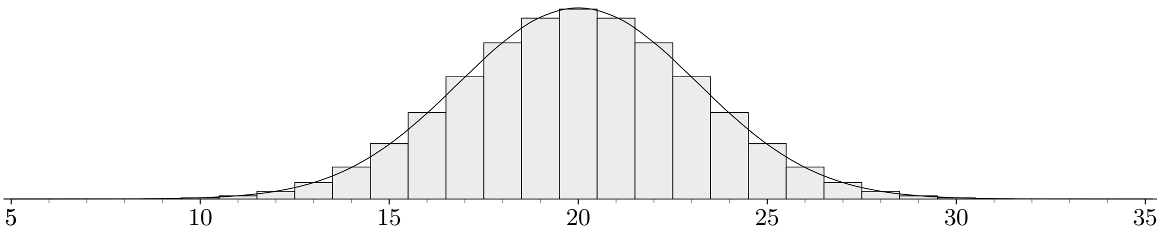
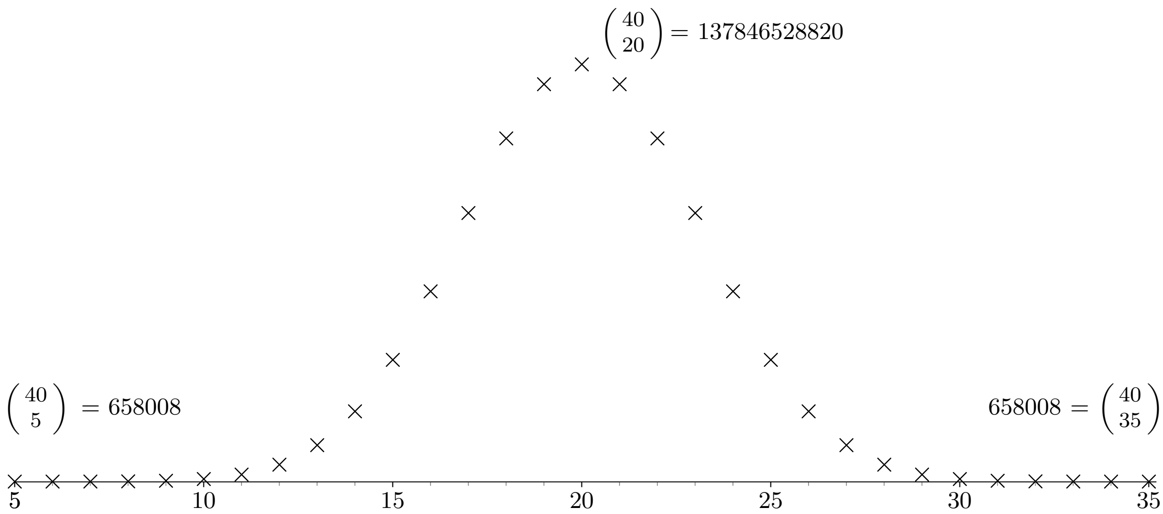
# Beweis der Näherungsformel für die Binomialverteilung




1730 entwickelte de Moivre eine Näherungsformel für $p = \frac{1}{2}$. Laplace konnte sie 1812 verallgemeinern.

$$P_{1/2}^{n}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \qquad \text{mit } \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Um die approximierende Funktion zu ermitteln, richten wir unseren Blick zunächst auf die Binomialkoeffizienten und stellen sie für $n = 40$ grafisch dar. Diese Werte scheinen die Form des Graphen schon zu bestimmen. Bei näherem Hinsehen ist dies auch nicht verwunderlich, da $P_{1/2}^{40}(X=k) = \binom{40}{k} \cdot \frac{1}{2^{40}}$ ist.




Um das Verhalten der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m}$ für $n \to \infty$ zu untersuchen, werden die $m$-Werte in ihrer relativen Lage zu $\frac{n}{2}$ betrachtet, $n$ muss hierbei gerade sein. Wir schreiben die Binomialkoeffizienten um: $a_k = \binom{2n}{n+k}$, $a_k = a_{-k}$. Problematisch ist noch die Größenordnung. Daher nehmen wir den Anteil von $a_k$ am größten Wert $a_0 = \binom{2n}{n}$.

