

Methode von Galerkin

Die DGL $y''(x) + y(x) = -30x(1-x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ ist zu lösen.

Wir stellen eine Ansatzfunktion ϕ als Linearkombination der Funktionen

$$\begin{aligned}\phi_1 &= x(x-1) \\ \phi_2 &= x^2(x-1) \\ \phi_3 &= x^3(x-1)\end{aligned}$$

auf. $\phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x)$ erfüllt die Anfangsbedingungen.

Diese Ansatzfunktion und ihre 2. Ableitung wird in die DGL eingesetzt.

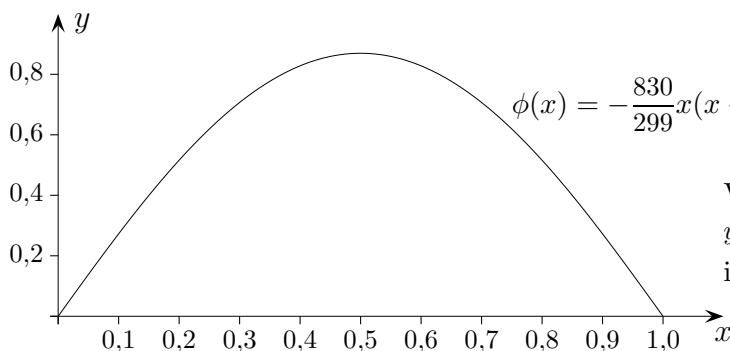
$$\begin{aligned}\phi''(x) + \phi(x) &= -30x(1-x) && | \cdot \phi_1(x) \\ (\phi''(x) + \phi(x))\phi_1(x) &= -30x(1-x)\phi_1(x) && | \int_0^1 \\ \int_0^1 (\phi''(x) + \phi(x))\phi_1(x) dx &= \int_0^1 -30x(1-x)\phi_1(x) dx\end{aligned}$$

Um eine Gleichung für die Koeffizienten a_i zu ermitteln, wird die DGL mit $\phi_1(x)$ multipliziert. Bei der anschließenden Integration fällt x heraus und wir erhalten:

$$\begin{aligned}-\frac{3}{10}a_1 - \frac{3}{20}a_2 - \frac{19}{210}a_3 &= 1 \\ -\frac{3}{20}a_1 - \frac{13}{105}a_2 - \frac{79}{840}a_3 &= \frac{1}{2} \\ -\frac{19}{210}a_1 - \frac{79}{840}a_2 - \frac{103}{1260}a_3 &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Das Vorgehen wurde mit $\phi_2(x)$ und $\phi_3(x)$ wiederholt.

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $a_1 = -\frac{830}{299}$, $a_2 = -\frac{840}{299}$ und $a_3 = \frac{840}{299}$



$$\phi(x) = -\frac{830}{299}x(x-1) - \frac{840}{299}x^2(x-1) + \frac{840}{299}x^3(x-1)$$

Von der analytischen Lösung

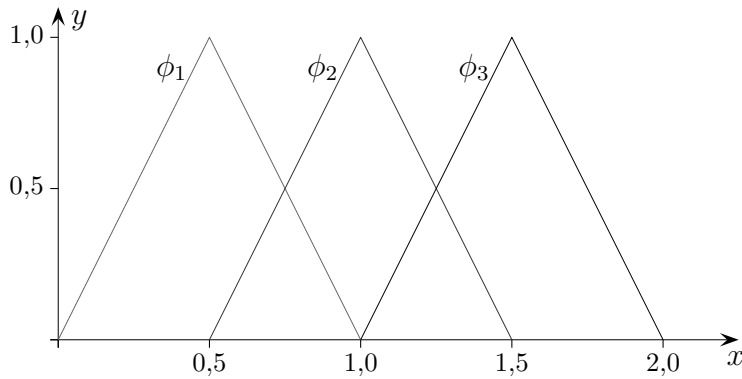
$$y(x) = 32,778 \sin(x) + 60 \cos(x) - 60 - 30x + 30x^2$$

ist der Graph nicht zu unterscheiden.

