Methode von Galerkin

Die DGL $\quad y''(x) + y(x) = -30x(1-x),\ y(0) = 0,\ y(1) = 0\ $ ist zu lösen.

Wir stellen eine Ansatzfunktion ϕ als Linearkombination der Funktionen

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= x(x-1)\\
\phi_2 &= x^2(x-1)\\
\phi_3 &= x^3(x-1)
\end{aligned}$$

auf. $\quad \phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x)\ $ erfüllt die Anfangsbedingungen.

Diese Ansatzfunktion und ihre 2. Ableitung wird in die DGL eingesetzt.

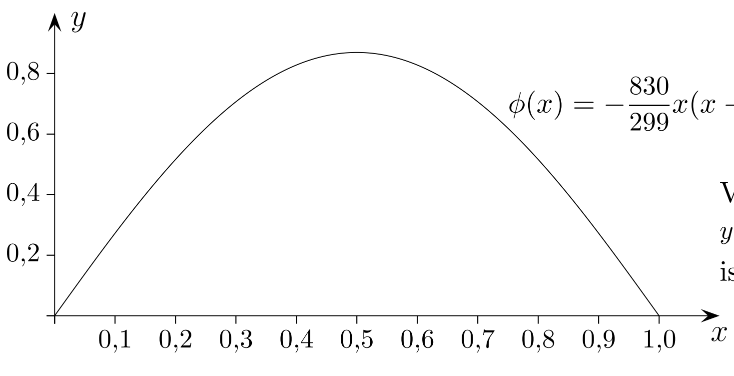
$$\begin{aligned}
\phi''(x) + \phi(x) &= -30x(1-x) && \mid \cdot \phi_1(x)\\
(\phi''(x) + \phi(x))\phi_1(x) &= -30x(1-x)\phi_1(x) && \mid \int_0^1\\
\int_0^1 (\phi''(x) + \phi(x))\phi_1(x)\,dx &= \int_0^1 -30x(1-x)\phi_1(x)\,dx
\end{aligned}$$

Um eine Gleichung für die Koeffizienten a_i zu ermitteln, wird die DGL mit $\phi_1(x)$ multipliziert. Bei der anschließenden Integration fällt x heraus und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{10}a_1 - \frac{3}{20}a_2 - \frac{19}{210}a_3 &= 1\\
-\frac{3}{20}a_1 - \frac{13}{105}a_2 - \frac{79}{840}a_3 &= \frac{1}{2}\\
-\frac{19}{210}a_1 - \frac{79}{840}a_2 - \frac{103}{1260}a_3 &= \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

Das Vorgehen wurde mit $\phi_2(x)$ und $\phi_3(x)$ wiederholt.

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $a_1 = -\frac{830}{299},\ a_2 = -\frac{840}{299}$ und $a_3 = \frac{840}{299}$



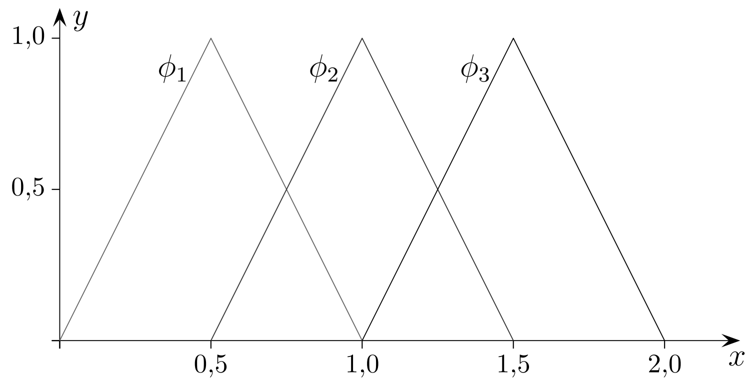
$\phi(x) = -\frac{830}{299}x(x-1) - \frac{840}{299}x^2(x-1) + \frac{840}{299}x^3(x-1)$

Von der analytischen Lösung
$y(x) = 32{,}778\sin(x) + 60\cos(x) - 60 - 30x + 30x^2$
ist der Graph nicht zu unterscheiden.

