Was ist ein Grenzwert?

Wir betrachten die Zahlenfolge a_n

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \ldots$$

die aufgrund eines Bildungsgesetzes (welches? nächste Seite) unbegrenzt fortgesetzt werden kann.

Die Folgenglieder nähern sich immer mehr $\sqrt{2} = 1{,}414213\ \ldots$ an.

Die Folge stellt eine Möglichkeit dar, $\sqrt{2}$ auf beliebig viele Stellen genau zu ermitteln.

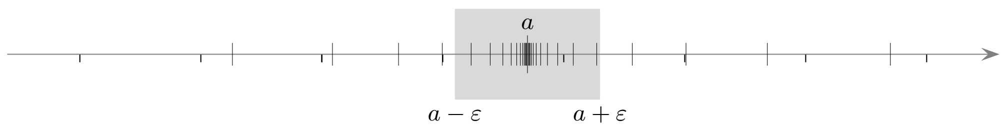
Dieser Sachverhalt wird durch $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \sqrt{2}$ beschrieben.

$\sqrt{2}$ ist der Grenzwert der Folge a_n.

$\sqrt{2}$ ist nicht als Bruch darstellbar und kann somit auch nicht in der Folge auftauchen.

Welche Eigenschaft muss eine Zahlenfolge $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$ haben, damit mit ihr eine Zahl a definiert wird, d. h. beliebig genau ausgerechnet werden kann?
Zu beliebig vorgegebener Stellenanzahl k muss es jeweils eine Stelle n_0 in der Folge geben, von der ab alle weiteren Folgenglieder mit a in den ersten k Stellen übereinstimmen.
Oder:
Zu beliebig vorgegebener Ungenauigkeit ε (griech. epsilon, z.B. $\varepsilon = 0{,}01$ oder $\varepsilon = 0{,}0001$, ε erinnert an error) muss es jeweils eine Stelle n_0 in der Folge geben, von der ab die Abweichung der Folgenglieder von der Zahl a kleiner als die vorgegebene Ungenauigkeit ist.
Die Abweichung ist der Betrag der Differenz, also $|\ a_n - a\ |$.
Und kürzer:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall}\quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists}\quad \underset{n \geq n_0}{\forall}\ |\ a_n - a\ | < \varepsilon \qquad\qquad \forall \text{ für alle, } \exists \text{ es gibt ein}$$



Äquivalent zu $|\ a_n - a\ | < \varepsilon$ ist $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Zu jeder ε-Umgebung $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ von a muss es eine Stelle n_0 in der Folge geben, von der ab alle weiteren Folgenglieder in der ε-Umgebung liegen.
Statt „für alle ε“ können auch die Zahlen einer Null-Folge genommen werden, z. B. $\frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}$.
Zu gegebenem a wird durch die Herleitung eines funktionalen Zusammenhangs $n_0 = g(\varepsilon)$ aus dem Bildungsgesetz der Folge das Streben der Folgenglieder gegen a (die Konvergenz gegen a) erfasst.

Zum Nachweis der Konvergenz kann verwendet werden:

Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent, desgleichen, falls sie das Cauchy-Kriterium erfüllt (siehe Reelle Zahlen, S. 6):

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall}\quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists}\quad \underset{m, n \geq n_0}{\forall}\ |\ a_m - a_n\ | < \varepsilon$$

Ab einer bestimmten Stelle (n_0) ist der Abstand der Folgenglieder beliebig klein.
Ab einer bestimmten Stelle unterscheiden sich die Folgenglieder beliebig wenig voneinander.

