

## Gleichung 4. Grades

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $y^4 + py^2 + qy + r = 0$	$x = y - \frac{a}{4}$	Substitution reduzierte Gleichung ohne Unbekannte in der dritten Potenz, Variable wird umbenannt
$x^4 + px^2 + qx + r = 0$ $x^4 = -px^2 - qx - r$ $(x^2 + z)^2 = (2z - p)x^2 - qx + (z^2 - r)$ $= (\sqrt{2z - p}x + \sqrt{z^2 - r})^2$ $2\sqrt{2z - p}\sqrt{z^2 - r} = -q \quad   ( )^2$ $z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0$ $x^2 + z = \pm(\sqrt{2z - p}x + \sqrt{z^2 - r})$	reduzierte Gleichung $  + 2zx^2 + z^2$  Bedingung für die Übereinstimmung kubische Resolvente quadratische Gleichungen	

Im 16. Jh. fanden Tartaglia und von ihm unabhängig del Ferro eine Lösungsformel für Gleichungen 3. Grades. Ferrari (1522-1569) zeigte einen Weg, wie zur Lösung einer Gleichung 4. Grades lediglich die Lösung einer Gleichung 3. Grades (kubische Resolvente) erforderlich ist.

Eine geeignete Substitution vereinfacht die Gleichung 4. Grades,  $ax^3$  fällt heraus. Die reduzierte Gleichung wird mit einer Ergänzung in quadratische Terme umgeformt. Die Bedingung, die das gewährleistet, führt auf eine Gleichung 3. Grades. Jede ihrer Lösungen führt zu zwei quadratischen Gleichungen. Deren vier Lösungen müssen rücksubstituiert werden.

## Beispiel

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x = 0 \quad x = y - \frac{1}{4} \quad \text{Substitution}$$

$$y^4 - \frac{35}{8}y^2 - \frac{15}{8}y + \frac{189}{256} = 0 \quad \text{reduzierte Gleichung ohne Unbekannte in der dritten Potenz, Variable wird umbenannt}$$

$$x^4 - \frac{35}{8}x^2 - \frac{15}{8}x + \frac{189}{256} = 0 \quad \text{reduzierte Gleichung}$$

$$p = -\frac{35}{8}, \quad q = -\frac{15}{8}, \quad r = \frac{189}{256}$$

$$z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{pr}{2} - \frac{q^2}{8} = 0 \quad \text{kubische Resolvente}$$

$$z^3 + \frac{35}{16}z^2 - \frac{189}{256}z - \frac{8415}{4096} = 0$$

$$z_1 = \frac{15}{16}, \quad z_2 = -\frac{17}{16}, \quad z_3 = -\frac{33}{16}$$

$$x^2 + z = \pm(\sqrt{2z - px} + \sqrt{z^2 - r}) \quad \text{quadratische Gleichungen}$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{16} = 0 \quad \text{1. quadratische Gleichung zu } z_1$$

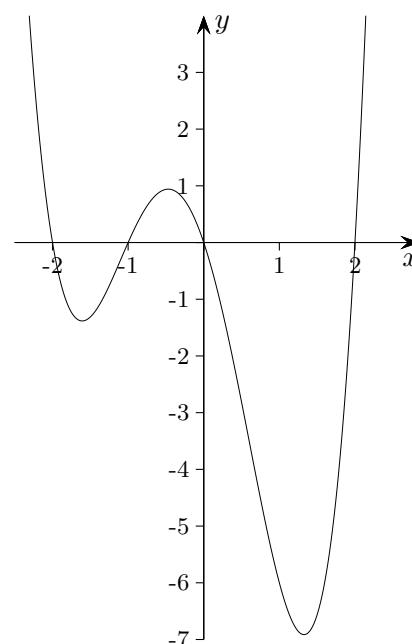
$$x_1 = \frac{9}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{21}{16} = 0 \quad \text{2. quadratische Gleichung zu } z_1$$

$$x_3 = -\frac{3}{4}, \quad x_4 = -\frac{7}{4}$$

$x_i$  ( $y_i$ ) rücksubstituiert: Die Nullstellen lauten  $\pm 2, -1, 0$ .

$z_2$  und  $z_3$  führen (natürlich) zum selben Ergebnis.



Die Herleitung ist eher von historischer Bedeutung.  
 Das Beispiel dient nur zur Veranschaulichung des Verfahrens.  
 Die Gleichung löst man durch Ausklammern und Polynomdivision.