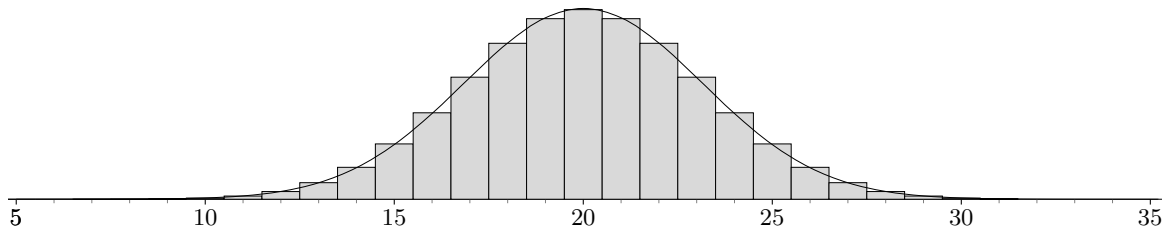


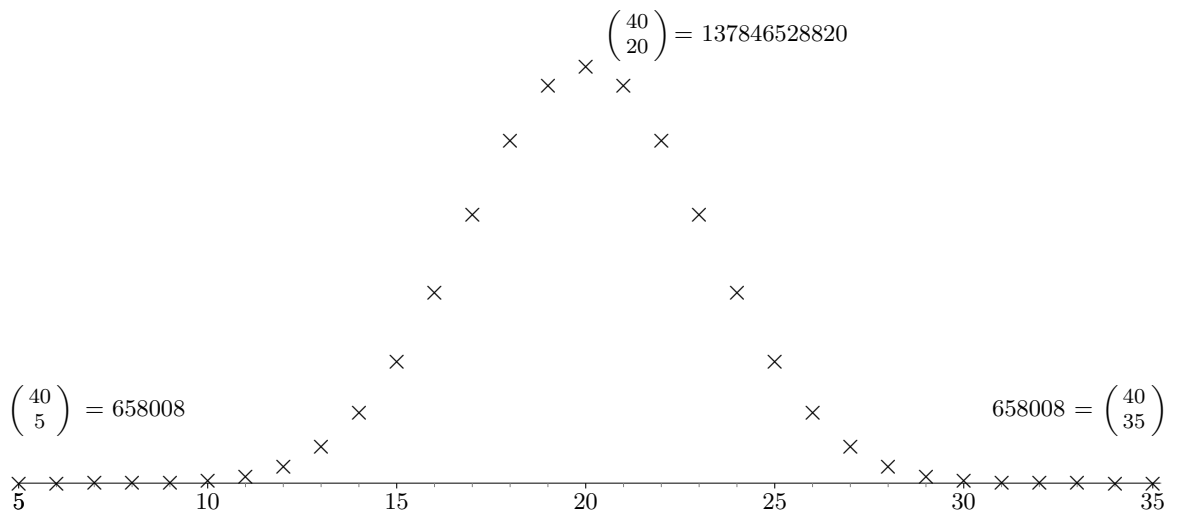
# Beweis der Näherungsformel für die Binomialverteilung



1730 entwickelte de Moivre eine Näherungsformel für  $p = \frac{1}{2}$ . Laplace konnte sie 1812 verallgemeinern.

$$P_{1/2}^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{mit } \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Um die approximierende Funktion zu ermitteln, richten wir unseren Blick zunächst auf die Binomialkoeffizienten und stellen sie für  $n = 40$  grafisch dar. Diese Werte scheinen die Form des Graphen schon zu bestimmen. Bei näherem Hinsehen ist dies auch nicht verwunderlich, da  $P_{1/2}^{40}(X = k) = \binom{40}{k} \cdot \frac{1}{2^{40}}$  ist.



Um das Verhalten der Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{m}$  für  $n \rightarrow \infty$  zu untersuchen, werden die  $m$ -Werte in ihrer relativen Lage zu  $\frac{n}{2}$  betrachtet,  $n$  muss hierbei gerade sein. Wir schreiben die Binomialkoeffizienten um:  $a_k = \binom{2n}{n+k}$ ,  $a_k = a_{-k}$ . Problematisch ist noch die Größenordnung. Daher nehmen wir den Anteil von  $a_k$  am größten Wert  $a_0 = \binom{2n}{n}$ .

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{a_0} &= \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-k+k)}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)} = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \left(1 - \frac{k}{n+2}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n+k}\right) \\ &\approx \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \quad \text{beachte: } e^{-k} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n, \text{ daher folgt mit } k = t\sqrt{n} \\ &= \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}t} \\ &\approx e^{-t^2} \quad \Rightarrow \quad a_k = a_0 \cdot e^{-t^2}, \quad \text{das heißt } \binom{2n}{n \pm k} = \binom{2n}{n} \cdot e^{-\frac{k^2}{n}} \end{aligned}$$

## Beweis der Näherungsformel für die Binomialverteilung

Aufg.

Leite mit dem Wallisschen Produkt  $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1))^2} \cdot \frac{1}{n}$

$$\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{her.}$$

Präzisierung der obigen Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{a_0} &= \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-k+k)}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)} = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \left(1 - \frac{k}{n+2}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n+k}\right) \\ &> \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \end{aligned}$$

$$\frac{a_k}{a_0} = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \left(1 - \frac{k}{n+2}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n+k}\right)$$

$$\implies \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k < \frac{a_k}{a_0} < \left(1 - \frac{k}{n+k}\right)^k \quad \text{mit } k = t\sqrt{n} \text{ folgt}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}t} < \frac{a_k}{a_0} < \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n+t}}\right)^{\sqrt{n}t} &= \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n+t}}\right)^{(\sqrt{n+t})t-t^2} \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n+t}}\right)^{(\sqrt{n+t})t}}_{\rightarrow e^{-t^2}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n+t}}\right)^{-t^2}}_{\rightarrow 1} \end{aligned}$$

Nach der Näherungsformel von Laplace gilt:

$$P_{1/2}^{2n}(X = \mu + k) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n \cdot \frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot e^{-\frac{k^2}{n}} \quad \text{beachte: } \sigma^2 = \frac{n}{2}$$

Somit ist die allgemeine Näherungsformel von Laplace für  $p = \frac{1}{2}$  bewiesen. Die Annahme, dass die Länge der Bernoulli-Kette gerade ist, kann entfallen, da es auf eine Veränderung um 1 nicht ankommt.

Die rechte Seite von

$$P_{1/2}^n(X = k) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

kann als Flächeninhalt eines Rechtecks gesehen werden. Bei der Standardisierung gehen die Rechtecke der Breite 1 in Rechtecke der Breite  $\frac{1}{\sigma}$  über. Mit der Funktion  $\Phi(z)$ , die den Inhalt der Fläche unter der Gaußsche Glockenkurve  $\varphi$  bis zur rechten Grenze  $z$  angibt, ergibt das:

$$P_{1/2}^n(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

oder etwas genauer:

$$P_{1/2}^n(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b+0,5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-0,5-\mu}{\sigma}\right)$$

Gaußsche Glockenkurve  $\varphi$

