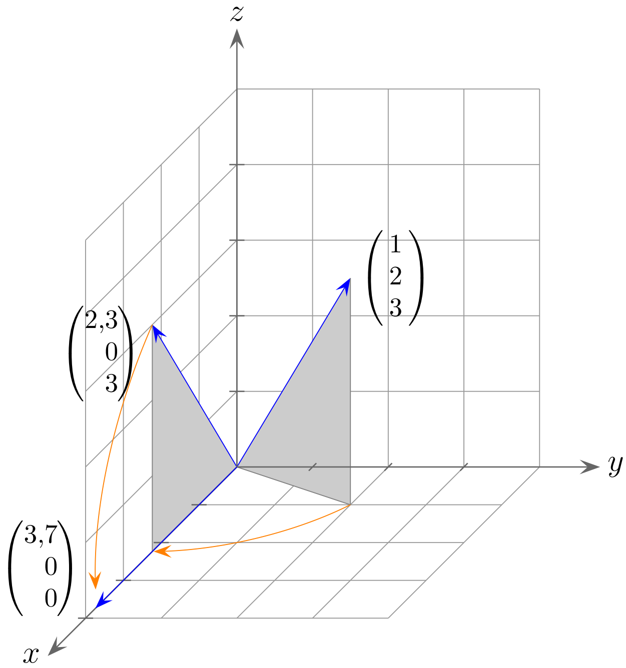
Givens-Rotation



Eine Matrix kann durch Multiplikation mit einer Matrix $\boldsymbol{Q}$
in eine Dreiecksmatrix überführt werden.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A}$$

Dies erfolgt durch wiederholte Drehungen.
Zunächst wird eine Matrix $\boldsymbol{Q}_1$ (Drehung um die z-Achse) ermittelt, die Folgendes leistet:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Durch eine weitere Drehung um die y-Achse wird auch die z-Koordinate zu null.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_2 \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Keine Angst, die Drehwinkel werden nicht ausgerechnet.

Drehung

Die Matrix für die Drehung um die z-Achse lautet:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c^2 + s^2 = 1$$

Aus dem Ansatz

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

folgt:

$$\begin{aligned} -sa_{11} + ca_{21} &= 0 \\ c^2 + s^2 &= 1 \end{aligned}$$

Die 1. Gleichung kann nach s aufgelöst und das Ergebnis in die 2. Gleichung eingesetzt werden. Wir erhalten als Lösung (pos. Vorzeichen der Wurzel):

$$\begin{aligned} c &= \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} \\ s &= \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} \end{aligned}$$

Weiter mit

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} c &= \frac{b_{11}}{\sqrt{b_{11}^2 + b_{31}^2}} \\ s &= \frac{b_{31}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} \end{aligned}$$

Drehung

Beenden mit

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_{22}}{\sqrt{c_{22}^2 + c_{32}^2}} \\ s &= \frac{c_{32}}{\sqrt{c_{22}^2 + c_{32}^2}} \end{aligned}$$

Drehung 3×3

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

$$s = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{b_{11}}{\sqrt{b_{11}^2 + b_{31}^2}}$$

$$s = \frac{b_{31}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}}$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{c_{22}}{\sqrt{c_{22}^2 + c_{32}^2}}$$

$$s = \frac{b_{32}}{\sqrt{c_{22}^2 + c_{32}^2}}$$

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

Die Platzierung dieser Elemente ist immer quadratisch.
$-s$ hat die Position der zu nullenden Zahl.
Das darüberliegende c liegt auf der Diagonalen.
Die Diagonale wird mit Einsen aufgefüllt.

Drehung 4×4

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

$$s = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{b_{11}}{\sqrt{b_{11}^2 + b_{31}^2}}$$

$$s = \frac{b_{31}}{\sqrt{b_{11}^2 + b_{31}^2}}$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{c_{11}}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{41}^2}}$$

$$s = \frac{c_{41}}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{41}^2}}$$

Drehung 4×4 Fortsetzung

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ 0 & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ 0 & 0 & e_{33} & e_{34} \\ 0 & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{d_{22}}{\sqrt{d_{22}^2 + d_{32}^2}}$$

$$s = \frac{d_{32}}{\sqrt{d_{22}^2 + d_{32}^2}}$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ 0 & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ 0 & 0 & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ 0 & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ 0 & 0 & e_{33} & e_{34} \\ 0 & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{e_{22}}{\sqrt{e_{22}^2 + e_{42}^2}}$$

$$s = \frac{e_{42}}{\sqrt{e_{22}^2 + e_{42}^2}}$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ 0 & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ 0 & 0 & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{f_{33}}{\sqrt{f_{33}^2 + f_{43}^2}}$$

$$s = \frac{f_{43}}{\sqrt{f_{33}^2 + f_{43}^2}}$$

Eliminiere zuerst die Elemente unter der Diagonalen der ersten Spalte von oben nach unten. Dann die der zweiten Spalte von oben nach unten usw.

Beispiel 3×3

$$\begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad s = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{5}} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{5}} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad s = \frac{2}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{5}} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{5}} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3×3 Fortsetzung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{5}} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$c = \frac{11}{5\sqrt{5}} \qquad s = -\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5\sqrt{5}} & -\frac{2}{5\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{5\sqrt{5}} & \frac{11}{5\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{5}} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

geschafft

$\boldsymbol{QR}$-Zerlegung

$$\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \underbrace{\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_3^{\mathrm{T}}}_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{R}$$

beachte $\boldsymbol{Q}_i^{-1} = \boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{T}}$

Die $\boldsymbol{Q}_i$ sind orthogonal (Drehung).

Gleichungssystem lösen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{QRx} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Rx} &= \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Auf der linken Seite kann von unten nach oben gerechnet werden.

Givens-Rotation

Bestimmen Sie eine $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung von

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Givens-Rotation

Bestimmen Sie eine $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung von

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ ist fast eine obere Dreiecksmatrix.
Das Element $\boldsymbol{A}_{3,2} = 1$ muss noch weggedreht werden.
Das erfolgt mit:

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten

$$\boldsymbol{QA} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}$$