

Green-Funktion

1. Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung $y'' + y = r(x)$
2. $-y'' = r(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$
3. Allgemeines
4. $y'' + y = r(x)$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$
5. Ansatz für die Green-Funktion
6. Beispiel
7. $y'' - y' = r(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) - y'(1) = 0$
8. Es geht auch einfacher
9. Randbedingungen
10. Spezialfall
11. Beispiel
12. Heaviside-Funktion
13. Alternativer Weg zur Green-Funktion
14. Beispiel
15. Einheitsimpuls
16. Wirkung zweier Impulse
17. Symmetrie und Eindeutigkeit der Green-Funktion

↑ Green-Funktion

Wir betrachten (z.B.) eine inhomogene lineare DGL 2. Ordnung

$$y'' + y = r(x)$$

Die allgemeine Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ (Randwertaufgabe) setzt sich aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y'' + y = 0$ und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL zusammen.

Für eine partikuläre Lösung wäre eine geschlossene Darstellung

$$y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, t) r(t) dt$$

wünschenswert, die für alle Störfunktionen $r(t)$ gelten würde.

Die Funktion G ist nach George Green (1793-1841) benannt, der sie zur Lösung partieller Differentialgleichungen verwandte.

Das Beispiel $-y'' = r(x)$ $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $0 \leq x \leq 1$

führt durch zweimalige Integration zu einer Green-Funktion.

$$y'(x) = - \int_0^x r(t) dt + c_0$$

$$y(x) = - \int_0^x \left(\int_0^t r(s) ds \right) dt + c_0 x + c_1$$

$$= - \int_0^x 1 \left(\int_0^t \dots \right) dt + \dots$$

$$= - \left[t \int_0^t r(s) ds \right]_0^x + \int_0^x t \cdot r(t) dt + c_0 x + c_1$$

$$= \int_0^x (t - x) r(t) dt + c_0 x + c_1$$

$$= \int_0^x (t - x) r(t) dt + x \int_0^1 (1 - t) r(t) dt$$

$$= \int_0^x t(1 - x) r(t) dt + \int_x^1 x(1 - t) r(t) dt$$

$$= \int_0^1 G(x, t) r(t) dt$$

Die Variablen wurden umbenannt, damit keine Kollision mit der rechten Grenze entsteht.

Nun kann partiell integriert werden.
Die Idee führt hier zum Erfolg.

Die Randbedingung $y(0) = 0$ liefert $c_1 = 0$.

Aus $y(1) = 0$ folgt $\int_0^1 (t - 1) r(t) dt + c_0 = 0$
 $-(t - 1) = 1 - t$

$$\int_0^1 = \int_0^x + \int_x^1, \quad (t - x) + x(1 - t) = t(1 - x)$$

$$G(x, t) = \begin{cases} x(1 - t) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ t(1 - x) & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

G ermöglicht eine Zusammenfassung.

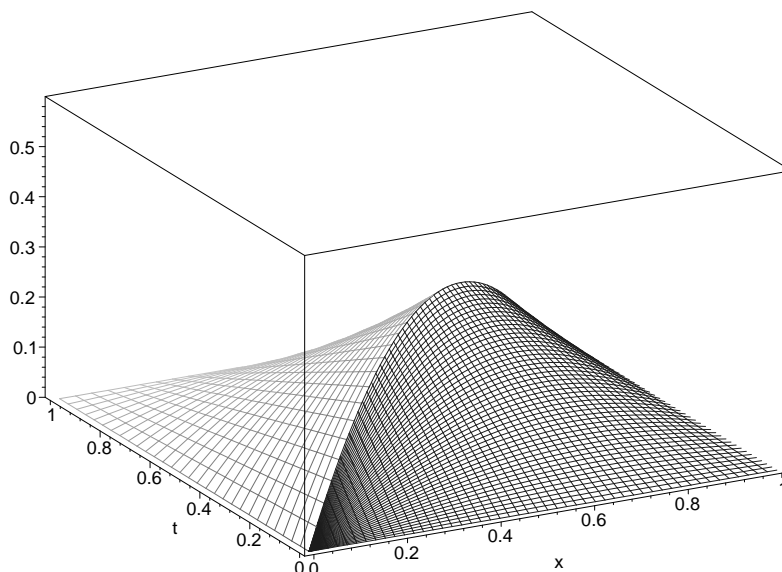
↑

↑ Green-Funktion

$$-y'' = r(x) \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$G(x, t) = \begin{cases} x(1-t) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ t(1-x) & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bemerkenswert: $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 1 - x$
bilden ein Fundamentalsystem.



