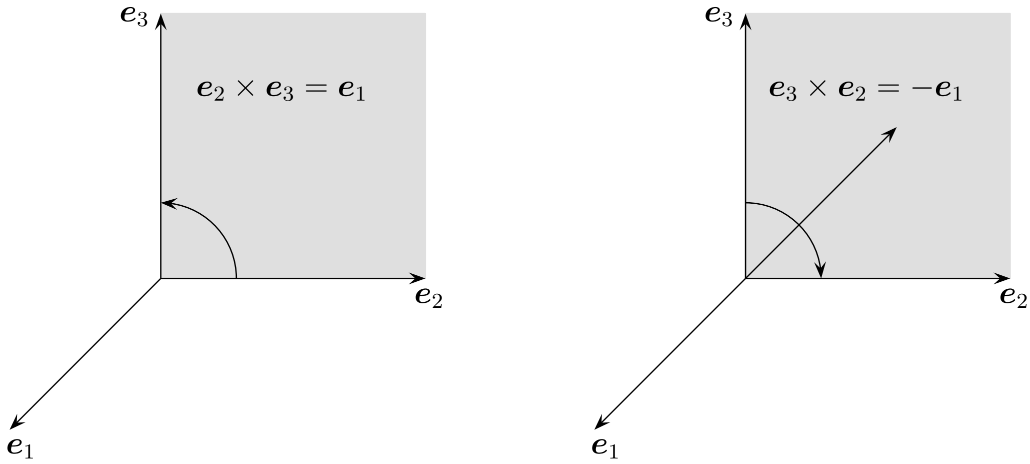
Verschiedenes
Startseite

↑ Alternierende multilineare Abbildung

Definition des Vektorprodukts:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$



Das Vektorprodukt kann als alternierende multilineare Abbildung aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &\longrightarrow \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \wedge (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= a_1b_1(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) + \ldots \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)(\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) \\ &\quad \text{beachte } \ \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_i = 0 \ \text{ und } \ \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_i \end{aligned}$$

Wir rechnen probeweise distributiv und berücksichtigen das Vorzeichen bei Vertauschung.

$$(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2) \wedge (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2) = \underbrace{(a_1b_2 - a_2b_1)}_{\text{Parallelogrammfläche}}(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \wedge (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \wedge (c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + c_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \\ &= \det[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

↑ Grassmann-Algebra

Wir wollen nun einen Vektorraum schaffen (E. Artin 1960), in dem eine antisymmetrische, distributive Multiplikation existiert. Die Multiplikation wird für die Basiselemente $\boldsymbol{B}_k$ definiert und überträgt sich dann gemäß

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \sum_{i,j} a_i b_j (\boldsymbol{B}_i \wedge \boldsymbol{B}_j)$$

auf die übrigen Elemente .
a_i, b_i sind die Komponenten der entsprechenden Basisdarstellungen.

Von den 9 Produkten $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j,\ i,j = 1 \ldots 3,$ mit Elementen aus den $\mathbb{R}^3$
können höchstens 3 linear unabhängig sein, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2,\ \ \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3,\ \ \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3,$

von 64 Produkten $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k,\ i,j,k = 1 \ldots 4,$ mit Elementen aus den $\mathbb{R}^4$
höchstens 4, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3,\ \ \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_4,\ \ \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4,\ \ \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4.$

Diese Produkte lassen sich (allgemein) im $\mathbb{R}^n$ den k-elementigen Teilmengen zuordnen.

Wir gehen von einem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der Basis $\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_n$ aus und betten ihn in einen Vektorraum der Dimension 2^n ein (hängen genügend Nullen dran).
Er ist nun Teilraum von $\mathbb{R}^{2^n}$.
Die $\boldsymbol{B}_i$ werden zu einer Basis des $\mathbb{R}^{2^n}$ ergänzt.
Die Basiselemente indizieren wir mit den 2^n Teilmengen von n, so dass wir haben $\boldsymbol{B}_{\{1\}} = \boldsymbol{B}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{B}_{\{n\}} = \boldsymbol{B}_n,\ \boldsymbol{B}_{\{1,2\}},\ \boldsymbol{B}_{\{1,3\}},\ \ldots,\ \boldsymbol{B}_{\{1,\ldots,n\}},\ \boldsymbol{B}_{\{\,\}},$

und definieren eine Multiplikation.

$$\boldsymbol{B}_R \wedge \boldsymbol{B}_S = \prod_{r \in R,\, s \in S} (r,s)\ \boldsymbol{B}_{R \cup S} \qquad \text{mit} \qquad (r,s) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r = s \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad r < s \\ -1 & \phantom{\text{für}} \quad r > s \end{cases}$$

Das Produkt über alle geordneten Paare von Elementen aus R und S garantiert, dass Vertauschungen sensibel berücksichtigt werden.