Methode von Galerkin mit Hutfunktionen

Die DGL $y'(x) + 2y(x) = \frac{1538}{1000} - x$, $y(0) = 0$, ist zu lösen.

Wir bilden eine Ansatzfunktion ϕ als Linearkombination von Hutfunktionen.



$\phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x)$ erfüllt die Anfangsbedingung.

Diese Ansatzfunktion und ihre Ableitung wird in die DGL eingesetzt.

$$\begin{aligned} \phi'(x) + 2\phi(x) &= \frac{1538}{1000} - x && | \cdot \phi_1(x) \\ (\phi'(x) + 2\phi(x))\phi_1(x) &= \left(\frac{1538}{1000} - x\right)\phi_1(x) && | \int_0^2 \\ \int_0^2 (\phi'(x) + 2\phi(x))\phi_1(x) dx &= \int_0^2 \left(\frac{1538}{1000} - x\right)\phi_1(x) dx \end{aligned}$$

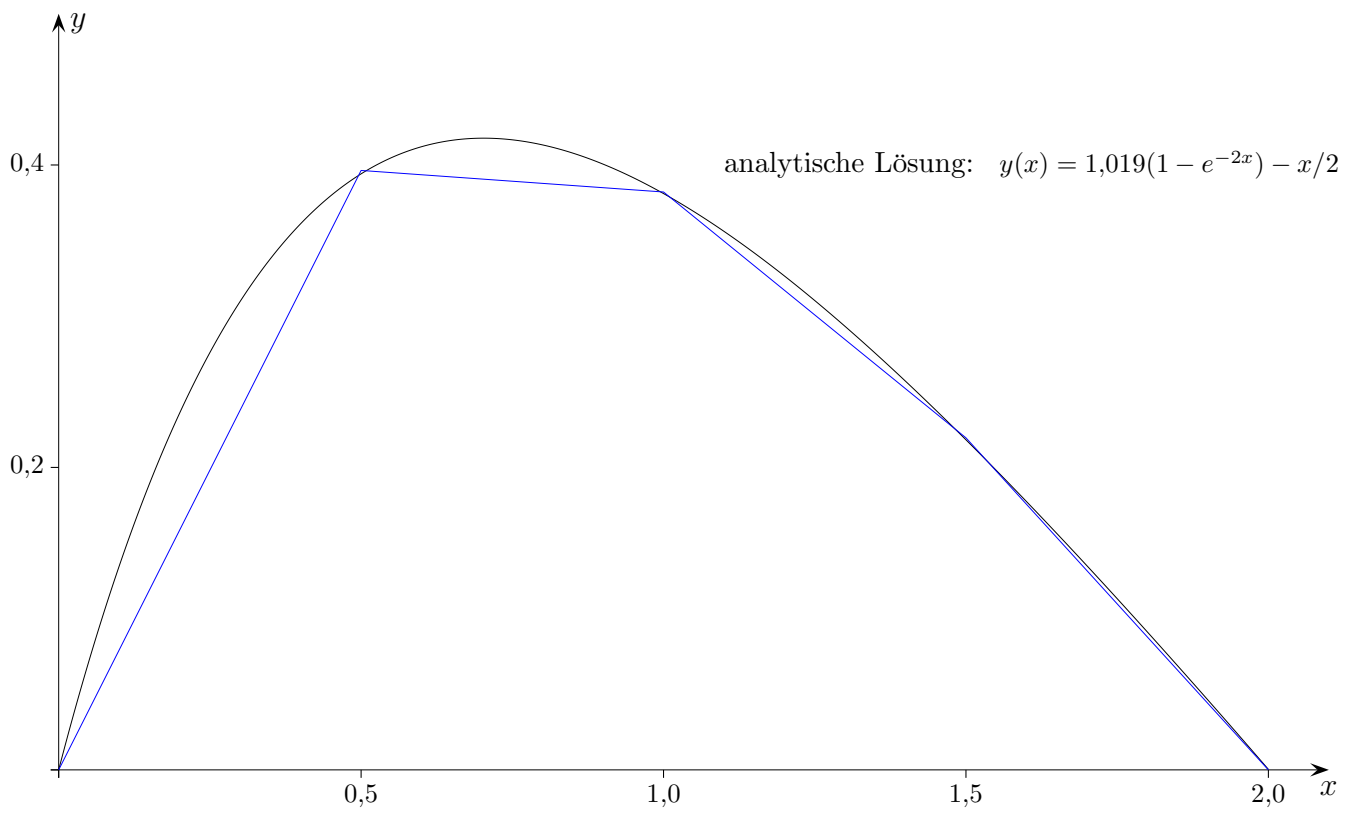
Um eine Gleichung für die Koeffizienten a_i zu ermitteln, wird die DGL mit $\phi_1(x)$ multipliziert. Bei der anschließenden Integration fällt x heraus und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 &= \frac{519}{1000} \\ -\frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 &= \frac{269}{1000} \\ -\frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 &= \frac{19}{1000} \end{aligned}$$