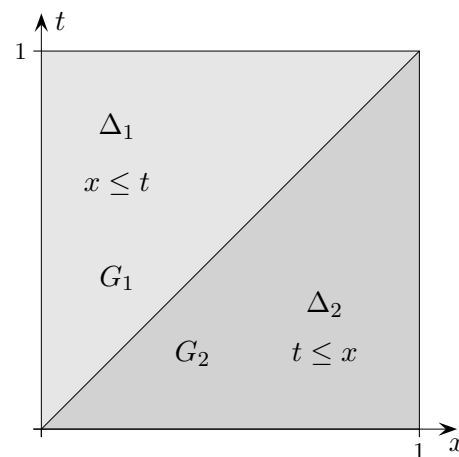
G ist auf $[0, 1] \times [0, 1]$ stetig, in x und t symmetrisch und von der Form:

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t) & (x, t) \in \Delta_1 \quad \text{Dreieck} \\ G_2(x, t) & (x, t) \in \Delta_2 \end{cases}$$

Die Funktion $x \rightarrow G(x, t)$ (t fest)

- a) erfüllt die Randbedingungen,
- b) ist für $x = t$ (Diagonale) nicht differenzierbar,
- c) erfüllt eingeschränkt auf Δ_1 und Δ_2 die homogene DGL
- d) und es gilt $\frac{\partial G_2(x, x)}{\partial x} - \frac{\partial G_1(x, x)}{\partial x} = -1$.

Die Ableitung macht einen Sprung.



↑ Green-Funktion

Um zu erkennen, aus welchen Eigenschaften der Green-Funktion

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t) & (x, t) \in \Delta_1 \\ G_2(x, t) & (x, t) \in \Delta_2 \end{cases}$$

folgt, dass

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) r(t) dt$$

die DGL (z.B.) $a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x)$ Randbedingungen ..., $a \leq x \leq b$ löst, leiten wir ab.

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^x G_2(x, t) r(t) dt + \int_x^b G_1(x, t) r(t) dt \\ y'(x) &= \underbrace{[G_2(x, x) - G_1(x, x)]}_{= 0, \text{ da } G \text{ stetig}} \cdot r(x) + \int_a^x \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, t) r(t) dt \\ &\quad + \int_x^b \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, t) r(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) r(t) dt \end{aligned}$$

Die Ableitung erfolgt mit der Leibnizregel für Parameterintegrale.

Die 2. Ableitung wird in gleicher Weise gebildet.

$$\begin{aligned} y''(x) &= \underbrace{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x}(x, x) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, x) \right]}_{= \frac{1}{a_2(x)}} \cdot r(x) + \int_a^x \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x, t) r(t) dt + \int_x^b \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(x, t) r(t) dt \\ &= \frac{r(x)}{a_2(x)} + \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, t) r(t) dt \end{aligned}$$

Bei dieser Wahl fällt $r(t)$ später heraus.

Diese Ausdrücke werden nun in die DGL eingesetzt.

$$\begin{aligned} r(x) + \int_a^b \underbrace{\left[a_2(x) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, t) + a_1(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) + a_0(x) G(x, t) \right]}_{= 0, \text{ wenn } G(x, \cdot) \text{ die homogene DGL löst.}} r(t) dt &= r(x) \end{aligned}$$

Wenn $G(x, \cdot)$ die homogenen Randbedingungen erfüllt, überträgt sich das auf $y(x)$, siehe Seite 9.

↑ Green-Funktion Nachweis

$$y'' + y = r(x), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet: $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$
 Die Funktionen $y_1(x) = \sin x$ und $y_2(x) = \cos x$ bilden also ein Fundamentalsystem.

$$G(x, t) = \begin{cases} -\cos t \sin x & 0 \leq x \leq t \leq \pi \\ -\cos x \sin t & 0 \leq t \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Die Randbedingungen sind für G erfüllt:

$$G(0, t) = 0$$

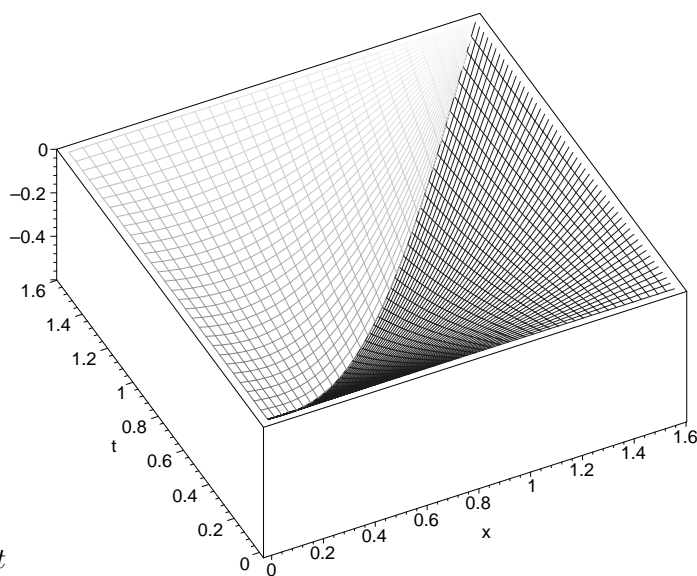
$$G\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$$