Betrachten wird die Zahlenfolge

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \ldots$$

und den rekursiven Aufbau von Zähler und Nenner $(n \geq 3)$:

$$\begin{aligned} Z_n &= 2 \cdot Z_{n-1} + Z_{n-2} \\ N_n &= 2 \cdot N_{n-1} + N_{n-2} \end{aligned}$$

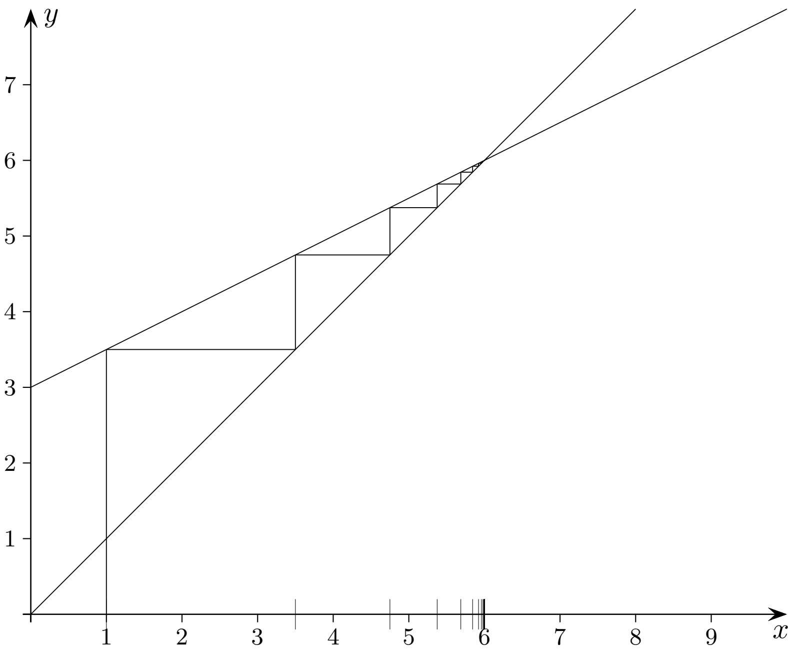
Folge	stabile Dezimalstellen	Quadrat
$\frac{3}{2}$	1,5	2,25
$\frac{7}{5}$	1,4	1,96
$\frac{17}{12}$	1,4166666666 ...	2,006944444 ...
$\frac{41}{29}$	1,4137931034 ...	1,998810939 ...
$\frac{99}{70}$	1,4142857142 ...	2,000204082 ...
$\frac{239}{169}$	1,4142011834 ...	1,999964987 ...
$\frac{577}{408}$	1,4142156862 ...	2,000006007 ...
$\frac{1393}{985}$	1,4142131979 ...	1,999998969 ...
$\frac{3363}{2378}$	1,4142136248 ...	2,000000177 ...
$\frac{8119}{5741}$	1,4142135516 ...	1,999999970 ...
$\frac{19601}{13860}$	1,4142135642 ...	2,000000005 ...
$\frac{47321}{33461}$	1,4142135620 ...	1,999999999 ...
...		

Die Folge $\quad a_n = \dfrac{Z_n}{N_n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \quad$ strebt gegen (erzeugt)

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095048801688\ldots$$

Die Gleichung $x = \frac{1}{2}x + 3$ besitzt die Lösung $x = 6$ (grafisch als Schnitt der Geraden).
Die Iteration $a_{n+1} = f(a_n)$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ und $a_1 = 1$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 3{,}5 \\
a_3 &= 4{,}75 \\
a_4 &= 5{,}375 \\
a_5 &= 5{,}6875 \\
a_6 &= 5{,}84375 \\
a_7 &= 5{,}921875 \\
a_8 &= 5{,}9609375 \\
a_9 &= 5{,}98046875 \\
a_{10} &= 5{,}990234375 \\
a_{11} &= 5{,}9951171875 \\
a_{12} &= 5{,}9975585937\ldots \\
a_{13} &= 5{,}9987792968\ldots \\
a_{14} &= 5{,}9993896484\ldots \\
a_{15} &= 5{,}9996948242\ldots \\
a_{16} &= 5{,}9998474121\ldots \\
a_{17} &= 5{,}9999237060\ldots \\
a_{18} &= 5{,}9999618530\ldots \\
a_{19} &= 5{,}9999809265\ldots \\
a_{20} &= 5{,}9999904632\ldots \\
a_{21} &= 5{,}9999952316\ldots \\
a_{22} &= 5{,}9999976158\ldots \\
a_{23} &= 5{,}9999988079\ldots \\
a_{24} &= 5{,}9999994039\ldots \\
a_{25} &= 5{,}9999997019\ldots \\
a_{26} &= 5{,}9999998509\ldots \\
a_{27} &= 5{,}9999999254\ldots \\
a_{28} &= 5{,}9999999627\ldots \\
a_{29} &= 5{,}9999999813\ldots \\
a_{30} &= 5{,}9999999906\ldots \\
&\ldots \\
\longrightarrow &\quad 5{,}9999999999\ldots
\end{aligned}
$$



