Was ist ein Grenzwert?

Wir betrachten die Zahlenfolge a_n

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \ldots$$

die aufgrund eines Bildungsgesetzes (welches? nächste Seite) unbegrenzt fortgesetzt werden kann.

Die Folgenglieder nähern sich immer mehr $\sqrt{2} = 1{,}414213\ \ldots$ an.

Die Folge stellt eine Möglichkeit dar, $\sqrt{2}$ auf beliebig viele Stellen genau zu ermitteln.

Dieser Sachverhalt wird durch $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$ beschrieben.

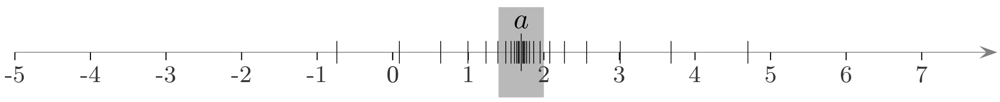
$\sqrt{2}$ ist der Grenzwert der Folge a_n.

$\sqrt{2}$ ist nicht als Bruch darstellbar und kann somit auch nicht in der Folge auftauchen.

Welche Eigenschaft muss eine Zahlenfolge $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$ haben, damit mit ihr eine Zahl a beliebig genau ausgerechnet werden kann?
Zu beliebig vorgegebener Stellenanzahl k muss es jeweils eine Stelle n_0 in der Folge geben, von der ab alle weiteren Folgenglieder mit a in den ersten k Stellen übereinstimmen.
Oder:
Zu beliebig vorgegebener Ungenauigkeit ε (griech. epsilon, z.B. $\varepsilon = 0{,}01$ oder $\varepsilon = 0{,}0001$, ε erinnert an error) muss es jeweils eine Stelle n_0 in der Folge geben, von der ab die Abweichung der Folgenglieder von der Zahl a kleiner als die vorgegebene Ungenauigkeit ist.
Die Abweichung ist der Betrag der Differenz, also $|\ a_n - a\ |$.
Und kürzer:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall}\quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists}\quad \underset{n \geq n_0}{\forall}\ |\ a_n - a\ | < \varepsilon$$

$\forall$ für alle, $\exists$ es gibt ein



Die Grafik hat mit der obigen Folge nichts zu tun.

Zu jeder Umgebung von a muss es eine Stelle in der Folge geben, von der ab alle weiteren Folgenglieder in der Umgebung liegen. Zum Nachweis der Konvergenz kann verwendet werden:

Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent, desgleichen falls sie das Cauchy-Kriterium erfüllt:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall}\quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists}\quad \underset{m,n \geq n_0}{\forall}\ |\ a_m - a_n\ | < \varepsilon$$

Jede reelle Zahl kann als Grenzwert einer Folge gesehen werden.

Zahlenfolge a_n

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \dots$$

Man entdeckt den rekursiven Aufbau von Zähler und Nenner ($n \geq 3$) :

$$\begin{aligned} Z_n &= 2 \cdot Z_{n-1} + Z_{n-2} \\ N_n &= 2 \cdot N_{n-1} + N_{n-2} \end{aligned}$$

Näherungsbruch	stabile Dezimalstellen	Differenz
$\frac{3}{2}$	1,5 ...	− 0,10
$\frac{7}{5}$	1,4 ...	0,016
$\frac{17}{12}$	1,41 ...	− 0,0028
$\frac{41}{29}$	1,41 ...	0,00049
$\frac{99}{70}$	1,4142 ...	− 0,000084
$\frac{239}{169}$	1,4142 ...	0,000014
$\dots$		

Die Folge $\quad a_n = \dfrac{Z_n}{N_n},\ \ n = 1,\ 2,\ ... \quad$ strebt gegen

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807317668\ ...$$

$\sqrt{2}$ kann auch als Summe einer unendlichen Reihe dargestellt werden.