Das Vorgehen wurde mit $\phi_2(x)$ und $\phi_3(x)$ wiederholt.

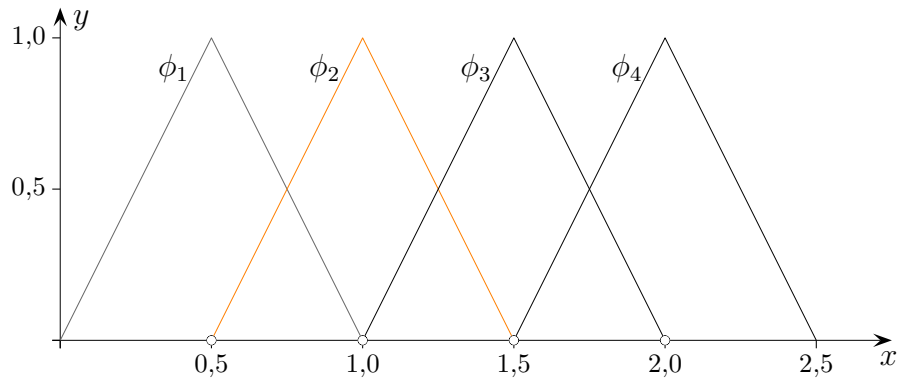
Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $a_1 = \frac{3171}{8000}$, $a_2 = \frac{3057}{8000}$ und $a_3 = \frac{3513}{16000}$

$$y'(x) + 2y(x) = \frac{1538}{1000} - x, \quad y(0) = 0$$



DGL 2. Ordnung mit Hutfunktionen

Die DGL $y''(x) = -x$, $y(0) = 0$, $y(2,5) = 0$ ist zu lösen.



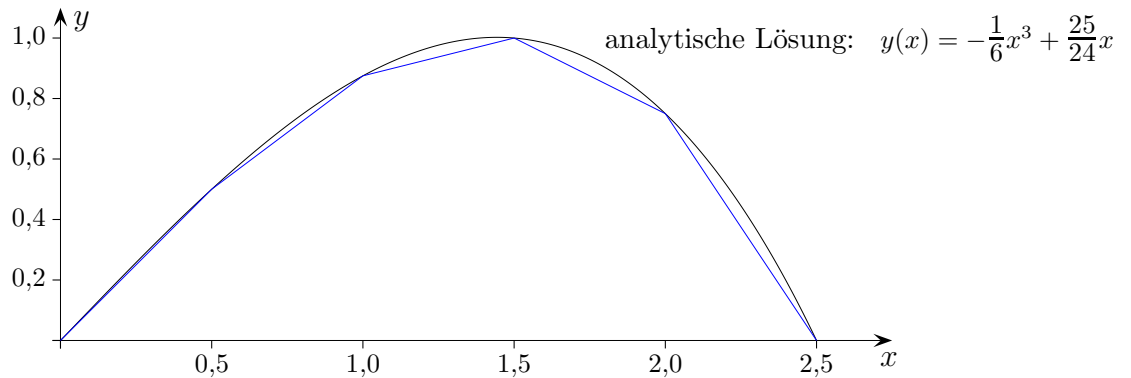
$\phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + a_4\phi_4(x)$ erfüllt die Anfangsbedingung.

