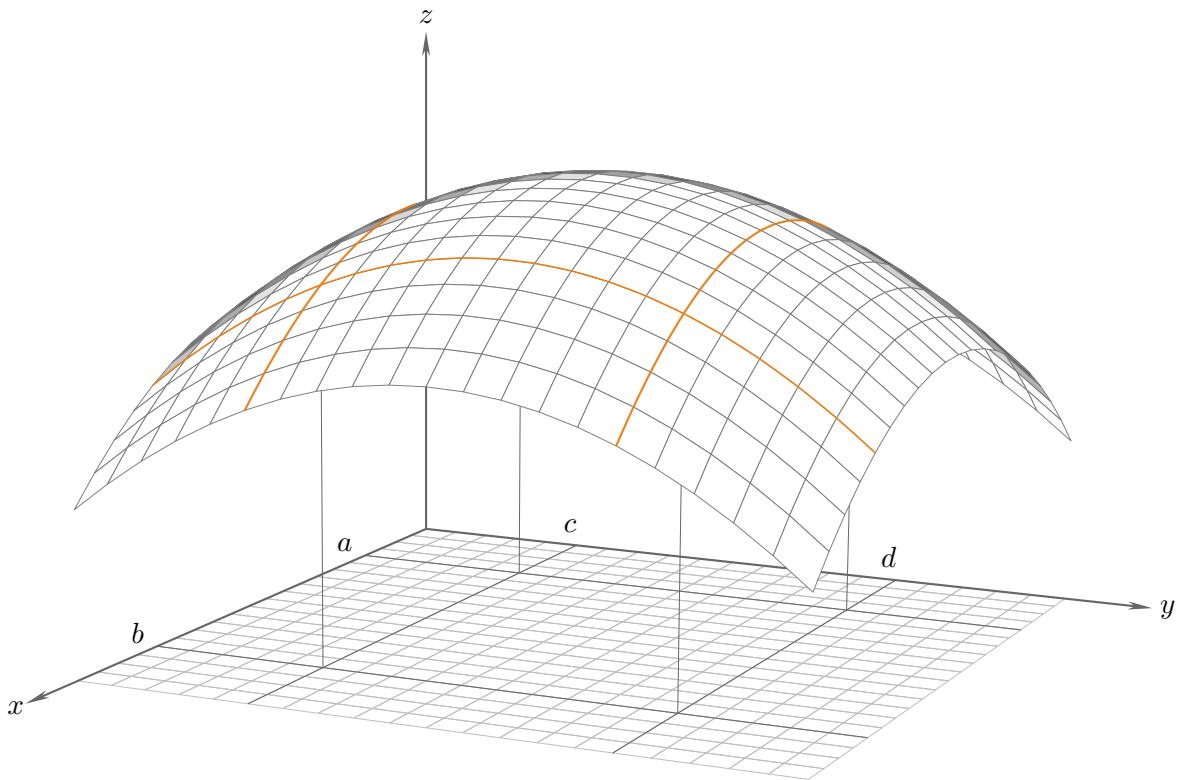


Gebietsintegral

Durch eine Funktion $f(x, y)$, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, ist ein Körper festgelegt, dessen Volumen V wir berechnen wollen. Hierzu ist die Querschnittsfläche $Q(y)$ nach y zu integrieren. $Q(y)$ an der Stelle y ist die Fläche unter dem Graphen von f für ein festes y . Es gilt daher:

$$Q(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

$$V = \int_c^d Q(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

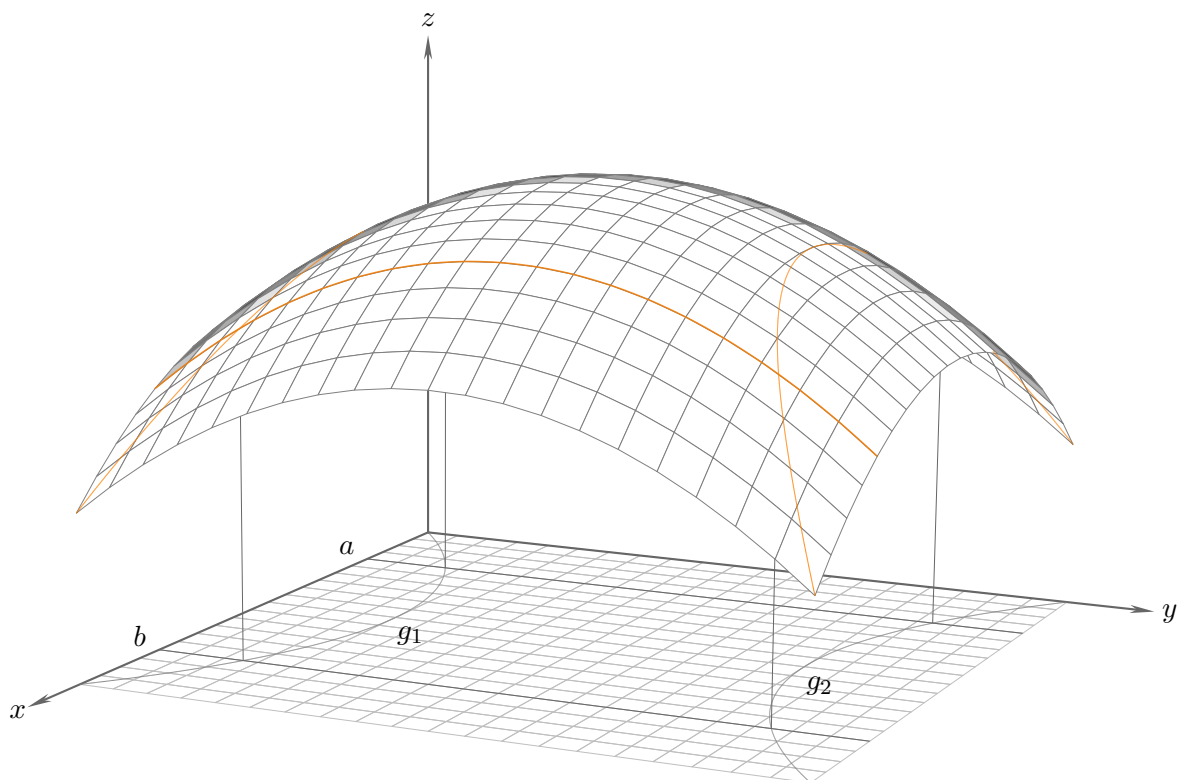


$$\int_2^4 \int_0^1 (x^2 + 2y) dx dy = \frac{38}{3}$$

Gebietsintegral

Bei stetiger Funktion f kann die Reihenfolge der Integration vertauscht werden. Statt der konstanten Grenzen c und d (z.B.) können auch zwei Funktionen g_1 und g_2 das Integrationsgebiet begrenzen. Dann gilt:

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$



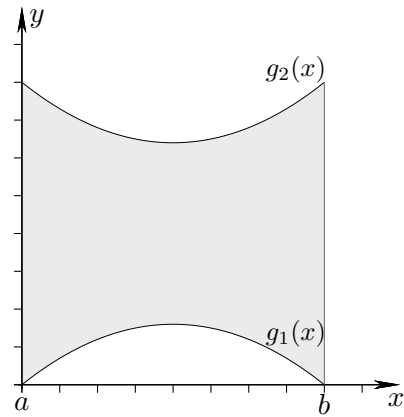
$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2x+1} (x+1) dy dx = \frac{31}{12}$$

Analog gilt:

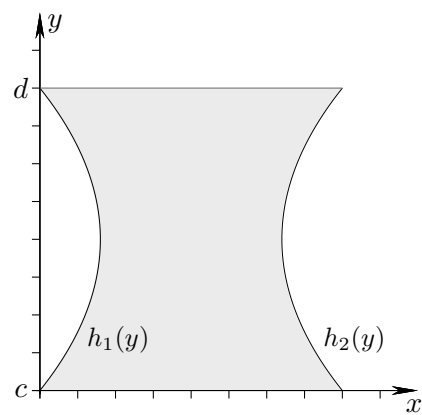
$$V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Gebietsintegral