Die Sprungbedingung

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x, x) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, x) = \frac{1}{a_2(x)}$$

bedeutet hier: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, t) r(t) dt \\ &= \int_a^x G_2(x, t) r(t) dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} G_1(x, t) r(t) dt \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r(x) = 2x & \quad y(x) = 2x - \pi \sin x \\ r(x) = x^2 & \quad y(x) = \left(2 - \frac{\pi^2}{4}\right) \sin x + 2 \cos x + x^2 - 2 \end{aligned}$$

Zur Randwertaufgabe

$$y'' + y = r(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

gehört

$$G(x, t) = \begin{cases} \cos x \sin t & 0 \leq x \leq t \leq \pi \\ \cos t \sin x & 0 \leq t \leq x \leq \pi \end{cases}$$

↑

↑ Green-Funktion ermitteln

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x) \quad \text{Randbedingungen } \dots, \quad a \leq x \leq b$$

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t) & (x, t) \in \Delta_1 \\ G_2(x, t) & (x, t) \in \Delta_2 \end{cases}$$

Fundamentalsystem $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$

Naheliegender Ansatz für G , da $G(x, \cdot)$ die homogene DGL erfüllen muss:

$$G_1(x, t) = \sum_{k=1}^2 C_k(t)\varphi_k(x), \quad G_2(x, t) = \sum_{k=1}^2 D_k(t)\varphi_k(x),$$

Eine äquivalente geschickte Formulierung dieses Ansatzes ermöglicht eine schrittweise Berechnung. B_1, B_2 ergeben sich dann aus der Stetigkeits- und aus der Sprungbedingung, A_1, A_2 aus den beiden Randbedingungen.

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &= \sum_{k=1}^2 (A_k(t) + B_k(t))\varphi_k(x) & A_k &= \frac{1}{2}(C_k + D_k) \\ G_2(x, t) &= \sum_{k=1}^2 (A_k(t) - B_k(t))\varphi_k(x) & B_k &= \frac{1}{2}(C_k - D_k) \end{aligned}$$

Die Stetigkeit auch auf der Diagonalen verlangt:

$$\sum_{k=1}^2 (A_k(x) + B_k(x))\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^2 (A_k(x) - B_k(x))\varphi_k(x) \implies \sum_{k=1}^2 B_k(x)\varphi_k(x) = 0$$

Die Sprungbedingung fordert:

$$\sum_{k=1}^2 (A_k(x) - B_k(x))\varphi_k'(x) - \sum_{k=1}^2 (A_k(x) + B_k(x))\varphi_k'(x) = \frac{1}{a_2(x)} \implies \sum_{k=1}^2 B_k(x)\varphi_k'(x) = -\frac{1}{2a_2(x)}$$

Dies lässt sich in Matrixschreibweise zusammenfassen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix}}_{\text{Wronski-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2a_2(x)} \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist zu lösen, z.B. mit Determinanten (Cramersche Regel). Die Randbedingungen führen zu einem Gleichungssystem der A_k , die B_k sind ja bekannt.

↑ Green-Funktion Beispiel

$$y'' + y = r(x), \quad y(0) - y(\pi) = 0, \quad y'(0) - y'(\pi) = 0$$

Die Funktionen $\varphi_1(x) = \cos x$ und $\varphi_2(x) = \sin x$ bilden ein Fundamentalsystem.

$$G_1(x, t) = \sum_{k=1}^2 (A_k(t) + B_k(t)) \varphi_k(x)$$

$$G_2(x, t) = \sum_{k=1}^2 (A_k(t) - B_k(t)) \varphi_k(x)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2a_2(x)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\implies B_1(x) = \frac{1}{2} \sin x, \quad B_2(x) = -\frac{1}{2} \cos x$$

Durch Auswerten der Randbedingungen

$$G(0, t) - G(\pi, t) = 0 \quad \text{d. h.} \quad G_1(0, t) - G_2(\pi, t) = 0$$

$$G_x(0, t) - G_x(\pi, t) = 0$$

erhält man $A_1(x) = A_2(x) = 0$

Die Greensche Funktion lautet dann (Additionstheorem $\sin(x - t) = \sin x \cos t - \sin t \cos x$):