Beispiele

$\boldsymbol{B}_{\{1,3\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{2\}} = (1,2)(3,2)\boldsymbol{B}_{\{1,2,3\}} = -\boldsymbol{B}_{\{1,2,3\}}$

$\boldsymbol{B}_{\{1,2\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{2,3\}} = 0$ — Die Indexmengen haben ein gemeinsames Element, $(2,2) = 0$.

$\boldsymbol{B}_{\{2,3,5\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{7,8\}} = (-1)^{3 \cdot 2}\boldsymbol{B}_{\{7,8\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{2,3,5\}}$ — Die 6 Faktoren wechseln beim Übergang von (r,s) nach (s,r) das Vorzeichen.

$\boldsymbol{B}_{\{\,\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{2,3,4\}} = \boldsymbol{B}_{\{2,3,4\}}$ — Für das leere Produkt setzen wir 1. Das Basiselement $\boldsymbol{B}_{\{\,\}}$ ist somit das Einselement.

$\boldsymbol{B}_{\{1,2,3,4\}} = \boldsymbol{B}_{\{1\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{2,3,4\}} = \boldsymbol{B}_{\{1\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{2\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{3,4\}} = \boldsymbol{B}_{\{1\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{2\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{3\}} \wedge \boldsymbol{B}_{\{4\}}$

Für den Verzicht auf Klammern ist noch die Assoziativität zu beweisen.

↑ Grassmann-Algebra $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$

Die Algebra ist assoziativ (siehe Algebren)

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{B}_R \wedge \boldsymbol{B}_S) \wedge \boldsymbol{B}_T &= \prod_{r\in R,\, s\in S} (r,s)\ \boldsymbol{B}_{R\cup S} \wedge \boldsymbol{B}_T \\
&= \prod_{r\in R,\, s\in S} (r,s) \prod_{h\in R\cup S,\, t\in T} (h,t)\ \boldsymbol{B}_{R\cup S\cup T} \\
&= \prod (r,s) \prod (r,t) \prod (s,t)\ \boldsymbol{B}_{R\cup S\cup T} \\
&= \boldsymbol{B}_R \wedge (\boldsymbol{B}_S \wedge \boldsymbol{B}_T)
\end{aligned}$$

Teilräume

Der kleinste Teilraum $\bigwedge^3(\mathbb{R}^4)$ von $\bigwedge(\mathbb{R}^4)$, in dem die Vektoren $\boldsymbol{B}_i \wedge \boldsymbol{B}_j \wedge \boldsymbol{B}_k,\ \ i,j,k = 1\ldots 4$, enthalten sind, besitzt die Basis $\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3,\ \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_4,\ \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4,\ \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4$ mit $\binom{4}{3} = 4$ Elementen (Anzahl der 4-elementigen Teilmengen).

Die Dimension von $\bigwedge^2(\mathbb{R}^4)$ beträgt $\binom{4}{2} = 6$ (Anzahl der 2-elementigen Teilmengen).

Basis $\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3,\ \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_4,\ \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3,\ \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_4,\ \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4$

$\dim \bigwedge^4(\mathbb{R}^4) = 1$

Basis $\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4$

allgemein:

$\dim \bigwedge^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$

Die Teilräume $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ sind die Tensorprodukte für alternierende multilineare Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^{n\times k}$ (unmittelbar zu sehen, siehe Tensorprodukt).

Lineare Abhängigkeit

$\boldsymbol{A}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{A}_k$ aus $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\boldsymbol{A}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{A}_k = 0$ gilt.

$\Longrightarrow$ Ein Vektor lässt sich durch die Übrigen ausdrücken. Diese Linearkombination eingesetzt und ausmultipliziert ergibt nur Produkte mit jeweils 2 gleichen Faktoren.

$\Longleftarrow$ Seien $\boldsymbol{A}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{A}_k$ linear unabhängig. Man ergänze mit $\boldsymbol{A}_{k+1},\ \ldots,\ \boldsymbol{A}_n$ zu einer Basis. Die $\boldsymbol{E}_i$ sind als Linearkombinationen dieser $\boldsymbol{A}_j$ darstellbar. Die Basiselemente $\boldsymbol{E}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{E}_m$ ergeben sich durch Ausmultiplikation als Linearkombinationen der $\boldsymbol{A}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{A}_l$, deren Anzahl 2^n beträgt (jedes $\boldsymbol{E}_i$ in den Basiselementen von $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ wird durch $\boldsymbol{A}_i$ ausgetauscht). Die $\boldsymbol{A}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{A}_l$ sind daher Basiselemente $\neq 0$.