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

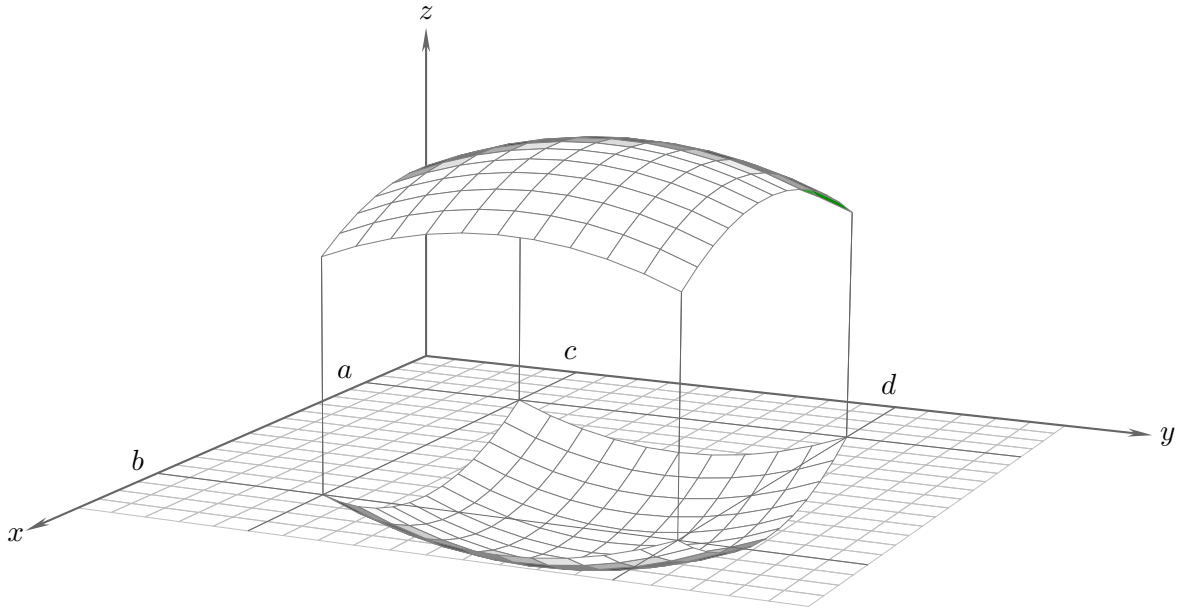


$$V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$



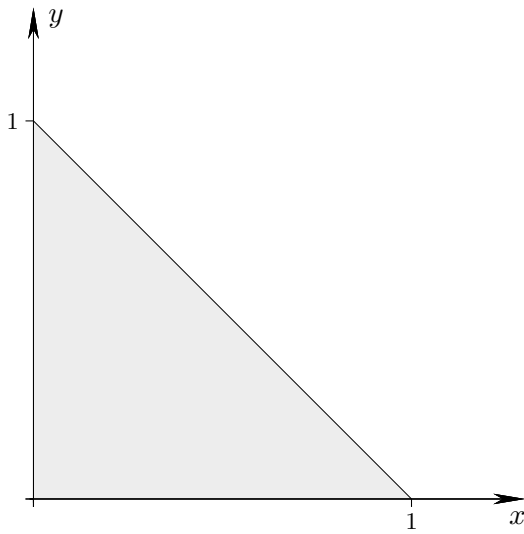
Volumen

Durch die obere Funktion $f(x, y)$ und die untere $g(x, y)$, $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, ist ein Körper festgelegt, dessen Volumen wir berechnen wollen.



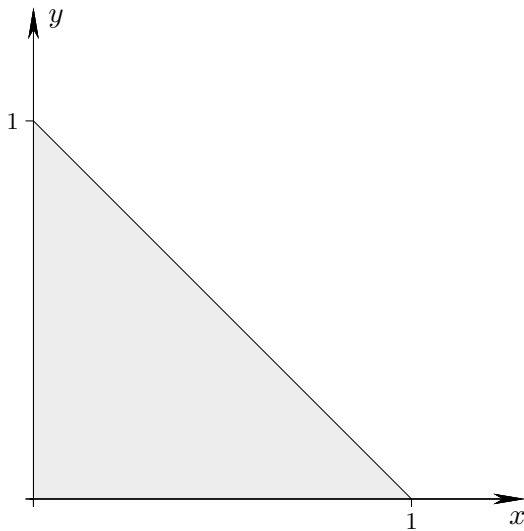
$$V = \int_c^d \int_a^b [f(x, y) - g(x, y)] dx dy$$

Dreieckiges Gebiet



Für eine Funktion $f(x, y) = 1$ sei das abgebildete Integrationsgebiet gegeben.
Ermittle das Volumen mit einem Doppelintegral.

Dreieckiges Gebiet



Für eine Funktion $f(x, y) = 1$ sei das abgebildete Integrationsgebiet gegeben. Ermittle das Volumen mit einem Doppelintegral.