Das Einsetzen in die DGL erfolgt erst nach einer partiellen Integration (Ordnung wird verringert).

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= -x && | \cdot \phi_1(x) \\
 y''(x)\phi_1(x) &= -x\phi_1(x) && | \int_0^{2,5} \\
 \underbrace{y'(x)\phi_1(x) \Big|_0^{2,5} - \int_0^{2,5} y'(x)\phi_1'(x) dx}_{= 0, \phi_1 \text{ erfüllt die Randbedingungen.}} &= - \int_0^{2,5} x\phi_1(x) dx \\
 - \int_0^{2,5} \phi_1'(x)\phi_1'(x) dx &= - \int_0^{2,5} x\phi_1(x) dx && | \cdot (-1) \\
 \int_0^{2,5} [a_1\phi_1'(x) + a_2\phi_2'(x) + a_3\phi_3'(x) + a_4\phi_4'(x)] \phi_1'(x) dx &= \int_0^{2,5} x\phi_1(x) dx \\
 \int_0^{2,5} [a_1\phi_1'(x)\phi_1'(x) + a_2\phi_2'(x)\phi_1'(x) + \underbrace{a_3\phi_3'(x)\phi_1'(x) + a_4\phi_4'(x)\phi_1'(x)}_{= 0}] dx &= \int_0^{2,5} x\phi_1(x) dx
 \end{aligned}$$

Steifigkeitsmatrix

$$y''(x) = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(2,5) = 0$$



$$\begin{array}{ll}
 4a_1 - 2a_2 = \frac{1}{4} & \text{rechte Seite } \int_I x \phi_1 dx \\
 -2a_1 + 4a_2 - 2a_3 = \frac{1}{2} & \int_I x \phi_2 dx \\
 -2a_2 + 4a_3 + 2a_4 = \frac{3}{4} & \int_I x \phi_3 dx \\
 -2a_3 + 4a_4 = 1 & \int_I x \phi_4 dx
 \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{7}{8}$, $a_3 = 1$ und $a_4 = \frac{3}{4}$

Es gilt z. B. (im Kopf) $\int_I \phi_1' \phi_1' dx = 4$ und $\int_I \phi_1' \phi_2' dx = -2$, $\phi_1'(0) = 2$, $\phi_1'(1) = -2$.

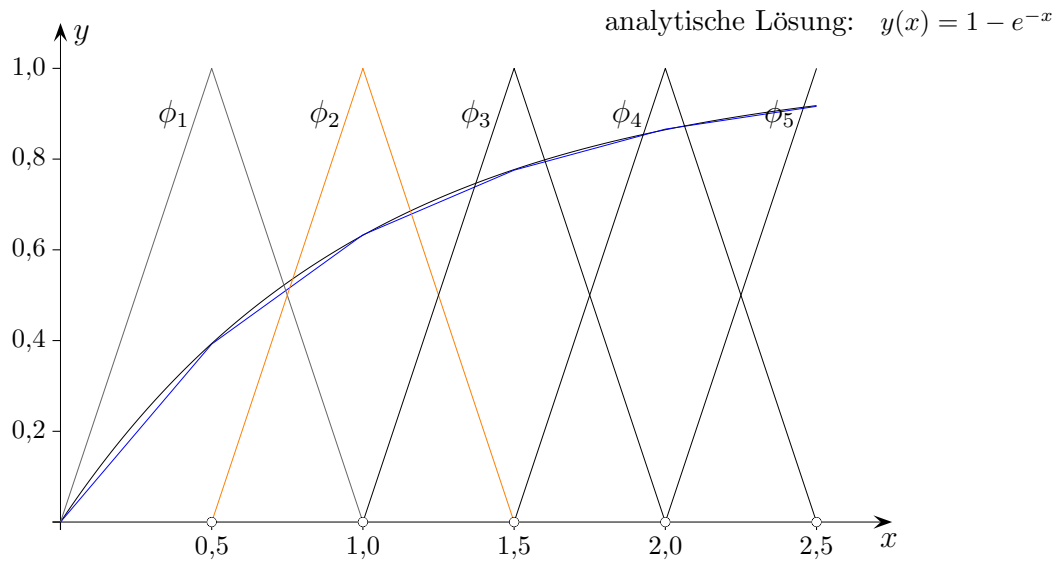
Die Ergebnisse werden in einer sogenannten Steifigkeitsmatrix (symmetrisch) festgehalten.