↑ Multiplikation der Basiselemente

$$\underset{1.}{(\boldsymbol{B}_2} \wedge \underset{2.}{\boldsymbol{B}_3}) \wedge (\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_4) =$$

Wir beginnen mit $\boldsymbol{B}_3$.
Das Element steht auf dem 2. Platz und muss auf den 3.
Es sind $(3-2)$ Vertauschungen erforderlich.

$$= (-1)^{(3-2)}\, \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4$$

$\boldsymbol{B}_2$ steht auf dem 1. Platz und muss auf den 2.

$$= (-1)^{(3-2)+(2-1)}\, \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4$$

$$= \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4$$

$$(\underset{1.}{\boldsymbol{B}_2} \wedge \underset{2.}{\boldsymbol{B}_4} \wedge \underset{3.}{\boldsymbol{B}_5}) \wedge (\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3) =$$

Wir beginnen mit $\boldsymbol{B}_5$.
Das Element steht auf dem 3. Platz und muss auf den 5.
Es sind $(5-3)$ Vertauschungen erforderlich.

$$= (-1)^{(5-3)}\, \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_4 \wedge \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_5$$

$\boldsymbol{B}_4$ steht auf dem 2. Platz und muss auf den 4.

$$= (-1)^{(5-3)+(4-2)}\, \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4 \wedge \boldsymbol{B}_5$$

$$= (-1)^{(5-3)+(4-2)+(2-1)}\, \boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4 \wedge \boldsymbol{B}_5$$

$$= -\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3 \wedge \boldsymbol{B}_4 \wedge \boldsymbol{B}_5$$

$$\bigwedge(\mathbb{R}^2)$$

	1	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$
1	1	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$
$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_1$	0	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	0
$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_2$	$-\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	0	0
$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	0	0	0

$$\bigwedge(\mathbb{R}^3)$$

	1	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$
1	1	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$
$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{B}_1$	0	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	0	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0
$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_2$	$-\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	0	$\boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	$-\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	0
$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_3$	$-\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3$	$-\boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	0	0
$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2$	0	0	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	0	0	0
$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	$-\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{B}_1 \wedge \boldsymbol{B}_2 \wedge \boldsymbol{B}_3$	0	0	0	0	0	0	0

↑ Determinanten

Sei $A = (a_{ij})$ eine n-reihige, quadratische Matrix, i Zeilen-, j Spaltenindex.

$n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 &= a_{11}\boldsymbol{E}_1 + a_{21}\boldsymbol{E}_2 + a_{31}\boldsymbol{E}_3 \\ \boldsymbol{A}_2 &= a_{12}\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2 + a_{32}\boldsymbol{E}_3 \\ \boldsymbol{A}_3 &= a_{13}\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3 \end{aligned}$$

Wir rechnen das Produkt der $\boldsymbol{A}_i$ in $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ aus.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{A}_3 &= (a_{11}\boldsymbol{E}_1 + a_{21}\boldsymbol{E}_2 + a_{31}\boldsymbol{E}_3) \wedge (a_{12}\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2 + a_{32}\boldsymbol{E}_3) \wedge (a_{13}\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3) \\ &\dots \\ &= (\underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}_{\det A})\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \end{aligned}$$

Dieser Koeffizient ist die Determinante von A.
Viele ihrer Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Grassmann-Algebra.
Es wird lediglich der Teilraum $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$, allgemein $\bigwedge^n(\mathbb{R}^n)$, benötigt.
Die Determinante hängt nur von der Matrix A und nicht von der gewählten Basis $\boldsymbol{E}_i$ ab, und ist nur dann ungleich null, wenn die A_i linear unabhängig sind.
Ein Vertauschen zweier Matrixspalten führt zu einem Vorzeichenwechsel.
Beim Spiegeln der Matrix an der Hauptdiagonalen ((a_{ij}) geht in (a_{ji}) über) bleibt der Wert unverändert, somit erzeugt auch ein Vertauschen zweier Matrixzeilen einen Vorzeichenwechsel.

Die Determinante ändert sich nicht, wenn wir ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addieren. $\boldsymbol{A}_1 \wedge (\boldsymbol{A}_2 \wedge a\boldsymbol{A}_4) \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4 + \underbrace{a\boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_4 \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4}_{0}$

Permutationen (Bijektionen von $M = \{1, \dots, n\}$ auf M) können durch eine gerade oder ungerade Anzahl von (benachbarten) Transpositionen zerlegt werden.

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)}\, a_{3,\sigma(3)} \qquad \text{Leibniz (1646-1716)} \\ &= \sum_{\sigma \text{ gerade}} a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)}\, a_{3,\sigma(3)} - \sum_{\sigma \text{ ungerade}} a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)}\, a_{3,\sigma(3)} \end{aligned}$$

$$(l\ k) = (1\,5) = \underbrace{(1\,2)(2\,3)(3\,4)(4\,5)}_{l-k}\underbrace{(3\,4)(2\,3)(1\,2)}_{l-k-1}$$

Jede Transposition $(l\ k)$ lässt sich als Verkettung von $2(l-k)-1$ benachbarter Transpositionen $(i\ \ i+1)$ schreiben (i und $i+1$ werden getauscht). Deren Anzahl ist somit ungerade.