$$\begin{aligned}
\frac{a_k}{a_0} &= \frac{(n-k+1)\,(n-k+2)\ \dots\ (n-k+k)}{(n+1)\quad (n+2)\ \dots\ (n+k)} = \left(1-\frac{k}{n+1}\right)\left(1-\frac{k}{n+2}\right)\ \dots\ \left(1-\frac{k}{n+k}\right) \\
&\approx \left(1-\frac{k}{n}\right)^k \qquad \text{beachte: } e^{-k} = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n, \text{ daher folgt mit } k = t\sqrt{n} \\
&= \left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}\,t} \\
&\approx e^{-t^2} \qquad \Longrightarrow \quad a_k = a_0 \cdot e^{-t^2}, \quad \text{das heißt } \binom{2n}{n \pm k} = \binom{2n}{n} \cdot e^{-\frac{k^2}{n}}
\end{aligned}$$

© Roolfs

# Beweis der Näherungsformel für die Binomialverteilung

Aufg.

Leite mit dem Wallisschen Produkt $\qquad \pi \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n)^2}{(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n{-}1))^2}\cdot\dfrac{1}{n}$

$\binom{2n}{n}\cdot\dfrac{1}{2^{2n}} \;\approx\; \dfrac{1}{\sqrt{\pi\, n}}$ $\qquad$ her.

Präzisierung der obigen Abschätzung

$$\frac{a_k}{a_0} \;=\; \frac{(n{-}k{+}1)\;(n{-}k{+}2)\;\ldots\;(n{-}k{+}k)}{(n{+}1)\quad (n{+}2)\;\ldots\;(n{+}k)} \;=\; (1-\frac{k}{n{+}1})(1-\frac{k}{n{+}2})\;\;\ldots\;\;(1-\frac{k}{n{+}k})$$

$$> \;(1-\frac{k}{n})^k$$

$$\frac{a_k}{a_0} \;=\; (1-\frac{k}{n{+}1})(1-\frac{k}{n{+}2})\;\;\ldots\;\;(1-\frac{k}{n{+}k})$$

$$\Longrightarrow \qquad (1-\frac{k}{n})^k \;<\; \frac{a_k}{a_0} \;<\; (1-\frac{k}{n{+}k})^k \qquad \text{mit } k = t\sqrt{n} \text{ folgt}$$

$$(1-\frac{t}{\sqrt{n}})^{\sqrt{n}\,t} \;<\; \frac{a_k}{a_0} \;<\; (1-\frac{t}{\sqrt{n}{+}t})^{\sqrt{n}\,t} = (1-\frac{t}{\sqrt{n}{+}t})^{(\sqrt{n}+t)\,t-t^2}$$

$$= \underbrace{(1-\frac{t}{\sqrt{n}{+}t})^{(\sqrt{n}+t)\,t}}_{\longrightarrow\, e^{-t^2}} \cdot \underbrace{(1-\frac{t}{\sqrt{n}{+}t})^{-t^2}}_{\longrightarrow\, 1}$$

Nach der Näherungsformel von Laplace gilt:

$$P_{1/2}^{2n}(X=\mu+k) \;\approx\; \frac{1}{\sigma}\,\varphi(\frac{k}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2n\cdot\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}\cdot e^{-\frac{k^2}{n}} \qquad \text{beachte: } \sigma^2 = \frac{n}{2}$$

Somit ist die allgemeine Näherungsformel von Laplace für $p=\frac{1}{2}$ bewiesen. Die Annahme, dass die Länge der Bernoulli-Kette gerade ist, kann entfallen, da es auf eine Veränderung um 1 nicht ankommt.

Die rechte Seite von

$$P_{1/2}^{n}(X=k) \;\approx\; \frac{1}{\sigma}\,\varphi(\frac{k-\mu}{\sigma})$$

kann als Flächeninhalt eines Rechtecks gesehen werden. Bei der Standardisierung gehen die Rechtecke der Breite 1 in Rechtecke der Breite $\frac{1}{\sigma}$ über. Mit der Funktion $\Phi(z)$, die den Inhalt der Fläche unter der Gausssche Glockenkurve $\varphi$ bis zur rechten Grenze $z$ angibt, ergibt das:

$$P_{1/2}^{n}(a\le X\le b) \;\approx\; \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) \;-\; \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

oder etwas genauer:

$$P_{1/2}^{n}(a\le X\le b) \;\approx\; \Phi(\frac{b+0{,}5-\mu}{\sigma}) \;-\; \Phi(\frac{a-0{,}5-\mu}{\sigma})$$