Methode von Galerkin mit Hutfunktionen

Die DGL $\quad y'(x) + 2y(x) = \frac{1538}{1000} - x,\ \ y(0) = 0,$ ist zu lösen.

Wir bilden eine Ansatzfunktion ϕ als Linearkombination von Hutfunktionen.



$\phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x)$ erfüllt die Anfangsbedingung.

Diese Ansatzfunktion und ihre Ableitung wird in die DGL eingesetzt.

$$
\begin{aligned}
\phi'(x) + 2\phi(x) &= \frac{1538}{1000} - x && \mid \cdot \phi_1(x)\\
(\phi'(x) + 2\phi(x))\phi_1(x) &= (\frac{1538}{1000} - x)\phi_1(x) && \mid \int_0^2\\
\int_0^2 (\phi'(x) + 2\phi(x))\phi_1(x)\,dx &= \int_0^2 (\frac{1538}{1000} - x)\phi_1(x)\,dx
\end{aligned}
$$

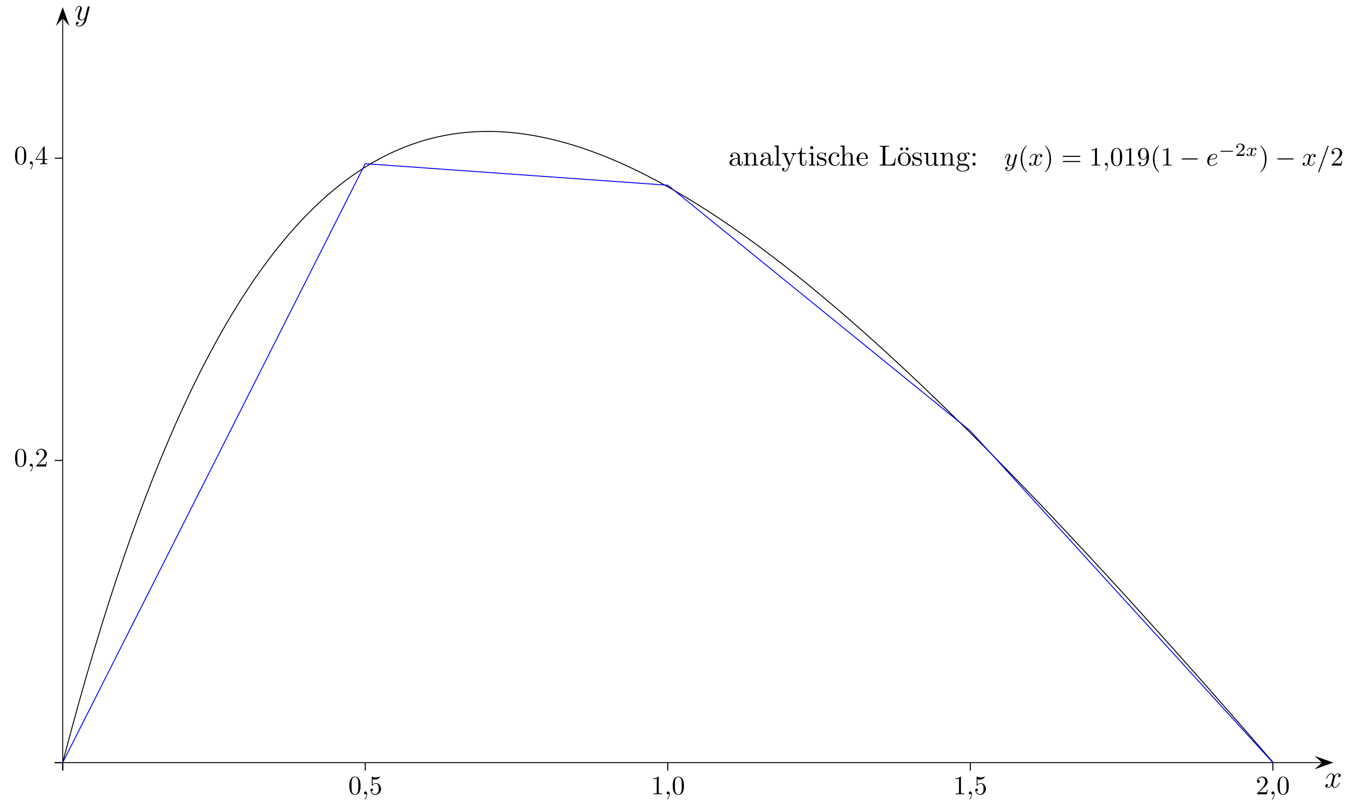
Um eine Gleichung für die Koeffizienten a_i zu ermitteln, wird die DGL mit $\phi_1(x)$ multipliziert. Bei der anschließenden Integration fällt x heraus und wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 &= \frac{519}{1000}\\
-\frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 &= \frac{269}{1000}\\
-\frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 &= \frac{19}{1000}
\end{aligned}
$$