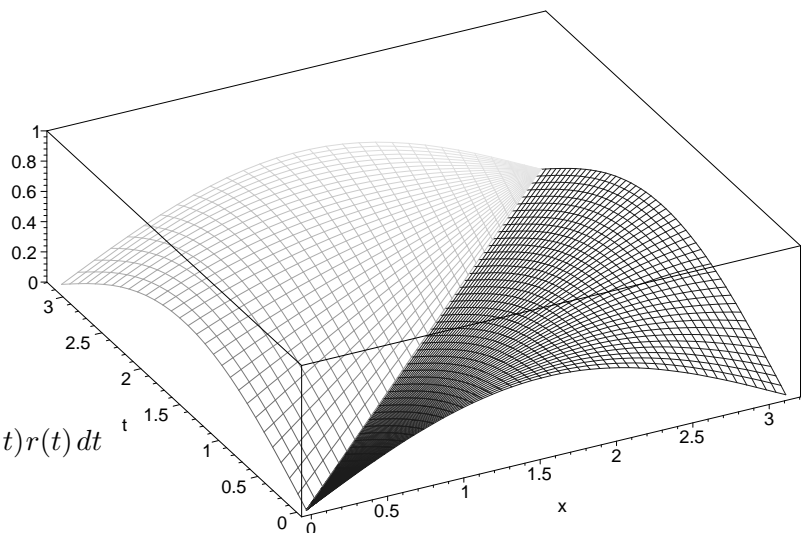
$$G_1(x, t) = -\frac{1}{2} \sin(x - t)$$

$$G_2(x, t) = \frac{1}{2} \sin(x - t)$$

Lösung der Randwertaufgabe:

$$y(x) = \int_0^\pi G(x, t) r(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x G_2(x, t) r(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^\pi G_1(x, t) r(t) dt$$



↑

↑ Green-Funktion Beispiel

$$y'' - y' = r(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0$$

Fundamentalsystem: $\varphi_1(x) = 1$ und $\varphi_2(x) = e^x$

$$G_1(x, t) = \sum_{k=1}^2 (A_k(t) + B_k(t)) \varphi_k(x)$$

$$G_2(x, t) = \sum_{k=1}^2 (A_k(t) - B_k(t)) \varphi_k(x)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2a_2(x)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\implies B_1(x) = \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$G_1(x, t) = A_1(t) + \frac{1}{2} + (A_2(t) - \frac{1}{2}e^{-t})e^x$$

$$G_2(x, t) = A_1(t) - \frac{1}{2} + (A_2(t) + \frac{1}{2}e^{-t})e^x$$

$$y(0) = 0 \implies A_1(t) + A_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}(x, t) = (A_2(t) - \frac{1}{2}e^{-t})e^x$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x, t) = (A_2(t) + \frac{1}{2}e^{-t})e^x$$

$$y'(0) - y'(1) = 0 \implies A_2(t) - \frac{1}{2}e^{-t} = (A_2(t) + \frac{1}{2}e^{-t})e$$

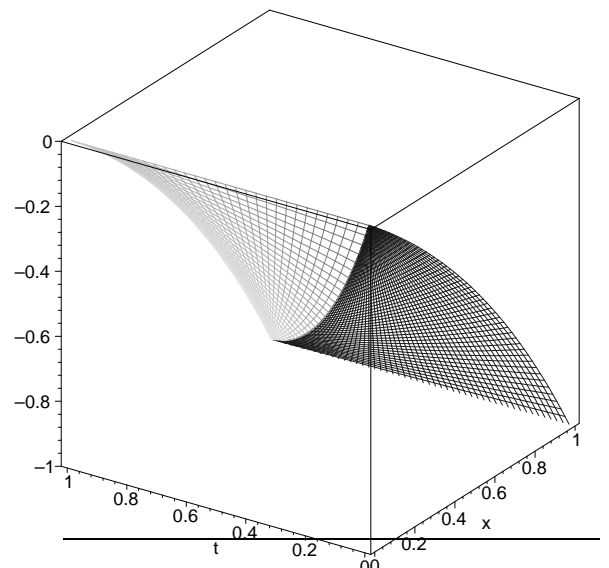
$$\implies A_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \frac{1+e}{1-e}, \quad A_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t} \frac{1+e}{1-e} = \dots = \frac{e^{1-t}}{e-1} - \frac{1}{2}$$

Dies eingesetzt führt nach umfangreichen Umformungen zu:

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{1-t}}{1-e}(e^x - 1) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \frac{e^{x-t} - e^{1-t}}{1-e} - 1 & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bemerkenswert: $G_1(x, t) \neq G_2(t, x)$

↑



↑ Es geht auch einfacher

Die vorige Randwertaufgabe

$$y'' - y' = r(x), \quad R_1: y(0) = 0, \quad R_2: y'(0) - y'(1) = 0$$

kann auf recht einfache Weise mit dem folgendem Ansatz gelöst werden.
(Das vertreibt auch die Zweifel an der Richtigkeit der Lösung.)

$$G(x, t) = \begin{cases} Au_1(x) + Bu_2(x) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ u_t(x) + Au_1(x) + Bu_2(x) & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$u_1(x) = e^x - 1$$

$$u_2(x) = 1$$

$$u_t(x) = e^{x-t} - 1$$

u_1 und u_2 lösen die DGL $y'' - y' = 0$ und erfüllen R_1 bzw. R_2 .

u_t ist so zu wählen, dass gilt: $u_t(t) = 0$ und $u'_t(t) = 1$

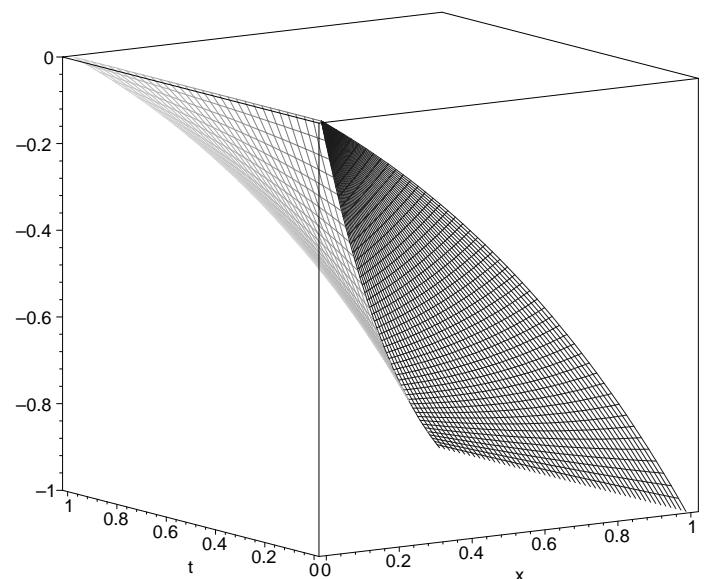
Der Ansatz genügt offensichtlich der Stetigkeits- und der Sprungbedingung $G'_2(x, x) = G'_1(x, x) + 1$.
 A und B werden mit den Randbedingungen bestimmt.

$$R_1: y(0) = 0, \quad G_1(0, t) = 0, \quad \underbrace{A u_1(0)}_{=0} + \underbrace{B u_2(0)}_{=1} = 0 \implies B = 0$$

$$R_2: y'(0) - y'(1) = 0, \quad G'_1(0, t) = G'_2(1, t), \quad \underbrace{A u'_1(0)}_{=1} = \underbrace{u'_t(1)}_{=e^{1-t}} + \underbrace{A u'_1(1)}_{=e} \implies A = \frac{e^{1-t}}{1-e}$$

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{1-t}}{1-e} (e^x - 1) & 0 \leq x \leq t \\ e^{x-t} - 1 + \frac{e^{1-t}}{1-e} (e^x - 1) & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dies stimmt mit der vorigen Lösung überein.



↑

↑ Randbedingungen

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) r(t) dt$$

$$y'(x) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) r(t) dt$$

Homogene Randbedingungen (z. B.) für G :

$$G(0, t) - G(\pi, t) = 0 \quad \text{d. h.} \quad G(0, t) = G(\pi, t)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial G}{\partial x}(\pi, t) = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial G}{\partial x}(\pi, t)$$

Es ist ersichtlich, dass diese Randbedingungen dann auch für y gelten.

$$y(0) = y(\pi)$$

$$y'(0) = y'(\pi)$$

↑ Spezialfall

Im Eingangsbeispiel $-y'' = r(x)$ $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $0 \leq x \leq 1$

hatte die Green-Funktion eine erfreulich einfache Struktur:

$$G(x, t) = \begin{cases} x(1-t) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ t(1-x) & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\varphi(x) = x$, $\psi(x) = 1 - x$ bilden ein Fundamentalsystem.