Die Folge konvergiert gegen 6.

Zu jeder reellen Zahl, also auch 6 ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$), gibt es unendlich viele Folgen, die die Zahl erzeugen, deren Grenzwert die Zahl ist. Die Folgen ergeben sich aus Berechnungsverfahren, mit denen die Zahl beliebig genau ermittelt werden kann. Die potentiell unendlichen (nie endend gedachten) Folgen verkörpern den dynamischen Aspekt des Grenzwertbegriffs, der aktual unendlich gedachte (griffbereit existierende) Grenzwert den statischen Aspekt.

Zusammengefasst

1. <u>Alle</u> 0/1/2/3 … /9-Folgen mit vorangestelltem $a, \ldots$ ($a \in \mathbb{Z}$) bilden die Menge der reellen Zahlen, z.B. gilt:

2.
$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016\ldots$$

   Es gibt keine rationale Zahl, also auch keine Zahl mit endlich vielen Nachkommastellen, deren Quadrat 2 ist. Um $\sqrt{2}$ beliebig genau approximieren zu können, muss man unbegrenzt viele Nachkommastellen in Betracht ziehen.

3. Reelle Zahlen können durch Folgen und unendliche Summen definiert werden.
   Angesichts der Tabelle ist es plausibel, dass die (monotone) Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ eine Zahl definiert, den Grenzwert. Mit größer werdendem n ergeben sich immer mehr gültige Dezimalziffern.

n	$(1 + \frac{1}{n})^n$
10^1	2,593 742 46 …
10^2	2,704 813 82 …
10^3	2,716 923 93 …
10^4	2,718 145 92 …
10^5	2,718 268 23 …
10^6	2,718 280 46 …
10^7	2,718 281 69 …
10^8	2,718 281 81 …

   Der Grenzwert der Folge heißt e, Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$

4. Welche Eigenschaft muss nun eine Folge haben, damit sie eine reelle Zahl definiert? Anders ausgedrückt: damit sie konvergiert. Die durch die Folge definierte Zahl heißt Grenzwert der Folge.

5. Man stelle sich vor, die Gleichheit zweier reeller Zahlen a und b zeigen zu müssen.
   Das ist wegen der unendlich vielen Nachkommastellen der Zahlen nicht ganz einfach. Wenn es aber gelingt, für jedes $\varepsilon > 0$ (also jede Zahl größer null) die Ungleichung $|\, b - a \,| < \varepsilon$ nachzuweisen, müsste $a = b$ gelten. Alternativ könnte man für jedes $k \in \mathbb{N}$ zeigen, dass $|\, b - a \,| < 10^{-k}$ gilt.
   Nun stelle man sich weiter vor, dass die Zahl b durch eine Folge a_n definiert wird. Dann müsste es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle n_0 geben, so dass für alle weiteren Folgenglieder $|\, a_n - a \,| < \varepsilon$ gilt.
   Die Definition der Konvergenz sollte jetzt verständlich sein.

6. Es mag anfänglich verwundern, dass durch einen Grenzwertprozess (Sekanten-/Tangentensteigung, Rechtecksumme/Fläche), also die Ermittlung der durch eine Folge von Näherungen definierten Zahl, eine exakte Lösung der Fragestellung möglich ist. Das ist häufig der einzige Weg.

7. Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{n+1}{n}$

n	a_n
1	2
2	1
4	1,25
8	1,125
16	1,0625
32	1,03125
64	1,015625
128	1,0078125
256	1,0039062 ...
512	1,0019531 ...
1024	1,0009765 ...
2048	1,0004882 ...
4096	1,0002441 ...
8192	1,0001220 ...
16384	1,0000610 ...
32768	1,0000305 ...
65536	1,0000152 ...
131072	1,0000076 ...
262144	1,0000038 ...
524288	1,0000019 ...
1048576	1,0000009 ...
2097152	1,0000004 ...

Was versteht man hier propädeutisch unter dem Grenzwert von a_n?
Die Folge a_n kommt der 1 um so näher (beliebig nahe), je weiter man sie fortsetzt.
Der Unterschied zwischen 1 und a_n wird umso kleiner, je größer die Zahl n wird, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
Die 1 kommt hier in der Folge nicht vor, für kein n gilt also exakt $a_n = 1$.
a_n strebt gegen 1, $a_n \to 1$.
Die Folge erzeugt die Zahl 1, mit größer werdendem n ergeben sich immer mehr gültige Dezimalziffern. In einem anderen Fall könnte jedoch z. B. aus 3,19999 in nächsten Schritt 3,200001 werden.
Der Grenzwert ist eindeutig. Beachte: $1 = 0{,}\overline{9}$
Siehe nochmal 3., da wird e durch eine Folge erzeugt (definiert), nebenbei: für e gilt: $(e^x)' = e^x$.
Man stelle sich vor, a_n ist eine Näherungsfolge für die Berechnung einer Größe (z. B. Länge oder Fläche), wobei die Näherung umso besser ist, je größer n ist. Dann kann nur der Grenzwert als Maßzahl für die Größe in Betracht kommen. Jedoch:
Bevor z. B. die Größe Flächeninhalt verwendet wird, muss sie definiert werden.
Das erfolgt bei krummlinig begrenzten Flächen durch Angabe eines Grenzwertprozesses.
Leibniz sah die Tangentensteigung, den Flächeninhalt und die Länge eines Kurvenbogens für die untersuchten glatten Kurven als innerhalb der Geometrie definiert an. Im 17. Jh. bestand daher keine Notwendigkeit, den in den Differentialen enthaltenen Grenzwertprozess weiterzuentwickeln.

vereinfacht:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

Nullfolge $\quad \frac{1}{n} \to 0$

Bei einfachen Folgen kann der Grenzwert leicht einsehbar ermittelt werden.
Das Konvergenz-Kriterium ist dann nicht erforderlich.

Die Analysis ist im 17. Jh. ohne einen exakten Konvergenzbegriff entwickelt worden. Es war unmittelbar einsichtig, dass z. B. für eine monoton fallende Nullfolge a_n die alternierende Reihe $s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert (Leibniz-Kriterium). Für s liegt eine Intervallschachtelung vor.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \cdots = \ln 2$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 0{,}5 \\
s_4 &= 0{,}583333\ldots \\
s_8 &= 0{,}634523\ldots \\
s_{16} &= 0{,}662871\ldots \\
s_{32} &= 0{,}677766\ldots \\
s_{64} &= 0{,}685395\ldots \\
s_{128} &= 0{,}689256\ldots \\
s_{256} &= 0{,}691197\ldots \\
s_{512} &= 0{,}692171\ldots \\
s_{1024} &= 0{,}692659\ldots \\
s_{2048} &= 0{,}692903\ldots \\
s_{4096} &= 0{,}693025\ldots \\
s_{8192} &= 0{,}693086\ldots \\
s_{16384} &= 0{,}693116\ldots \\
s_{16384+1} &= 0{,}693154\ldots \\
&\ldots \\
\longrightarrow\quad & \ln 2 = 0{,}693147\ldots
\end{aligned}$$

Cauchy führte 1823 in seinen Vorlesungen an der École Polytechnique in Paris exakte Definitionen der Ableitung und der Stetigkeit ein, die jeweils auf einem Grenzwert und nicht auf dem Infinitesimalkalkül beruhen.
„Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.“[1]

Dies stieß auf den Widerstand der Studenten, denen die Vorlesungen zu abstrakt und zu wenig ingenieurorientiert waren.