Das Vorgehen wurde mit $\phi_2(x)$ und $\phi_3(x)$ wiederholt.

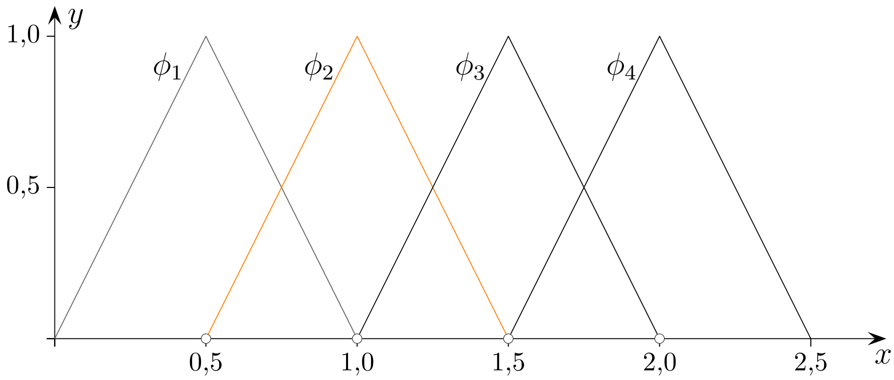
Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $a_1 = \frac{3171}{8000}$, $a_2 = \frac{3057}{8000}$ und $a_3 = \frac{3513}{16000}$

$y'(x) + 2y(x) = \frac{1538}{1000} - x, \;\; y(0) = 0$



DGL 2. Ordnung mit Hutfunktionen

Die DGL $\quad y''(x) = -x,\ y(0) = 0,\ y(2{,}5) = 0$ ist zu lösen.



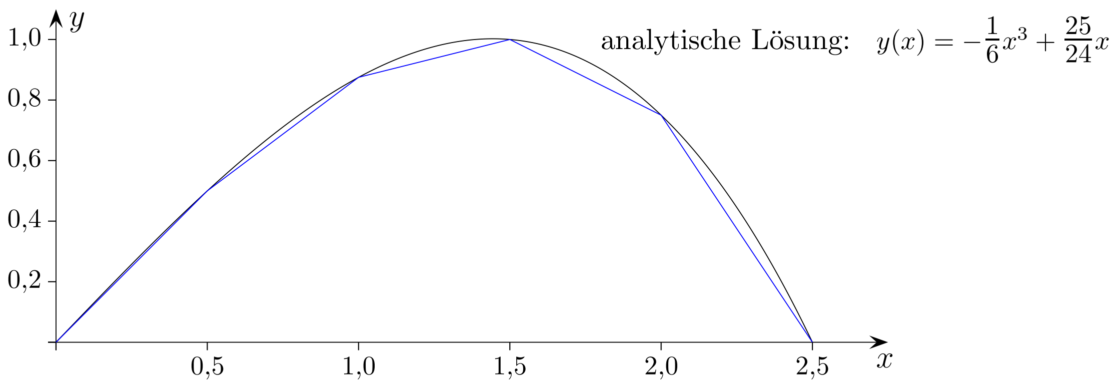
$\phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + a_4\phi_4(x)$ erfüllt die Anfangsbedingung.

