

Gram-Schmidt-Verfahren

Zu den Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ des \mathbb{R}^n wird eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_k\}$ (\mathbf{c}_i orthogonale Einheitsvektoren) des von den \mathbf{b}_j aufgespannten Raumes konstruiert.

Schritt 1

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1^\circ \quad \left(= \frac{1}{|\mathbf{b}_1|} \mathbf{b}_1 \right)$$

Schritt 2

$$\mathbf{c}_2 = [\mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1]^\circ$$

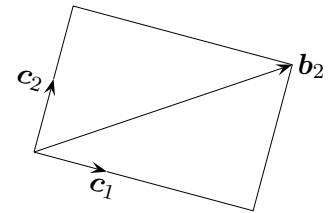
Schritt 3

$$\mathbf{c}_3 = [\mathbf{b}_3 - \langle \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1 - \langle \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_2 \rangle \cdot \mathbf{c}_2]^\circ$$

usw.

Für einen linear abhängigen Vektor \mathbf{b}_j ist \mathbf{c}_j der Nullvektor.

Die Behauptung folgt auf einfache Weise aus den Eigenschaften des Skalarprodukts.



$$\mathbf{b}_2 = r \mathbf{c}_1 + s \mathbf{c}_2 \quad | \cdot \mathbf{c}_1$$

$$\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1 \rangle = r$$

$$\mathbf{b}_2 = r \mathbf{c}_1 + s \mathbf{c}_2 \quad | \cdot \mathbf{c}_2$$

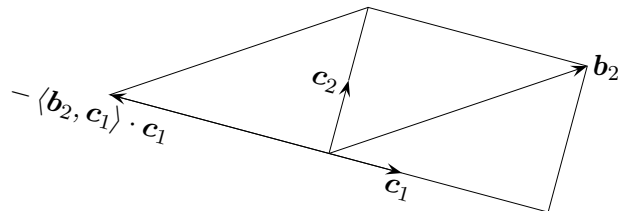
$$\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2 \rangle = s$$

\implies

$$\mathbf{b}_2 = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2 \rangle \cdot \mathbf{c}_2$$

\implies

$$\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2 \rangle \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1$$



\mathbf{c}_2 hat die Richtung von $\mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1$

\implies

$$\mathbf{c}_2 = [\mathbf{b}_2 - \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1]^\circ$$

Für \mathbf{b}_3 gilt entsprechend die Linearkombination:

$$\mathbf{b}_3 = \langle \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_2 \rangle \cdot \mathbf{c}_2 + \langle \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_3 \rangle \cdot \mathbf{c}_3, \quad \text{usw.}$$

In jedem Schritt ist $\mathbf{c}_k = \mathbf{b}_k^\circ$ möglich.

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Orthonormalbasis des von diesen Vektoren aufgespannten Raumes:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mache auch die Probe.

Für einen weiteren Vektor wäre

$$\mathbf{b}_4 = \langle \mathbf{b}_4, \mathbf{c}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1 + \langle \mathbf{b}_4, \mathbf{c}_2 \rangle \cdot \mathbf{c}_2 + \langle \mathbf{b}_4, \mathbf{c}_3 \rangle \cdot \mathbf{c}_3$$

und damit

$$\mathbf{c}_4 = [\mathbf{b}_4 - \langle \mathbf{b}_4, \mathbf{c}_1 \rangle \cdot \mathbf{c}_1 - \langle \mathbf{b}_4, \mathbf{c}_2 \rangle \cdot \mathbf{c}_2 - \langle \mathbf{b}_4, \mathbf{c}_3 \rangle \cdot \mathbf{c}_3] = \mathbf{0}.$$