↑ Determinanten, anschaulich

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Eine Determinante setzt sich additiv aus allen vorzeichenbehafteten Produkten von Matrixelementen zusammen, wobei aus jeder Spalte und Zeile genau ein Element genommen wird. Dies entspricht beim Schach den Positionen von Türmen, die sich nicht schlagen.

$$\begin{bmatrix} & & a_{13} & \\ a_{21} & & & \\ & & & a_{34} \\ & a_{42} & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{13} & & & \\ & & a_{21} & \\ & & & a_{34} \\ & a_{42} & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{13} & & & \\ & a_{21} & & \\ & & & a_{34} \\ & & a_{42} & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{13} & & & \\ & a_{21} & & \\ & & a_{34} & \\ & & & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Vorzeichen eines Summanden</u>
Die Spalten werden paarweise so vertauscht, bis die rechte Diagonalfigur vorliegt.
Jeder Tausch bedingt den Faktor (-1), hier also $(-1)(-1)(-1) = -1$.
Für jeden Summanden ist die minimale Anzahl der benötigten Vertauschungen entweder gerade oder ungerade, das Vorzeichen daher $+$ oder $-$. Es erscheint plausibel, dass zusätzliche Vertauschungen an dieser Eigenschaft nichts ändern. Die Begründung ergibt sich aus dem Rechnen in der Grassmann-Algebra.

$\uparrow$ Verkettungseigenschaft für $\mathrm{sgn}(\sigma)$

Für Permutationen σ, τ gilt $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$.

$$\boldsymbol{E}_{\sigma(\tau(1))} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{E}_{\sigma(\tau(n))} = \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau)\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{E}_n$$

Zur besseren Übersicht setzen wir $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{E}_{\sigma(n)}$.
Dann ist $\boldsymbol{E}_{\sigma(\tau(i))} = \boldsymbol{A}_{\tau(i)}$, also

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\sigma(\tau(1))} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{E}_{\sigma(\tau(n))} &= \boldsymbol{A}_{\tau(1)} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{A}_{\tau(n)} \\
&= \mathrm{sgn}(\tau)\, \boldsymbol{A}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{A}_n \\
&= \mathrm{sgn}(\tau)\, \boldsymbol{E}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{E}_{\sigma(n)} \\
&= \mathrm{sgn}(\tau)\,\mathrm{sgn}(\sigma)\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{E}_n \qquad \square
\end{aligned}$$

Aus $1 = \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1} \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\,\mathrm{sgn}(\sigma)$ folgt $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

$$\uparrow \ \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma}$$

$$\begin{bmatrix} & & a_{13} & \\ a_{21} & & & \\ & & & a_{34} \\ & a_{42} & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{13} & & & \\ & a_{21} & & \\ & & a_{34} & \\ & & & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Vorzeichen eines Summanden, alternativ</u>

Nur für die Diagonalform gilt: $\quad i < j \implies \sigma(i) < \sigma(j)$

In der linken Anordnung liegen 3 Verstöße (Fehlstände) gegen diese Bedingung vor.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Behauptung:

Genau für die geraden Permutationen ist die Anzahl der Fehlstände gerade.

Eine beliebige benachbarte Transposition $\tau = (i \ \ i+1)$ hat einen einzigen Fehlstand.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & i & j & 5 & 6 \\ 1 & 2 & j & i & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun 2 benachbarte Transpositionen verketten, oder besser gleich eine benachbarte Transposition τ mit einer Permutation σ, so verändert sich die Anzahl der Fehlstände von σ lediglich um ± 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & i & j & 5 & 6 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(i) & \sigma(j) & \sigma(5) & \sigma(6) \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\tau} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & i & j & 5 & 6 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(j) & \sigma(i) & \sigma(5) & \sigma(6) \end{pmatrix}$$

Falls $\quad \begin{pmatrix} i & j \\ \sigma(i) & \sigma(j) \end{pmatrix}$

ein Fehlstand ist, verringert sich die Anzahl um 1, andernfalls erhöht sie sich um 1, da τ die übrigen Fehlstände unverändert lässt.

Sei nun σ eine gerade Permutation.