Das Einsetzen in die DGL erfolgt erst nach einer partiellen Integration (Ordnung wird verringert).

$$
\begin{aligned}
y''(x) &= -x && \Big|\cdot\phi_1(x) \\
y''(x)\phi_1(x) &= -x\phi_1(x) && \Big|\int_0^{2,5} \\
\underbrace{y'(x)\phi_1(x)\Big|_0^{2,5}}_{=\,0,\ \phi_1 \text{ erfüllt die Randbedingungen.}} - \int_0^{2,5} y'(x)\phi_1'(x)\,dx &= -\int_0^{2,5} x\phi_1(x)\,dx \\
-\int_0^{2,5} \phi'(x)\phi_1'(x)\,dx &= -\int_0^{2,5} x\phi_1(x)\,dx && \Big|\cdot(-1) \\
\int_0^{2,5} \big[a_1\phi_1'(x) + a_2\phi_2'(x) + a_3\phi_3'(x) + a_4\phi_4'(x)\big]\,\phi_1'(x)\,dx &= \int_0^{2,5} x\phi_1(x)\,dx \\
\int_0^{2,5} \big[a_1\phi_1'(x)\phi_1'(x) + a_2\phi_2'(x)\phi_1'(x) + \underbrace{a_3\phi_3'(x)\phi_1'(x) + a_4\phi_4'(x)\phi_1'(x)}_{=\,0}\big]\,dx &= \int_0^{2,5} x\phi_1(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Steifigkeitsmatrix

$y''(x) = -x,\ y(0) = 0,\ y(2{,}5) = 0$



$$
\begin{aligned}
4\,a_1 - 2\,a_2 &= \tfrac{1}{4} & \text{rechte Seite} \int_I x\phi_1\,dx\\
-2\,a_1 + 4\,a_2 - 2\,a_3 &= \tfrac{1}{2} & \int_I x\phi_2\,dx\\
-2\,a_2 + 4\,a_3 + 2\,a_4 &= \tfrac{3}{4} & \int_I x\phi_3\,dx\\
-2\,a_3 + 4\,a_4 &= 1 & \int_I x\phi_4\,dx
\end{aligned}
$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{7}{8},\ a_3 = 1$ und $a_4 = \frac{3}{4}$

Es gilt z. B. (im Kopf) $\int_I \phi_1'\phi_1'\,dx = 4$ und $\int_I \phi_1'\phi_2'\,dx = -2,\quad \phi_1'(0) = 2,\ \phi_1'(1) = -2.$

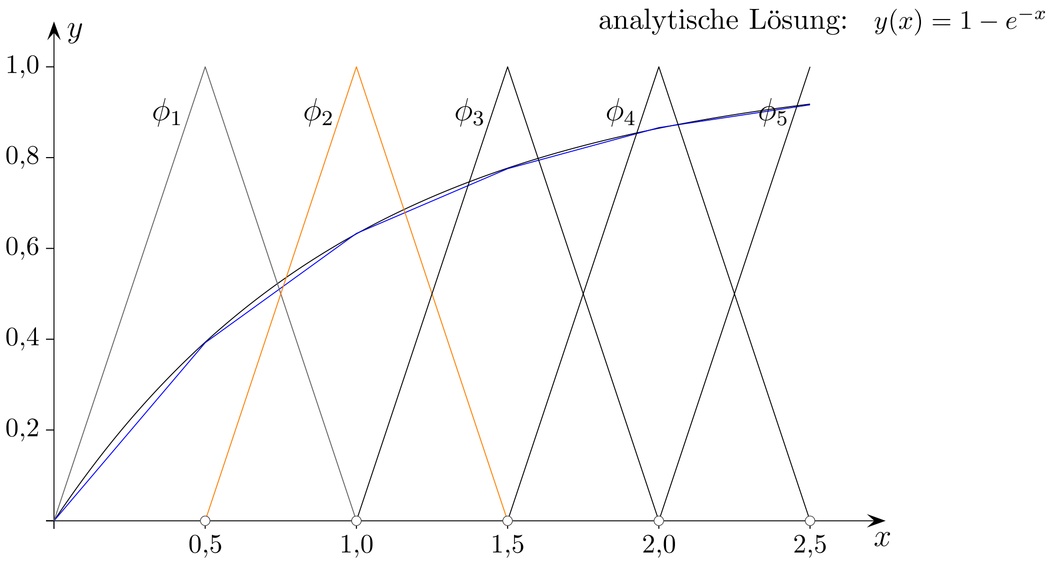
Die Ergebnisse werden in einer sogenannten Steifigkeitsmatrix (symmetrisch) festgehalten.