Hier ist also

$$G(x, t) = \begin{cases} \varphi(x)\psi(t) & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \varphi(t)\psi(x) & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Die Randbedingungen haben im Beispiel die einfache (separierte) Form:

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0$$

Damit für

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x) \quad \varphi(a) = 0, \quad \psi(b) = 0$$

die Green-Funktion die Struktur

$$G(x, t) = c \begin{cases} \varphi(x)\psi(t) & a \leq x \leq t \leq b \\ \varphi(t)\psi(x) & a \leq t \leq x \leq b \end{cases} \quad \text{Auf die Reihenfolge ist zu achten.}$$

haben kann, muss $c = \frac{1}{a_2(t)W(t)}$ gewählt werden.

Hierbei ist $W(t) = \varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)$ die Determinante der Wronski-Matrix.

Die Wahl von c folgt unmittelbar aus der Sprungbedingung:

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x, x) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, x) = \frac{1}{a_2(x)} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = c \begin{cases} \varphi'(x)\psi(t) \\ \varphi(t)\psi'(x) \end{cases}$$

Die Randbedingungen sind für G mit $G_1(a, t) = 0$ und $G_2(b, t) = 0$ erfüllt, die Stetigkeitsbedingung ohnehin. Somit liegt hier die Green-Funktion vor.

Zur Erinnerung:

Das Vorliegen der Sprungbedingung garantiert, dass wenn $G(x, \cdot)$ die homogene DGL löst, $r(x)$ herausfällt und somit $y(x)$ die Randwertaufgabe löst.

Im Eingangsbeispiel gilt $a_2(x) = -1$ und $W(t) = -1$, das Produkt ist also 1.

↑

↑ Green-Funktion Beispiel für den Spezialfall

Randwertaufgabe

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

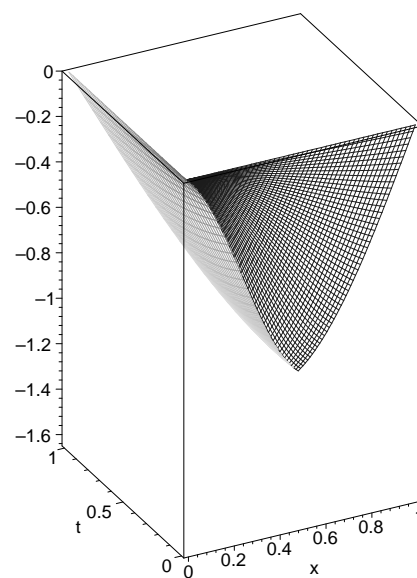
Fundamentalsystem: $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$

$y_1(x) = \sin x$ erfüllt $y(0) = 0$, $y_2(x) = \cos(x-1)$ erfüllt $y'(1) = 0$.

Die Wronski-Determinante beträgt $W(t) = -\cos 1$ (Additionstheorem).

Damit finden wir

$$G(x, t) = \begin{cases} -\frac{\sin x \cos(t-1)}{\cos 1} & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ -\frac{\sin t \cos(x-1)}{\cos 1} & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$



↑ Heaviside-Funktion

Einfachstes Beispiel

$$y'(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

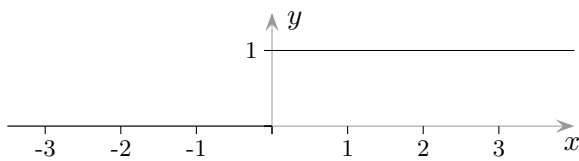
Die Lösung lautet:

$$y(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 G(x, t) f(t) dt$$

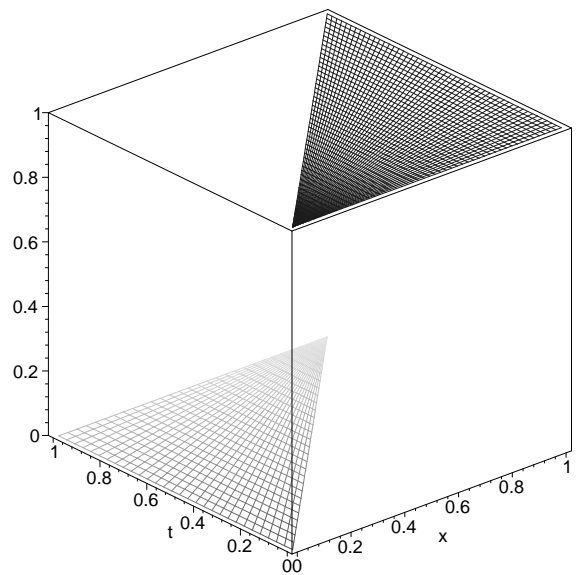
$$G(x, t) = \begin{cases} 0 & 0 < x < t \leq 1 \\ 1 & 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Wir erkennen:

$$G(x, t) = H(x - t) \quad \text{Heaviside-Funktion}$$



$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \end{cases}$$



Die Green-Funktion

$$G(x, t) = \frac{1}{a_2(t)W(t)} \begin{cases} \varphi(x)\psi(t) & x \leq t \\ \varphi(t)\psi(x) & t \leq x \end{cases}$$

kann damit auch einzeilig angegeben werden:

$$G(x, t) = \frac{1}{a_2(t)W(t)} (H(t - x)\varphi(x)\psi(t) + H(x - t)\varphi(t)\psi(x))$$