Dass eine Variable sich einem Grenzwert „nähert“, war für Weierstraß 1815-1897 ein unerlaubter Rückgriff auf Bewegungsvorstellungen. Er formulierte die gänzlich statische, entgültige ε-Definition.

[1]Wenn die Werte, die sukzessiv derselben Variablen zugewiesen werden, sich unbeschränkt einem festen Wert nähern, dass sie schließlich von ihm so wenig abweichen wie man will, so wird derselbe der Grenzwert aller anderen [Werte] genannt.

Der Weg zur Definition

Mit der Folge $a_n = \dfrac{n^4}{2^n}$ wollen wir eine geom. Größe berechnen (denke hier z. B. an einen Abstand) und nehmen an, dass die Näherungen umso besser werden, je weiter wir in der Folge fortschreiten.

$$
\begin{array}{rcl}
a_1 &=& 0{,}5 \\
a_2 &=& 4 \\
a_3 &=& 10{,}125 \\
a_4 &=& 16 \\
a_5 &=& 19{,}53125 \\
a_6 &=& 20{,}250 \\
a_7 &=& 18{,}7578125 \\
a_8 &=& 16 \\
a_9 &=& 12{,}8144531250 \\
a_{10} &=& 9{,}765625 \\
 & & \ldots \\
a_{20} &=& 0{,}15258789062\ldots \\
a_{25} &=& 0{,}01164153218\ldots \\
a_{30} &=& 0{,}00075437128\ldots \\
a_{35} &=& 0{,}00004367393\ldots \\
a_{40} &=& 0{,}00000232830\ldots \\
a_{45} &=& 0{,}00000011654\ldots \\
a_{50} &=& 0{,}00000000555\ldots \\
a_{55} &=& 0{,}00000000025\ldots \\
 & \ldots & \\
\longrightarrow & & 0{,}00000000000\ldots
\end{array}
$$

Die Folge scheint die null zu erzeugen. Immer mehr Dezimalstellen der null werden sichtbar.
Die Folgenglieder selbst sind ungleich null.

Was heißt es nun, dass die Folge gegen null konvergiert?

Wenn wir z. B. in der Folge auf $a_{55} = 0{,}00000000025\ldots$ treffen, erwarten wir, dass die neun Nachkomma-Nullen auch weiterhin stabil bleiben. Wir begnügen uns aber damit, dass es eine Stelle in der Folge gibt, von wo ab die neun Nachkomma-Nullen stabil bleiben. Die Folge wird unserem Verständnis nach gegen null konvergieren, wenn es für jede beliebige Anzahl an Nachkomma-Nullen eine Stelle in der Folge gibt, von wo ab die Nachkomma-Nullen stabil bleiben. Das ist i.A. nicht einfach nachzuweisen, zumindest wenn die Grenzwertsätze nicht anwendbar sind.
Die Abweichung von a_{55} zur null ist kleiner als 10^{-9}. Im Hinblick auf Allgemeineres formuliert:
Die Folge konvergiert gegen null, wenn es zu jeder Abweichung $\varepsilon = 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Stelle in der Folge gibt, von wo ab $|a_n - 0| < \varepsilon$ ist. Auf die spezielle Form von ε kann verzichtet werden:
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Stelle ...
Die Verallgemeinerung: Eine Folge konvergiert gegen a, wenn ... liegt auf der Hand.
Den Nachweis für $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ erbringen wir hier nicht. Als Abstand kommt nur null in Frage, da jeder andere pos. Wert unterschritten wird.