$$
\mathbf{A}_{i,j} = \int_I \phi_i'\phi_j'\,dx = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}
$$

In Matrixform: $\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b}_i = \int_I x\phi_i\,dx$

Matrizenschreibweise

$y'(x) + y(x) = 1,\ y(0) = 0$



Die Matrizenschreibweise ist hier empfehlenswert.

$$\mathbf{A}_{i,j} = \int_I \phi_i'\phi_j\,dx = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_{i,j} = \int_I \phi_i\phi_j\,dx = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B})\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_i = \int_I 1\cdot\phi_i\,dx$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a_1 + \frac{7}{12}a_2 &= \frac{1}{2} & \qquad \text{rechte Seite } \int_I 1\cdot\phi_1\,dx \\ -\frac{5}{12}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{7}{12}a_3 &= \frac{1}{2} & \int_I 1\cdot\phi_2\,dx \\ -\frac{5}{12}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{7}{12}a_4 &= \frac{1}{2} & \int_I 1\cdot\phi_3\,dx \\ -\frac{5}{12}a_3 + \frac{1}{3}a_4 + \frac{7}{12}a_5 &= \frac{1}{2} & \int_I 1\cdot\phi_4\,dx \\ -\frac{5}{12}a_4 + \frac{2}{3}a_5 &= \frac{1}{4} & \int_I 1\cdot\phi_5\,dx \end{aligned}$$

Lösung : $a_1 = \frac{14643}{37328},\ a_2 = \frac{5907}{9332},\ a_3 = \frac{28953}{37328},\ a_4 = \frac{4041}{4666},\ \text{und}\ \ a_5 = \frac{34203}{37328}$

Methode von Rayleigh-Ritz

$$
\begin{aligned}
y' &= f(x,y) \\
f(x,y) - y' &= 0 \\
\int_a^b \big[f(x,y) - y'\big]^2\, dx & \quad \longrightarrow \text{Minimum} \qquad \text{(Integral statt Summe der Abstandsquadrate)}
\end{aligned}
$$

Den Ansatz (approximativ):

$$y(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + \ldots + a_n\phi_n(x)$$

setzen wir samt Ableitung in den Integranden ein.

Durch das Integrieren fällt x heraus.

Den verbleibenden Term betrachten wir als Funktion der Variablen a_1, a_2, …, a_n.

Die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial}{\partial a_i} \ldots = 0,\ i = 1, \ldots, n$,

ergeben ein Gleichungssystem für die Koeffizienten.

$$y' = y + x, \quad y(0) = 1, \quad \text{Intervall } [a,b] = [0,1]$$

Ansatz $\quad y(x) = 1 + ax$

$$
\begin{aligned}
F(a) &= \int_a^b \big[f(x,y) - y'\big]^2\, dx \\
&= \int_0^1 \big[1 + ax + x - a\big]^2\, dx \\
\frac{\partial}{\partial a} F(a) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \big[1 + ax + x - a\big]^2\, dx \qquad \text{unter dem Integralzeichen differenzieren} \\
&= \int_0^1 2\big[1 + ax + x - a\big](x-1)\, dx \\
&= \ldots = \frac{a}{3} - \frac{2}{3} \\
\frac{a}{3} - \frac{2}{3} &= 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 2 \\
y(x) &= 1 + 2x
\end{aligned}
$$