Sie kann in $2n$ benachbarte Transpositionen zerlegt werden. Von diesen mögen k die Fehlstände um 1 verringern. Insgesamt liegen $(2n-k)\cdot 1 + k \cdot (-1) = 2(n-k)$ Fehlstände vor. $\square$

↑ Formel für $\operatorname{sgn}(\sigma)$

$$\begin{bmatrix} & & a_{13} & \\ a_{21} & & & \\ & & & a_{34} \\ & a_{42} & & \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} a_{13} & & & \\ & a_{21} & & \\ & & a_{34} & \\ & & & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Betrachtung der Fehlstände ermöglicht die Formel:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \frac{3-1}{1-2}\cdot\frac{3-4}{1-3}\cdot\frac{3-2}{1-4}\cdot\frac{1-4}{2-3}\cdot\frac{1-2}{2-4}\cdot\frac{4-2}{3-4} \\ &= \frac{1-2}{1-2}\cdot\underbrace{\frac{3-1}{1-3}}_{-1}\cdot\frac{1-4}{1-4}\cdot\underbrace{\frac{3-2}{2-3}}_{-1}\cdot\underbrace{\frac{4-2}{2-4}}_{-1}\cdot\frac{3-4}{3-4} = -1 \end{aligned}$$

Mit $\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j},$$

wobei das Produkt über alle zweielementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ läuft.
Im Zähler sind, vom Vorzeichen abgesehen, die gleichen Differenzen wie im Nenner.

Wird von der Formel als Definition ausgegangen, ist der Satz

Für Permutationen σ, τ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$.

zu beweisen.

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) = \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}{i-j} &= \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}{\tau(i)-\tau(j)}\,\frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \\ &= \prod_{\{i,j\}} \frac{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}{\tau(i)-\tau(j)} \prod_{\{i,j\}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \\ &= \prod_{\{k,l\}} \frac{\sigma(k)-\sigma(l)}{k-l} \prod_{\{i,j\}} \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau) \end{aligned}$$

↑ Determinanten

Multiplikationssatz für Determinanten
Seien A, B quadratische $n \times n$-Matrizen.

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Zur (eleganten) Begründung betrachten wir A und B als Abbildungsmatrizen der linearen Abbildungen f und g.
Für die i-te Spalte von A gilt $f(\boldsymbol{E}_i) = \boldsymbol{A}_i$, Entsprechendes für $g(\boldsymbol{E}_i)$.

$$f(\boldsymbol{E}_1) \wedge f(\boldsymbol{E}_2) \wedge f(\boldsymbol{E}_3) = \det A \, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3$$

Die $\boldsymbol{E}_i$ können durch beliebige Vektoren aus $\mathbb{R}^3$, allgemein $\mathbb{R}^n$, ausgetauscht werden. Die Rechnung für $\det A$ bleibt erhalten.

$$\begin{aligned}
\det(AB) \, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 &= f(g(\boldsymbol{E}_1)) \wedge f(g(\boldsymbol{E}_2)) \wedge f(g(\boldsymbol{E}_3)) && AB \text{ gehört zur Hintereinanderausführung} \\
&= \det A \, g(\boldsymbol{E}_1) \wedge g(\boldsymbol{E}_2) \wedge g(\boldsymbol{E}_3) && \text{siehe Bemerkung} \\
&= \det A \det B \, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 && \square
\end{aligned}$$

Folgerung (Determinantenformel für eine inverse Matrix)
Ist A eine invertierbare $n \times n$-Matrix, so gilt

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Aus $A \cdot A^{-1} = E$ folgt $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$.

Zum Nachrechnen für die erstaunliche Aussage.

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} au+bw & av+bx \\ cu+dw & cv+dx \end{bmatrix} = \ldots = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix}$$

↑ Determinanten

Multiplikationssatz für Determinanten
Seien A, B quadratische $n \times n$-Matrizen.

$$\det(AB) = \det A \det B$$

2. Begründung

Sei die Matrix $A = [\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n]$ mit $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^n$ durch ihre Spalten beschrieben.

In der Grassmann-Algebra gilt $\boldsymbol{A}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{A}_n = \det A \, \boldsymbol{E}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{E}_n$.

Für Multilinearformen $\mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt das $f(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n) = \det A \, f(\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_n)$.

Eine Multilinearform ist also allein durch den Funktionswert $f(\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_n)$
auf der kanonischen Basis festgelegt.

Betrachten wir nun die beiden (offensichtlichen) Multilinearformen

$$(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) \longrightarrow \det(A\boldsymbol{X}_1, \ldots, A\boldsymbol{X}_n)$$

$$(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) \longrightarrow \det A \cdot \det(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$$

Für $(\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_n)$ stimmen die Funktionswerte überein. Damit gilt

$$\det(A\boldsymbol{X}_1, \ldots, A\boldsymbol{X}_n) = \det A \cdot \det(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) \quad *$$

Sei $B = [\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_n]$ mit $\boldsymbol{B}_i \in \mathbb{R}^n$,

man erhält $AB = [A\boldsymbol{B}_1, \ldots, A\boldsymbol{B}_n]$.

