - x \end{aligned} \qquad \text{Gröbner Basis } \{g_1 = x,\, g_2 = y\}, \quad (y, -x) \in \operatorname{Syz}(g_1, g_2)$$

$$\big[g_1, g_2\big] = \big[f_1, f_2, f_3\big] \underbrace{\begin{bmatrix} -y & -1 \\ x & y \\ -1 & -x \end{bmatrix}}_{T}, \qquad T \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y^2 + x \\ 0 \\ x^2 - y \end{bmatrix}$$

$$\big[f_1, f_2, f_3\big] = \big[g_1, g_2\big] \underbrace{\begin{bmatrix} x & y & -1 \\ -1 & 0 & y \end{bmatrix}}_{U}$$

$$\Longrightarrow \qquad \big[f_1, f_2, f_3\big] = \big[f_1, f_2, f_3\big] TU$$

$$\Longrightarrow \qquad \big[f_1, f_2, f_3\big](E_3 - TU) = 0, \qquad 3 \times 3\text{-Einheitsmatrix } E_3$$

Die (transponierten) Spalten der Matrix $(E_3 - TU)$ sind weitere Elemente von $\operatorname{Syz}(f_1, f_2, f_3)$.

$$TU = \begin{bmatrix} 1 - xy & -y^2 & 0 \\ x^2 - y & xy & y^2 - x \\ 0 & -y & 1 - xy \end{bmatrix}, \qquad E_3 - TU = \begin{bmatrix} xy & y^2 & 0 \\ -x^2 + y & -xy + 1 & -y^2 + x \\ 0 & y & xy \end{bmatrix}$$

Die 3. Spalte ist linear abhängig von den ersten beiden,
$(0, -y^2 + x, xy) = -y(xy, -x^2 + y, 0) + x(y^2, -xy + 1, y)$.

Insgesamt erhalten wir die Syzygien $(xy, -x^2 + y, 0)$, $(y^2, -xy + 1, y)$, $(-y^2 + x, 0, x^2 - y)$.

Es kann gezeigt werden, dass bei diesem Vorgehen ein Erzeugendensystem des Syzygien-Moduls gefunden wird.

↑ Polynomdivision (Reduktion) mit dem Gauss-Algorithmus

$$\frac{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 7}{x^2 + x + 1} = ?$$

Wie bei der Reduktion von S-Polynomen interessiert nur der Rest r.
$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 7 = q \cdot (x^2 + x + 1) + r$

Die Koeffizienten werden in eine Matrix eingefügt, geordnet nach Potenzen.

x^4	x^3	x^2	x	1		
0	0	1	1	1	|	$x^2 + x + 1$
1	1	3	2	7	|	$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 7$

Beim Gauss-Algorithmus wird ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addiert.
Der Rest r bleibt unverändert, wenn wir Zeilen für $x \cdot (x^2 + x + 1)$ und $x^2 \cdot (x^2 + x + 1)$ zur Matrix hinzufügen, damit eine Dreiecksform berechnet werden kann.
Der Dividend bildet die letzte Zeile.

x^4	x^3	x^2	x	1		
1	1	1	0	0	|	$x^4 + x^3 + x^2$
0	1	1	1	0	|	$x^3 + x^2 + x$
0	0	1	1	1	|	$x^2 + x + 1$
1	1	3	2	7	|	$x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 7$

Der Gauss-Algorithmus liefert:

x^4	x^3	x^2	x	1
1	1	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	0	5

Die händische Probe ergibt: $x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 7 = (x^2 + 2)(x^2 + x + 1) + 5$

↑ Reduktion mit dem Gauss-Algorithmus

$f = x^2 - y^2 + x + y$ soll mit $g = xy + 1$ und $h = y^2 - x$ reduziert werden.

x^2	xy^2	xy	x	y^2	y	1		lexikographische Ordnung $x > y$
-1	1	0	0	0	0	0	|	$xh = xy^2 - x^2$
0	1	0	0	0	1	0	|	$yg = xy^2 + y$
0	0	0	-1	1	0	0	|	$h = y^2 - x$
0	0	1	0	0	0	1	|	$g = xy + 1$
1	0	0	1	-1	1	0	|	$f = x^2 - y^2 + x + y$

Der Gauss-Algorithmus liefert den Rest 0:

x^2	xy^2	xy	x	y^2	y	1
-1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	-1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$$f = x^2 - y^2 + x + y = yg - (x+1)h = y(xy+1) - (x+1)(y^2 - x) + 0$$

Hierauf aufbauend entwickelte Faugère ab 2000 effiziente Algorithmen zur Berechnung einer Gröbner Basis.