Die Geradengleichung lautet $y = 1 - x$. Das Ergebnis überrascht uns nicht:

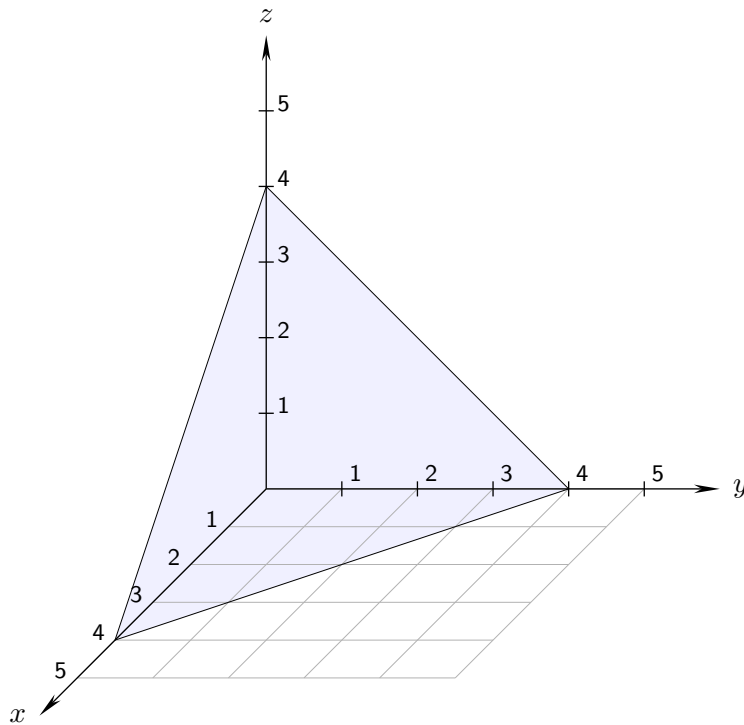
$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) \, dy \, dx = \frac{1}{2}$$

Zum Nachrechnen:

Für $f(x, y) = xy$ erhalten wir $V = \frac{1}{24}$.

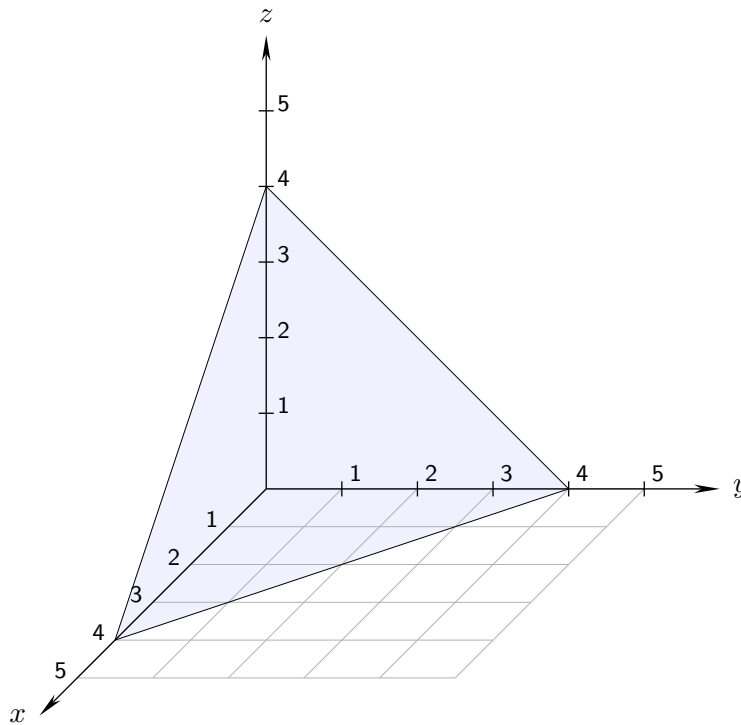
Dreifachintegral

Für eine Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ sei das abgebildete Integrationsgebiet (Tetraeder) gegeben. Integriere die Funktion über dieses Gebiet.



Dreifachintegral

Für eine Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ sei das abgebildete Integrationsgebiet (Tetraeder) gegeben. Integriere die Funktion über dieses Gebiet.