Setzen wir $\boldsymbol{B}_i$ in $*$ ein, so folgt die Behauptung.

Die Determinantenform

$$(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) \longrightarrow \det(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$$

ist die einzige alternierende Multilinearform f mit $f(\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_n) = 1$. Weierstraß (1815-1897)

$\uparrow$ Determinanten

Multiplikationssatz für Determinanten
Seien A, B quadratische $n \times n$-Matrizen.

$$\det(AB) = \det A \det B$$

3. (einfachste) Begründung
$n = 3$

Für das Matrizenprodukt AB gilt:

$$\underbrace{[b_{11}\boldsymbol{A}_1 + b_{21}\boldsymbol{A}_2 + b_{31}\boldsymbol{A}_3,\, b_{12}\boldsymbol{A}_1 + b_{22}\boldsymbol{A}_2 + b_{32}\boldsymbol{A}_3,\, b_{13}\boldsymbol{A}_1 + b_{23}\boldsymbol{A}_2 + b_{33}\boldsymbol{A}_3]}_{AB} = \underbrace{[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3]}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}}_{B}$$

Wir rechnen $\det(AB)$ aus.

$$\begin{aligned}
&(b_{11}\boldsymbol{A}_1 + b_{21}\boldsymbol{A}_2 + b_{31}\boldsymbol{A}_3) \wedge (b_{12}\boldsymbol{A}_1 + b_{22}\boldsymbol{A}_2 + b_{32}\boldsymbol{A}_3) \wedge (b_{13}\boldsymbol{A}_1 + b_{23}\boldsymbol{A}_2 + b_{33}\boldsymbol{A}_3) \\
&\quad = \det(A)\, \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{A}_3 \\
&\quad = \det(A)\det(B)\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3
\end{aligned}$$

↑ Determinanten

Für eine Dreiecksmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

gilt $\det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4 &= a_{11}\boldsymbol{E}_1 \wedge (a_{12}\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2) \wedge (a_{13}\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3) \wedge \\ &\qquad (a_{14}\boldsymbol{E}_1 + a_{24}\boldsymbol{E}_2 + a_{34}\boldsymbol{E}_3 + a_{44}\boldsymbol{E}_4) \\ &= a_{11}a_{22}\,\boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge (a_{13}\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3) \wedge \ldots \\ &= a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4 \end{aligned}$$

Alle anderen Summanden fallen aufgrund zweier gleicher Faktoren heraus.

Es gilt (gleiche Argumentation):

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = (-1)^3 a_{32} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

3 Zeilen- und Spaltenvertauschungen (mit Vorzeichenwechsel) führen zum vorigen Fall.

$$\det \begin{bmatrix} * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ \star & a_{ij} & \star & \star \\ * & 0 & * & * \end{bmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \det \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Beachte: $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$

$$(-1)^{i+j} = \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

↑ Laplace'scher Entwicklungssatz

Determinanten können nach Spalten oder Zeilen entwickelt werden.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Hierbei ist das Schachbrettmuster

$$\det(-1)^{i+j} = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

zu berücksichtigen.

Die Beweisidee geht aus der folgenden Rechnung hervor (siehe vorige Seite).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_1\wedge\boldsymbol{A}_2\wedge\boldsymbol{A}_3 &= (a_{11}\boldsymbol{E}_1 + a_{21}\boldsymbol{E}_2 + a_{31}\boldsymbol{E}_3)\wedge(a_{12}\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2 + a_{32}\boldsymbol{E}_3)\wedge(a_{13}\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3) \\
&= a_{11}\boldsymbol{E}_1\wedge(a_{12}\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2 + a_{32}\boldsymbol{E}_3)\wedge(a_{13}\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3) \\
&\quad + a_{21}\boldsymbol{E}_2\wedge(a_{12}\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2 + a_{32}\boldsymbol{E}_3)\wedge(a_{13}\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3) \\
&\quad\quad + a_{31}\boldsymbol{E}_3\wedge(a_{12}\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2 + a_{32}\boldsymbol{E}_3)\wedge(a_{13}\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3) \\
&= (a_{11}\boldsymbol{E}_1 + 0\boldsymbol{E}_2 + 0\boldsymbol{E}_3)\wedge(0\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2 + a_{32}\boldsymbol{E}_3)\wedge(0\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3) \\
&\quad + (0\boldsymbol{E}_1 + a_{21}\boldsymbol{E}_2 + 0\boldsymbol{E}_3)\wedge(a_{12}\boldsymbol{E}_1 + 0\boldsymbol{E}_2 + a_{32}\boldsymbol{E}_3)\wedge(a_{13}\boldsymbol{E}_1 + 0\boldsymbol{E}_2 + a_{33}\boldsymbol{E}_3) \\
&\quad\quad + (0\boldsymbol{E}_1 + 0\boldsymbol{E}_2 + a_{31}\boldsymbol{E}_3)\wedge(a_{12}\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2 + 0\boldsymbol{E}_3)\wedge(a_{13}\boldsymbol{E}_1 + a_{23}\boldsymbol{E}_2 + 0\boldsymbol{E}_3)
\end{aligned}$$