$$\mathbf{A}_{i,j} = \int_I \phi_i' \phi_j' dx = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

In Matrixform: $\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b}_i = \int_I x \phi_i dx$

Matrizenschreibweise

$$y'(x) + y(x) = 1, \quad y(0) = 0$$



Die Matrizenschreibweise ist hier empfehlenswert.

$$\mathbf{A}_{i,j} = \int_I \phi'_i \phi_j dx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{i,j} = \int_I \phi_i \phi_j dx = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^T + \mathbf{B})\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_i = \int_I 1 \cdot \phi_i dx$$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3}a_1 + \frac{7}{12}a_2 = \frac{1}{2} & \text{rechte Seite } \int_I 1 \cdot \phi_1 dx \\ -\frac{5}{12}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{7}{12}a_3 = \frac{1}{2} & \int_I 1 \cdot \phi_2 dx \\ -\frac{5}{12}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{7}{12}a_4 = \frac{1}{2} & \int_I 1 \cdot \phi_3 dx \\ -\frac{5}{12}a_3 + \frac{1}{3}a_4 + \frac{7}{12}a_5 = \frac{1}{2} & \int_I 1 \cdot \phi_4 dx \\ -\frac{5}{12}a_4 + \frac{2}{3}a_5 = \frac{1}{4} & \int_I 1 \cdot \phi_5 dx \end{array}$$

$$\text{Lösung : } a_1 = \frac{14643}{37328}, \quad a_2 = \frac{5907}{9332}, \quad a_3 = \frac{28953}{37328}, \quad a_4 = \frac{4041}{4666}, \quad \text{und} \quad a_5 = \frac{34203}{37328}$$

Methode von Rayleigh-Ritz

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ f(x, y) - y' &= 0 \\ \int_a^b [f(x, y) - y']^2 dx &\longrightarrow \text{Minimum} \quad (\text{Integral statt Summe der Abstandsquadrate}) \end{aligned}$$

Den Ansatz (approximativ):

$$y(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

setzen wir samt Ableitung in den Integranden ein.

Durch das Integrieren fällt x heraus.

Den verbleibenden Term betrachten wir als Funktion der Variablen a_1, a_2, \dots, a_n .

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial a_i} \dots = 0, i = 1, \dots, n$,
ergeben ein Gleichungssystem für die Koeffizienten.

$$y' = y + x, \quad y(0) = 1, \quad \text{Intervall } [a, b] = [0, 1]$$

Ansatz $y(x) = 1 + ax$

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^b [f(x, y) - y']^2 dx \\ &= \int_0^1 [1 + ax + x - a]^2 dx \\ \frac{\partial}{\partial a} F(a) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} [1 + ax + x - a]^2 dx \quad \text{unter dem Integralzeichen differenzieren} \\ &= \int_0^1 2[1 + ax + x - a](x - 1) dx \\ &= \dots = \frac{a}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{a}{3} - \frac{2}{3} &= 0 \implies a = 2 \end{aligned}$$

