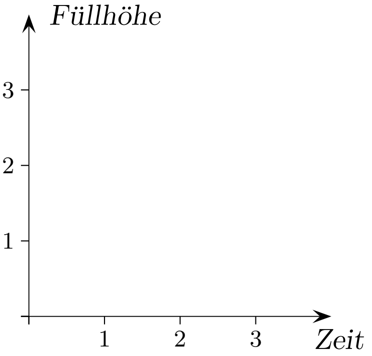
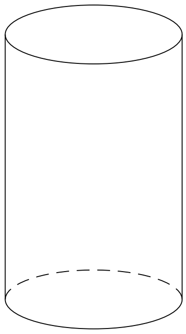
Füllgraphen

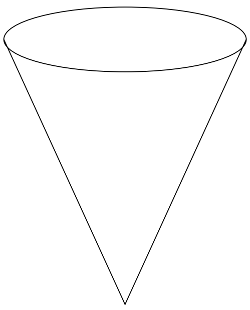
Die Gefäße werden durch einen gleichmäßigen Wasserzulauf gefüllt.
Skizziere die Füllgraphen,
d. h. den Zusammenhang von Füllhöhe und Fülldauer.



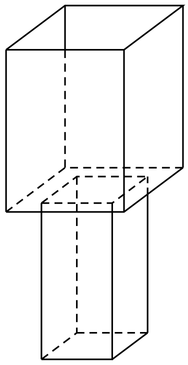
a)



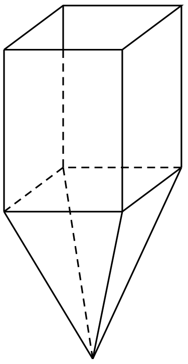
b)



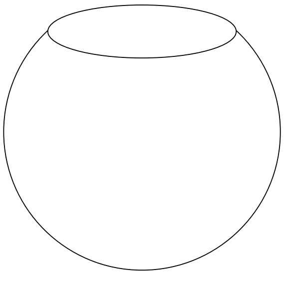
c)



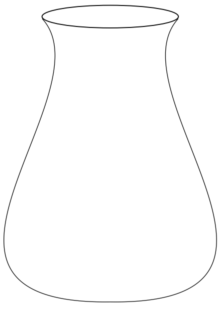
d)



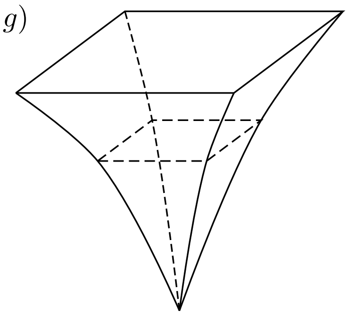
e)



f)



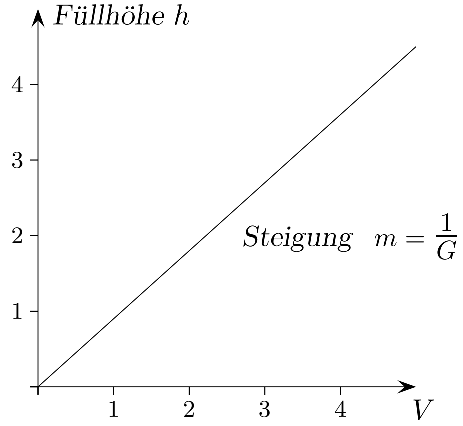
g)

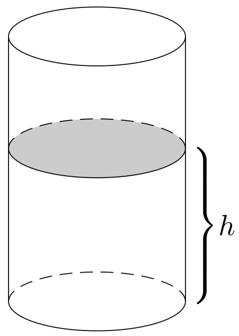


Füllfunktionen

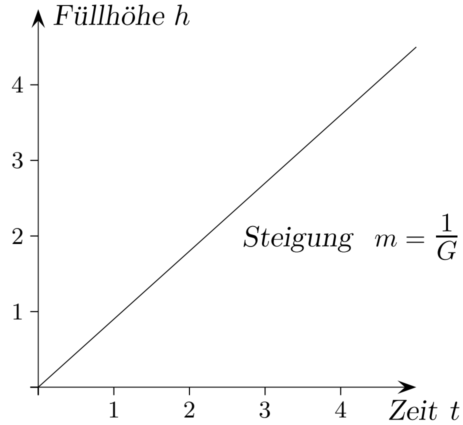
Um die Füllfunktion zu erhalten, ist zunächst der Zusammenhang
von Füllvolumen V und Füllhöhe h zu ermitteln.