↑ Kästchensatz

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$\det M = \det A \cdot \det C$$

Die Begründung ergibt sich wieder aus einer Rechnung.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4 &= (a_{11}\boldsymbol{E}_1 + a_{21}\boldsymbol{E}_2) \wedge (a_{12}\boldsymbol{E}_1 + a_{22}\boldsymbol{E}_2) \wedge (b_{13}\boldsymbol{E}_1 + b_{23}\boldsymbol{E}_2 + c_{33}\boldsymbol{E}_3 + c_{43}\boldsymbol{E}_4) \\ &\qquad \wedge (b_{14}\boldsymbol{E}_1 + b_{24}\boldsymbol{E}_2 + c_{34}\boldsymbol{E}_3 + c_{44}\boldsymbol{E}_4) \\ &= \det A\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge (b_{13}\boldsymbol{E}_1 + b_{23}\boldsymbol{E}_2 + c_{33}\boldsymbol{E}_3 + c_{43}\boldsymbol{E}_4) \\ &\qquad \wedge (b_{14}\boldsymbol{E}_1 + b_{24}\boldsymbol{E}_2 + c_{34}\boldsymbol{E}_3 + c_{44}\boldsymbol{E}_4) \\ &= \det A\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge (c_{33}\boldsymbol{E}_3 + c_{43}\boldsymbol{E}_4) \wedge (c_{34}\boldsymbol{E}_3 + c_{44}\boldsymbol{E}_4) \\ &= \det A\, \det C\; \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4 \end{aligned}$$

Der Kästchensatz kann naheliegend verallgemeinert werden.
M ist in quadratische Matrizen (nicht notwendig gleiche Größe) aufzuteilen,
die symmetrisch auf der Hauptdiagonalen liegen.
Unterhalb dieser Matrizen müssen die Elemente null sein.

$$M = \begin{bmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

$$\det M = \det A \cdot \det B \cdot \det C$$

↑ Kästchensatz

$$\det \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] = 8 \cdot (-2) = -16$$

$$\det \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] = 8 \cdot (-2) = -16$$

↑ Cramersche Regel

Die Spaltenvektoren im Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 \;+\; a_{12}x_2 \;+\; a_{13}x_3 \;+\; a_{13}x_4 &= b_1\\
a_{21}x_1 \;+\; a_{22}x_2 \;+\; a_{23}x_3 \;+\; a_{23}x_4 &= b_2\\
a_{31}x_1 \;+\; a_{32}x_2 \;+\; a_{33}x_3 \;+\; a_{33}x_4 &= b_3\\
a_{41}x_1 \;+\; a_{42}x_2 \;+\; a_{43}x_3 \;+\; a_{43}x_4 &= b_4
\end{aligned}$$

seien $\boldsymbol{A}_i$ bzw. $\boldsymbol{B}$. Dies ergibt:

$$\boldsymbol{A}_1x_1 + \boldsymbol{A}_2x_2 + \boldsymbol{A}_3x_3 + \boldsymbol{A}_4x_4 = \boldsymbol{B}$$

Das Gleichungssystem sei eindeutig lösbar, die $\boldsymbol{A}_i$ also linear unabhängig.
Es ist dann $\det[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4] \neq 0$.

Gesucht ist z. B. x_2.
Wir multiplizieren die Gleichung von links mit $\boldsymbol{A}_1$ und von rechts mit $\boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_1 \wedge (\boldsymbol{A}_1x_1 + \boldsymbol{A}_2x_2 + \boldsymbol{A}_3x_3 + \boldsymbol{A}_4x_4) \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4 &= \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4\\
\boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2x_2 \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4 &= \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4\\
x_2 \det[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4]\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4 &= \det[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4]\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4\\
x_2 \det[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4] &= \det[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4]\\
x_2 &= \frac{\det[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4]}{\det[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4]}\\
x_3 &= \frac{\det[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}_4]}{\det[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3, \boldsymbol{A}_4]}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von x_i wird im Zähler die i-te Spalte $\boldsymbol{A}_i$ der Koeffizientenmatrix
durch die rechte Seite $\boldsymbol{B}$ des Gleichungssystems ersetzt.

↑ Determinante nach mehreren Spalten entwickeln

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Das Verfahren (für praktische Zwecke kaum geeignet) kann dem Folgenden entnommen werden. Es erhellt das distributive Rechnen in der Grassmann-Algebra.