Zur Definition des Grenzwerts

Jemand behauptet, er habe einen (einfachen) Algorithmus zur Berechnung von $a \in \mathbb{R}$ (denke an e, π, $\sqrt{17}$, usw). Wie kann er das belegen?

Er könnte z. B. nachweisen, dass sein Algorithmus für n gültige (n beliebig) Dezimalstellen von a (höchstens) $N(n)$ Schritte benötigt.

Da die Darstellung der reellen Zahlen nicht immer eindeutig ist ($0{,}\overline{9} = 1$) wird man genauer formulieren:

Er könnte z. B. nachweisen, dass sein Algorithmus für 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, nach (höchstens) $N(n)$ Schritten eine Zahl $a_{N(n)}$ erzeugt, deren Abweichung von a kleiner als 10^{-n} ist, $|a_{N(n)} - a| < 10^{-n}$.

Hiernach würde allerdings die Folge 3, 5, 3, 5, 3, ...   sowohl $a = 3$ als auch $a = 5$ erzeugen.

Um die Eindeutigkeit zu sichern, muss $N(n)$ so bestimmt werden, dass auch alle folgenden erzeugten Zahlen nur weniger als 10^{-n} von a abweichen. Und damit wären wir bei der Grenzwert-Definition.

Beispiel

Wir werden nachweisen, dass die Folge $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$ gegen 1 konvergiert.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} - 1 &= \frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} \qquad \text{Mit } a_n > 1 \text{ sind Beträge überflüssig.} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}-1} < \varepsilon \\ \frac{2}{\varepsilon} &< \sqrt{n}-1 \\ \frac{2}{\varepsilon}+1 &< \sqrt{n} \\ \left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2 &< n \end{aligned}$$

Damit ist der Konvergenz-Nachweis erbracht. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n ...

Sei z. B. $\varepsilon = 10^{-3}$. Dann ist die Abweichung für $2001^2 = 4004001 < n$ vom Grenzwert 1 kleiner als $\varepsilon = 10^{-3}$. Für $\varepsilon = 10^{-5}$ gilt Entsprechendes für $200001^2 = 40000400001 < n$

$$\begin{aligned} a_{4004000} &= 1{,}00100\ldots \\ a_{4004001} &= 1{,}00100\ldots \\ a_{4004002} &= 1{,}00099\ldots \\ a_{4004003} &= 1{,}00099\ldots \\ &\ \ \ldots \\ a_{400000400000} &= 1{,}0000100\ldots \\ a_{400000400001} &= 1{,}0000100\ldots \\ a_{400000400002} &= 1{,}0000099\ldots \\ a_{400000400003} &= 1{,}0000099\ldots \end{aligned}$$

Die Stelle in der Folge, von der ab die Abweichung kleiner als ε ist, muss nicht minimal wie hier im Beispiel sein. Für den Nachweis der Konvergenz genügt eine grobe Abschätzung.

Typisches

Auch das anschaulich Offensichtliche wird (zur Übung) bewiesen.

Voraussetzung
Die Folge a_n konvergiert gegen a und die Folge $(b_n - a_n)$ gegen null.

Folgerung
Die Folge b_n konvergiert gegen a.

math. Kurzschreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

alternative Schreibweise:

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \;\wedge\; (b_n - a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Longrightarrow \quad b_n \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Beweis

Nach Voraussetzung gibt es ein n_1, so dass für $n_1 < n$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

und es gibt ein n_2, so dass für $n_2 < n$ gilt: $|b_n - a_n| < \varepsilon$

Dann folgern wir mit der Dreiecksungleichung für $\max\{n_1, n_2\} < n$:

$$|b_n - a| = |b_n - a_n + a_n - a| < |b_n - a_n| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \square$$

Da das ε beliebig (klein) ist, ist die Behauptung bewiesen.
Aus kosmetischen Gründen beginnt man in der Regel mit $\frac{\varepsilon}{2}$, so dass sich $|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ergibt.

Reelle Zahlen 11. Jg

Reelle Zahlen

Kettenbrüche

Startseite