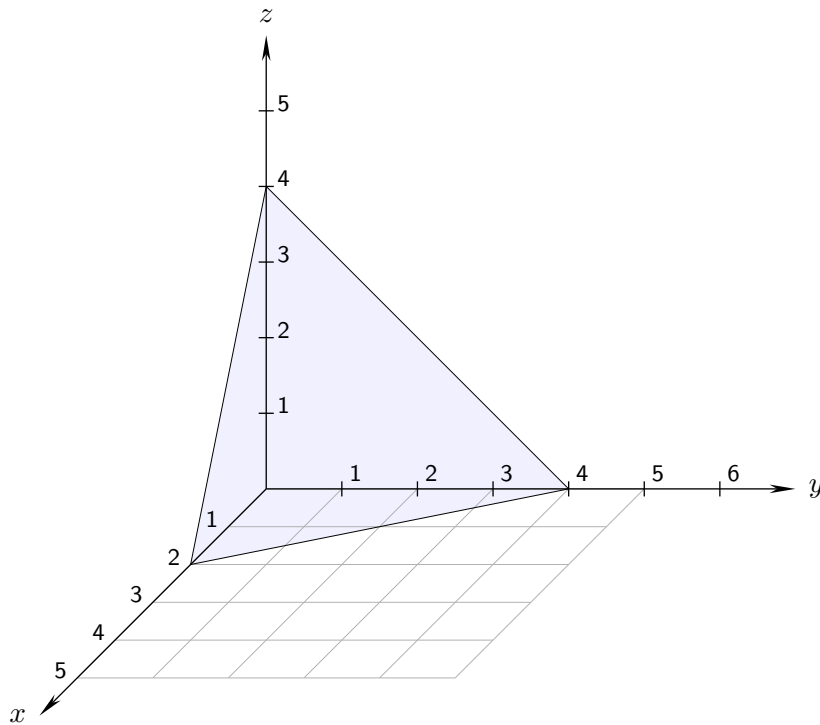
$$\int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = 32$$

$$\int_0^{4-2x-y} f(x, y, z) \, dz = x(4-x-y) + y(4-x-y) + \frac{(4-x-y)^2}{2}$$

$$\int_0^{4-x} \int_0^{4-2x-y} f(x, y, z) \, dz \, dy = \frac{(4-x)^3}{3} + \frac{x(4-x)^2}{2}$$

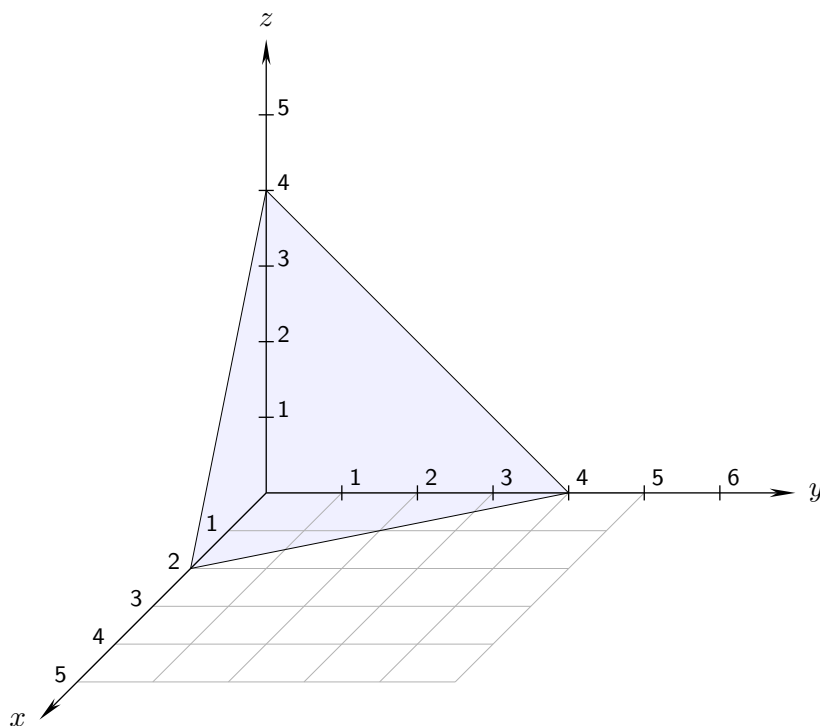
Dreifachintegral

Für eine Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ sei das abgebildete Integrationsgebiet (Tetraeder) gegeben. Integriere die Funktion über dieses Gebiet.



Dreifachintegral

Für eine Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ sei das abgebildete Integrationsgebiet (Tetraeder) gegeben. Integriere die Funktion über dieses Gebiet.



Achsenabschnittsform der Ebene: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \iff z = 4 - 2x - y$

$$\int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-2x-y} f(x, y, z) dz dy dx = \frac{64}{3}$$

$$\int_0^{4-2x-y} f(x, y, z) dz = x(4 - 2x - y) + y(4 - 2x - y) + \frac{(4 - 2x - y)^2}{2}$$

$$\int_0^{4-2x} \int_0^{4-2x-y} f(x, y, z) dz dy = \frac{(4 - 2x)^3}{3} + \frac{x(4 - 2x)^2}{2}$$