Wir entwickeln nach den beiden, Nullen enthaltenen Spalten und nehmen einen Tausch vor.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{A}_4 &= -(\boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_3) \wedge (\boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{A}_4) \\ &= -((\boldsymbol{E}_1 + 0\boldsymbol{E}_2 + 2\boldsymbol{E}_3 + 0\boldsymbol{E}_4) \wedge (0\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + 0\boldsymbol{E}_3 + 2\boldsymbol{E}_4)) \wedge (\boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{A}_4) \end{aligned}$$

Die Klammerterme werden allgemein ausgerechnet, die Nullen zunächst ignoriert.
$\boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{A}_3$ ist von der Form:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_3 + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_4 + \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 + \ldots$$

Die $\boldsymbol{E}_i \wedge \boldsymbol{E}_j$ ergeben sich aus den 2-elementigen Teilmengen (Anzahl 6).
Die zugehörigen Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ a_{j1} & a_{j2} \end{bmatrix}$$

werden aus den Zeilen i und j der ersten beiden Spalten gebildet.

Für $\boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{A}_4$ gilt Entsprechendes.
Beim Ausmultiplizieren fallen die meisten Summanden heraus. Übrig bleiben z. B.
$\boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4$, $\boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_4$, $\boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_4 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3$, usw., daher
$\boldsymbol{E}_i \wedge \boldsymbol{E}_j \wedge \boldsymbol{E}_{i^*} \wedge \boldsymbol{E}_{j^*}$, $\{i^*, j^*\}$ ist die Komplement von $\{i, j\}$.

Diese Produkte werden noch auf die Form $\boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4$ gebracht.
Für das Beispiel bedeutet das:

↑ Determinante nach mehreren Spalten entwickeln

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 15$$

$$-\Big(\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4 + \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_4 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 +$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_4 + \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4 \wedge \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \Big)$$

Zwei Summanden entfallen, da Unterdeterminanten null sind.

$$= -\Big(1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 + (-2) \cdot (-14) \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-11) \cdot (-1)^4\Big)\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4$$

$$= 15\, \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{E}_3 \wedge \boldsymbol{E}_4$$

↑ Algebren

Ein Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ heißt Algebra, wenn eine zusätzliche Multiplikation in $\mathbb{R}^n$ (Zeichen $\circ$ oder $\wedge$) gegeben ist, für die gilt:

1. $\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c}$
2. $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \circ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{a}$
3. $(r\boldsymbol{a}) \circ \boldsymbol{b} = r(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})$
4. $\boldsymbol{a} \circ (r\boldsymbol{b}) = r(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})$

Konstruktion von Algebren

Sei $\boldsymbol{e}_1, \dots \boldsymbol{e}_n$ Basis des Vektorraums, der bereits eine Algebra ist,

dann ist $\quad \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = (\sum\limits_i x_i \boldsymbol{e}_i) \circ (\sum\limits_j y_j \boldsymbol{e}_j) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j \, \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j.$

Die Multiplikation wird also durch die n^2 Produkte $\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j$ festgelegt.

Umgekehrt wird aus $\mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = \sum\limits_{i,j} x_i y_j \, \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j$ eine Algebra, wenn die Produkte der Basisvektoren (beliebig) festgelegt werden.

Wir überprüfen das.

Sei $a = \sum\limits_i a_i \boldsymbol{e}_i, \quad b = \sum\limits_i b_i \boldsymbol{e}_i, \quad c = \sum\limits_i c_i \boldsymbol{e}_i$

$$1. \quad \begin{aligned} \boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \sum_{i,j} a_i (b_j + c_j) \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \, \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j + \sum_{i,j} a_i c_j \, \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

Entsprechend 2. bis 4.

Assoziative Algebren

Die Multiplikation ist bereits assoziativ, wenn diese Eigenschaft für die Basiselemente vorliegt.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}) \circ \boldsymbol{c} &= (\sum_{i,j} a_i b_j \, \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j) \circ \boldsymbol{c} = \sum_{i,j} a_i b_j \, (\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j) \circ \boldsymbol{c} \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j (\sum_k (\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j) \circ c_k \boldsymbol{e}_k) \\ &= \sum_{i,j,k} a_i b_j c_k \, (\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j) \circ \boldsymbol{e}_k = \sum_{i,j,k} a_i b_j c_k \, \boldsymbol{e}_i \circ (\boldsymbol{e}_j \circ \boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

Ich habe mich an der Ausarbeitung einer von E. Artin 1960/61 an der Universität Hamburg gehaltenen Vorlesung *Analytische Geometrie und Algebra II* orientiert.

Siehe auch: Clifford-Algebra
Verschiedenes
Startseite