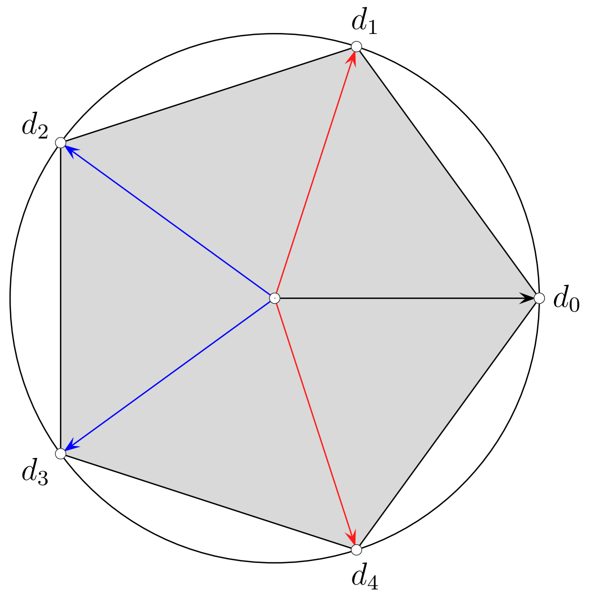
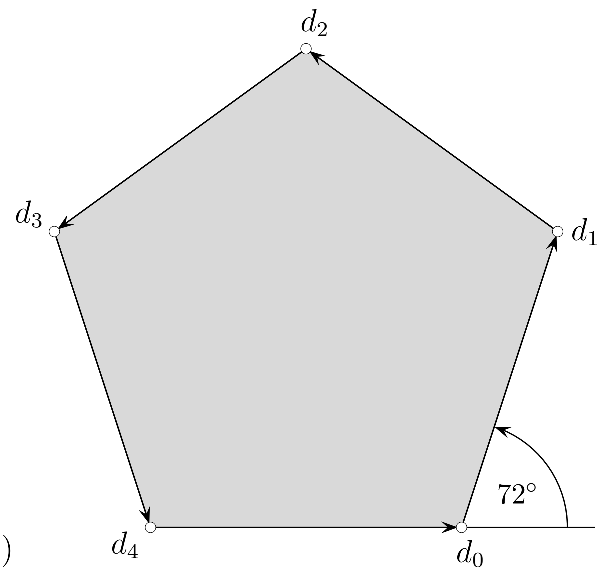
Regelmäßiges Fünfeck

Eine komplexe Lösung der Gleichung $z^5 = 1$ soll ermittelt werden. Mit deren Real- oder Imaginärteil ist ersichtlich, wie ein regelmäßiges Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Carl Friedrich Gauss entwickelte 1796 (18jährig) die Lösungsidee weiter und konnte so die Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebzehnecks beweisen.



Die Summe der Lösungen ergibt wieder ein regelmäßiges Fünfeck, daher gilt (alternative Begründung mit Satz von Viëta):

$$\begin{aligned} d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= 0 \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= -1 \end{aligned}$$



Die linke Summe wird nun aufgeteilt:

$$\begin{aligned} e_0 &= d_1 + d_4 \\ e_1 &= d_2 + d_3 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} e_0 \cdot e_1 &= d_1 \cdot (d_2 + d_3) + d_4 \cdot (d_2 + d_3) \\ &= d_3 + d_4 + d_1 + d_2 = -1 \quad \text{und} \\ e_0 + e_1 &= -1 \end{aligned}$$

erhalten wir $e_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ und $e_1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$

als Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$(y - e_0)(y - e_1) = y^2 - (e_0 + e_1)y + e_0 e_1 = y^2 + y - 1 = 0$$

Regelmäßiges Fünfeck

Der Auflösungsschritt wird wiederholt.

Mit

$$\begin{aligned} d_1 \cdot d_4 \;&=\; 1 \quad \text{und} \\ d_1 + d_4 \;&=\; \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

erhalten wir z. B.

$$d_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) + \frac{1}{4} i \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

als Lösung der quadratischen Gleichung:

$$(x - d_1)(x - d_4) \;=\; x^2 - (d_1 + d_4)x + d_1 d_4 \;=\; x^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)x + 1 \;=\; 0$$

Auch an diesem Beispiel können die Anfänge der Galois-Theorie (siehe ebenda) veranschaulicht werden. Die 4-elementige Galois-Gruppe wird von den beiden Permutationen $\sigma_1 = (14)(23)$ und $\sigma_2 = (12)(34)$ erzeugt, beachte hierzu: $(d_1 + d_4)(d_2 + d_3) = -1$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} d_1 d_4 &= 1 \\ d_1 + d_4 &= \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 d_3 &= 1 \\ d_2 + d_3 &= -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \end{aligned}$$

Die Adjunktion von $\sqrt{5}$ zu $\mathbb{Q}$ führt zur 2-elementigen Galois-Untergruppe $\{\mathrm{id}, \sigma_1\}$.
σ_2 fällt heraus.

Die Permutationen (Automorphismen) der Galois-Gruppe sind durch $d_1 \longrightarrow d_i,\ i = 1 \ldots 4,$ bestimmt. Da auch die inversen Abbildungen zur Gruppe gehören, gibt es zu je zwei Lösungen $d_i,\ i = 1 \ldots 4$, eine Permutation, die die eine Lösung in die andere überführt. Allgemein gilt, dass die Galois-Gruppe transitiv ist.