↑

↑ Alternativer Weg zur Green-Funktion

Sei $y(x) = \int_a^b G(x,t)r(t) dt$

eine Lösung der Randwertaufgabe

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = r(x) \quad \text{Randbedingungen } \dots, \quad a \leq x \leq b$$

Wir setzen die Lösung in die DGL ein, vertauschen Integration und Differentiation und klammern aus:

$$\int_a^b \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) + G(x,t) \right)}_{\delta(x-t)} r(t) dt = r(x)$$

$G(x,t)$ muss also

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} G(x,t) + G(x,t) = \delta(x-t)$$

lösen.

Die Gleichung kann dem Auffinden von G dienen.

$\frac{\partial}{\partial x} G(x,t)$ hat dann einen Sprung bei $x = t$ und $G(x,t)$ an diesen Stellen einen Knick.

↑ Beispiel

Betrachten wir noch einmal das Eingangsbeispiel:

$$-y'' = r(x) \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Wir suchen die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t) = -\delta(x - t)$$

\implies

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, t) = \begin{cases} C_1 & 0 \leq x \leq t \\ C_1 - 1 & t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{Die 1. Ableitung muss eine Sprungfunktion sein.}$$

$$G(x, t) = \begin{cases} C_1 x + C_2 & 0 \leq x \leq t \\ (C_1 - 1) \cdot x + C_3 & t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{Integration}$$

Beide Teilfunktionen müssen für $x = t$ übereinstimmen, d. h. es muss gelten:

$$C_1 t + C_2 = (C_1 - 1)t + C_3$$

Daraus folgt: $C_3 = C_2 + t$ und man erhält:

$$G(x, t) = \begin{cases} C_1 x + C_2 & 0 \leq x \leq t \\ (C_1 - 1) \cdot x + t + C_2 & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$G(x, t)$ muss die Randbedingungen erfüllen, es muss gelten $G(0, t) = 0$ und $G(1, t) = 0$ bzw.

$$C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$(C_1 - 1) \cdot 1 + t + C_2 = 0$$

Daraus folgt $C_2 = 0$ und $C_1 = 1 - t$.

Die Greensche Funktion lautet also:

$$G(x, t) = \begin{cases} (1 - t)x & 0 \leq x \leq t \\ t(1 - x) & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

↑ Einheitsimpuls

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = r(x) \quad \text{Randbedingungen } \dots, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) + G(x, t) = \delta(x - t)$$

erlaubt eine physikalische Interpretation.

Sie beschreibt durch $x \rightarrow G(x, t)$ die Reaktion des Systems auf einen Einheitsimpuls an der Stelle $x = t$.

$$\implies \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t)r(t) + \frac{\partial}{\partial x} G(x, t)r(t) + G(x, t)r(t) = r(t)\delta(x - t)$$

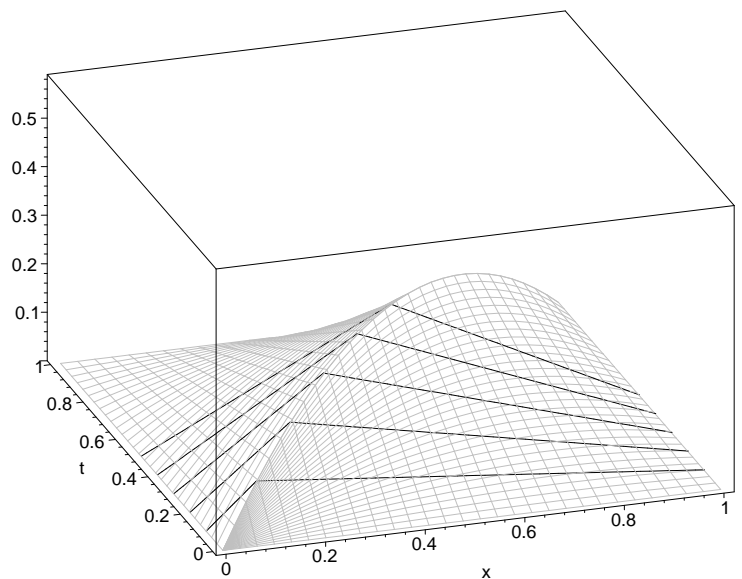
$$x \rightarrow r(t)G(x, t)$$

ist die Lösung der Differentialgleichung für den Fall, dass nur ein Impuls $r(t)\delta(x - t)$ der Stärke $r(t)$ an der Stelle $x = t$ auftritt.