Methode von Rayleigh-Ritz

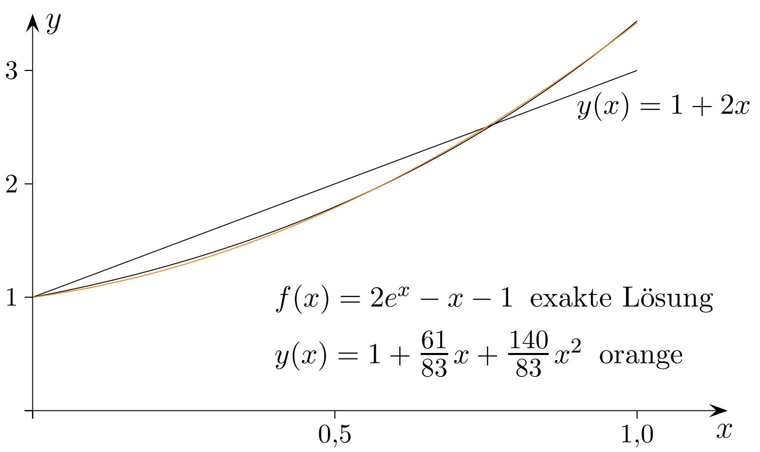
$$y' = y + x, \quad y(0) = 1, \quad \text{Intervall } [a,b] = [0,1]$$

Ansatz $\quad y(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{aligned}
F(a_1,a_2) &= \int_a^b \big[f(x,y) - y'\big]^2\,dx \\
&= \int_0^1 \big[(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)\big]^2\,dx \\
\frac{\partial}{\partial a_1}F &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a_1}\big[(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)\big]^2\,dx \\
&= \int_0^1 2\big[(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)\big](x-1)\,dx \\
&= \ldots = \tfrac{2}{3}a_1 + \tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{4}{3} \\
4a_1 + 3a_2 &= 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_2}F &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a_2}\big[(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)\big]^2\,dx \\
&= \int_0^1 2\big[(1 + a_1x + a_2x^2) + x - (a_1 + 2a_2x)\big](x^2-2x)\,dx \\
&= \ldots = \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{16}{15}a_2 - \tfrac{13}{6} \\
30a_1 + 64a_2 &= 130
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 = \tfrac{61}{83}, \quad a_2 = \tfrac{140}{83}$$



Methode von Galerkin

$$y' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad \text{Intervall } [a,b] = [0,1]$$

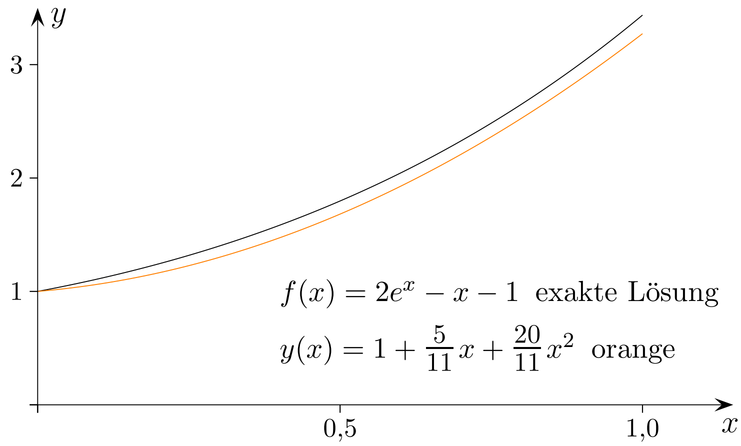
Der Ansatz $\quad y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2$
erfüllt die Anfangsbedingung.

$y(x)$ und $y'(x)$ werden in die DGL eingesetzt.

$$\begin{aligned}
(a_1 + 2a_2x) - (1 + a_1x + a_2x^2) &= x & &| \cdot x \\
a_1x + 2a_2x^2 - x - a_1x^2 - a_2x^3 &= x^2 & &| \int_0^1 \\
\tfrac{1}{6}a_1 + \tfrac{5}{12}a_2 - \tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_1 + 2a_2x) - (1 + a_1x + a_2x^2) &= x & &| \cdot x^2 \\
a_1x^2 + 2a_2x^3 - x^2 - x^3a_1 - x^4a_2 &= x^3 & &| \int_0^1 \\
\tfrac{1}{12}a_1 + \tfrac{3}{10}a_2 - \tfrac{1}{3} &= \tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $a_1 = \frac{5}{11}, \;\; a_2 = \frac{20}{11}$



Startseite

Finite-Elemente-Methode (FEM)