$$y(x) = 1 + 2x$$

Methode von Rayleigh-Ritz

$$y' = y + x, \quad y(0) = 1, \quad \text{Intervall } [a, b] = [0, 1]$$

$$\text{Ansatz } y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2$$

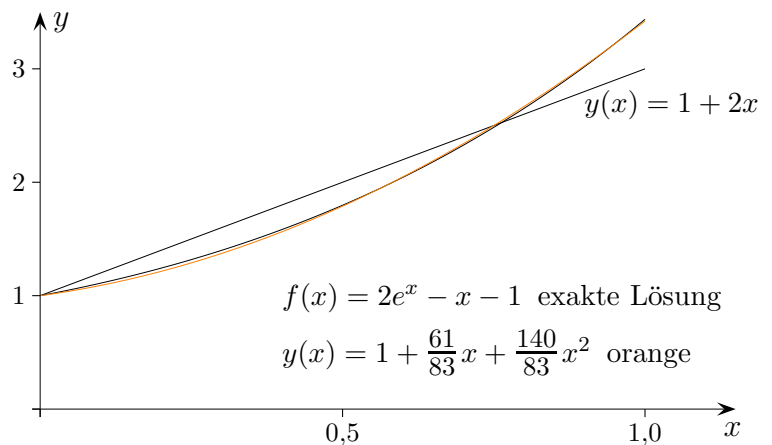
$$\begin{aligned} F(a_1, a_2) &= \int_a^b [f(x, y) - y']^2 dx \\ &= \int_0^1 [(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)]^2 dx \\ \frac{\partial}{\partial a_1} F &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a_1} [(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 2[(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)](x - 1) dx \\ &= \dots = \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$4a_1 + 3a_2 = 8$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_2} F &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a_2} [(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 2[(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)](x^2 - 2x) dx \\ &= \dots = \frac{1}{2}a_1 + \frac{16}{15}a_2 - \frac{13}{6} \end{aligned}$$

$$30a_1 + 64a_2 = 130$$

$$\implies a_1 = \frac{61}{83}, \quad a_2 = \frac{140}{83}$$



Methode von Galerkin

$$y' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad \text{Intervall } [a, b] = [0, 1]$$

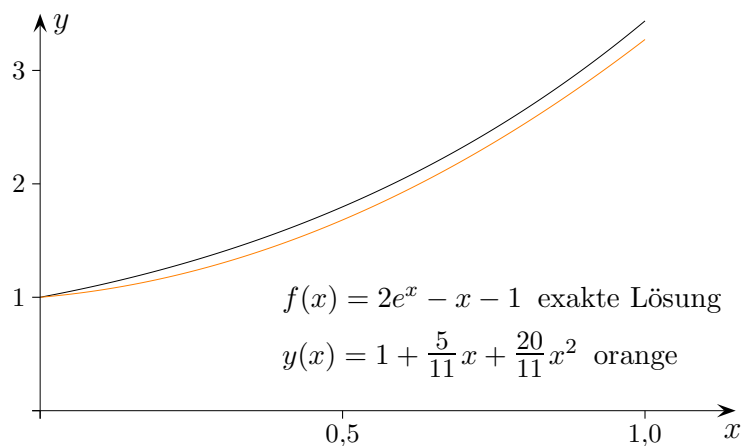
Der Ansatz $y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2$
erfüllt die Anfangsbedingung.

$y(x)$ und $y'(x)$ werden in die DGL eingesetzt.

$$\begin{aligned} (a_1 + 2a_2x) - (1 + a_1x + a_2x^2) &= x && | \cdot x \\ a_1x + 2a_2x^2 - x - a_1x^2 - a_2x^3 &= x^2 && | \int_0^1 \\ \frac{1}{6}a_1 + \frac{5}{12}a_2 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_1 + 2a_2x) - (1 + a_1x + a_2x^2) &= x && | \cdot x^2 \\ a_1x^2 + 2a_2x^3 - x^2 - x^3a_1 - x^4a_2 &= x^3 && | \int_0^1 \\ \frac{1}{12}a_1 + \frac{3}{10}a_2 - \frac{1}{3} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $a_1 = \frac{5}{11}$, $a_2 = \frac{20}{11}$



Finite-Elemente-Methode (FEM)