Die Summation der Impulse $r(t)\delta(x - t)$ für $t \in [0, 1]$ führt zur Integration: $r(x) = \int_0^1 r(t)\delta(x - t) dt$

$$y(x) = \int_0^1 G(x, t)r(t) dt$$

besagt nun, dass man die Lösung durch Summation/Integration der Beiträge der einzelnen Impulse erhält.



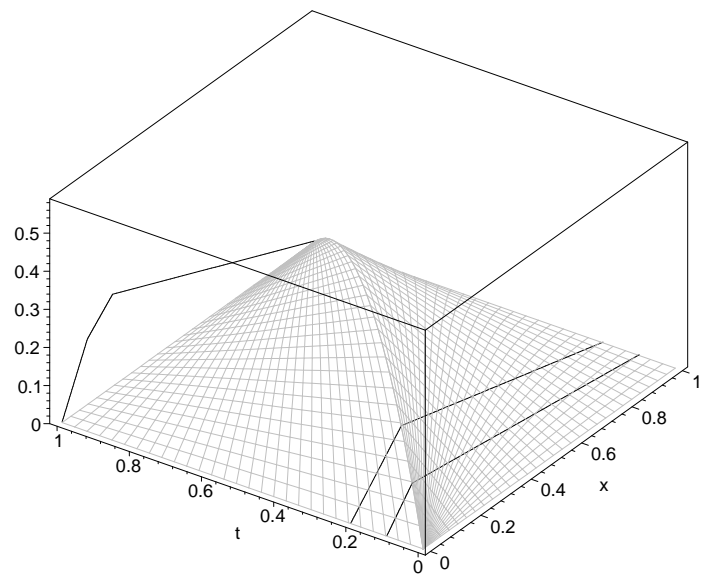
Hier werden die Reaktionskurven für das Eingangsbeispiel

$$-y'' = r(x) \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

für verschiedene t sichtbar (Schrittweite 0,1).

↑

↑ Wirkung zweier Impulse



Die Wirkung der Einheitsimpulse an den Stellen $x_1 = 0,1$ und $x_2 = 0,2$ wird veranschaulicht. An der Rückwand des Quaders ist die Gesamtwirkung zu sehen.

$$r(x) = 1_{[x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon]} + 1_{[x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon]}$$

$$y(x) = \int_0^1 G(x, t) r(t) dt$$

Die Summation/Integration in t -Richtung dürfte nun plausibel sein.

↑ Symmetrie und Eindeutigkeit der Green-Funktion

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = \dots \quad \text{Randbedingungen } \dots, \quad a \leq x \leq b$$

Seien f und h beliebige stetige Störfunktionen.

Für das Randwertproblem mit der Green-Funktion $G(x, t)$ betrachten wir:

$$u_f(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt, \quad v_h(x) = \int_a^b G(x, t) h(t) dt$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei L der zur DGL gehörige Differentialoperator:

$$L: y(x) \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) + a \frac{\partial}{\partial x} y(x) + by(x)$$

Weil u_f und v_h das jeweilige RWP lösen, gilt:

$$L[u_f(x)] = f(x)$$

$$L[v_h(x)] = h(x)$$

$G(x, t)$ ist symmetrisch in x und t , falls

$$\int_a^b v(x) L[u(x)] dx = \int_a^b u(x) L[v(x)] dx$$

für alle Funktionen u und v gilt, die die Randbedingungen erfüllen.

Das RWP wird als selbstadjungiert bezeichnet.

Begründung:

$$\int_a^b \int_a^b G(x, t) h(t) f(x) dt dx = \int_a^b \int_a^b G(x, t) f(t) h(x) dt dx \quad u_f, v_h \text{ eingesetzt}$$

$$= \int_a^b \int_a^b G(t, x) f(x) h(t) dt dx \quad x \text{ und } t \text{ vertauscht}$$

$$G(x, t) = G(t, x) \quad \text{beachte: } f \text{ und } h \text{ beliebig}$$

$$\int_a^b \int_a^b [G(x, t) - G(t, x)] \dots = 0$$

Der Ansatz mit G_1 und G_2 führt zur Eindeutigkeit.