Für den Zylinder ist: $V = G \cdot h$, wobei $G = \pi r^2$ ist. Dann gilt: $h = \frac{V}{G}$





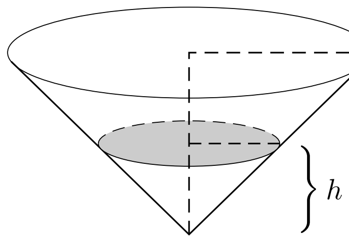
Das Diagramm erfasst dynamisch den Füllvorgang.
Wir beginnen bei null und das Volumen nimmt gleichmäßig zu. Wenn pro Zeiteinheit eine Volumen-Einheit Flüssigkeit zufließt, können die Einheiten auf der x-Achse ausgetauscht werden.



Wenn pro Zeiteinheit q Volumen-Einheiten Flüssigkeit zufließen (z.B. $q = 2$), dann muss V in $h = \frac{V}{G}$ durch $q \cdot t$ ersetzt werden, um die Abhängigkeit der Füllhöhe h von der Zeit t zu erhalten.

Aufg.
Ermittle die Füllfunktion für einen Kegel mit einem Öffnungswinkel von 90°.

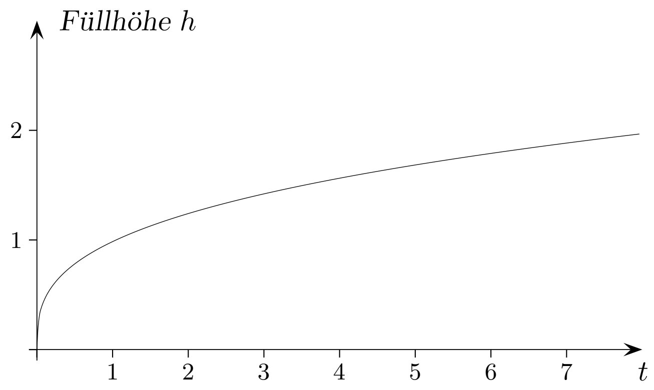
Füllfunktionen



Für den Kegel lautet der Zusammenhang von Füllvolumen V und Füllhöhe h: $V = \frac{1}{3} Q \cdot h$,
wobei für die von h abhängige Querschnittsfläche Q gilt: $Q = \pi h^2 \;\; (h = r)$.

Dann bringen wir h auf eine Seite: $h = \sqrt[3]{\frac{3\,V}{\pi}}$

Um die Füllhöhe h in Abhängigkeit von der Zeit t zu erhalten, ersetzen wir wieder V durch $q \cdot t$.

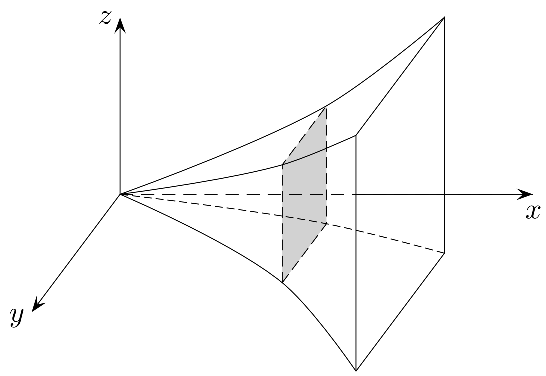


Bei Körpern, von denen keine elementare Volumenformel vorliegt, kann mit der Integralrechnung versucht werden, die Füllfunktion aufzustellen. Wenn die Querschnittsflächen $Q(x)$ nur von einer Variablen abhängen (hierzu gehören die von einer Funktion erzeugten Rotationskörper), kann das Volumen mit der Formel $V = \int_0^h Q(x)\,dx$ ermittelt werden.

Mit $V = q \cdot t$ kann t in Abhängigkeit von h angegeben werden. Hierdurch erhalten wir auch den Graphen der Umkehrfunktion (h in Abhängigkeit von t), wenn auch das Umstellen nach h häufig misslingt.

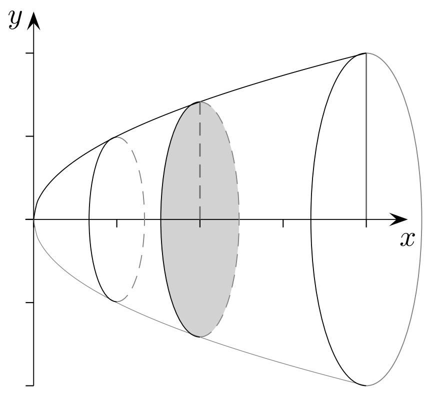
Bemerkenswert ist, dass die Umkehrfunktion $h(t)$
Lösung einer Differentialgleichung ist:

$$t = \frac{1}{q} \int_0^h Q(x)\,dx$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{dt}{dh} = \frac{Q(h)}{q}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{q}{Q(h)}$$

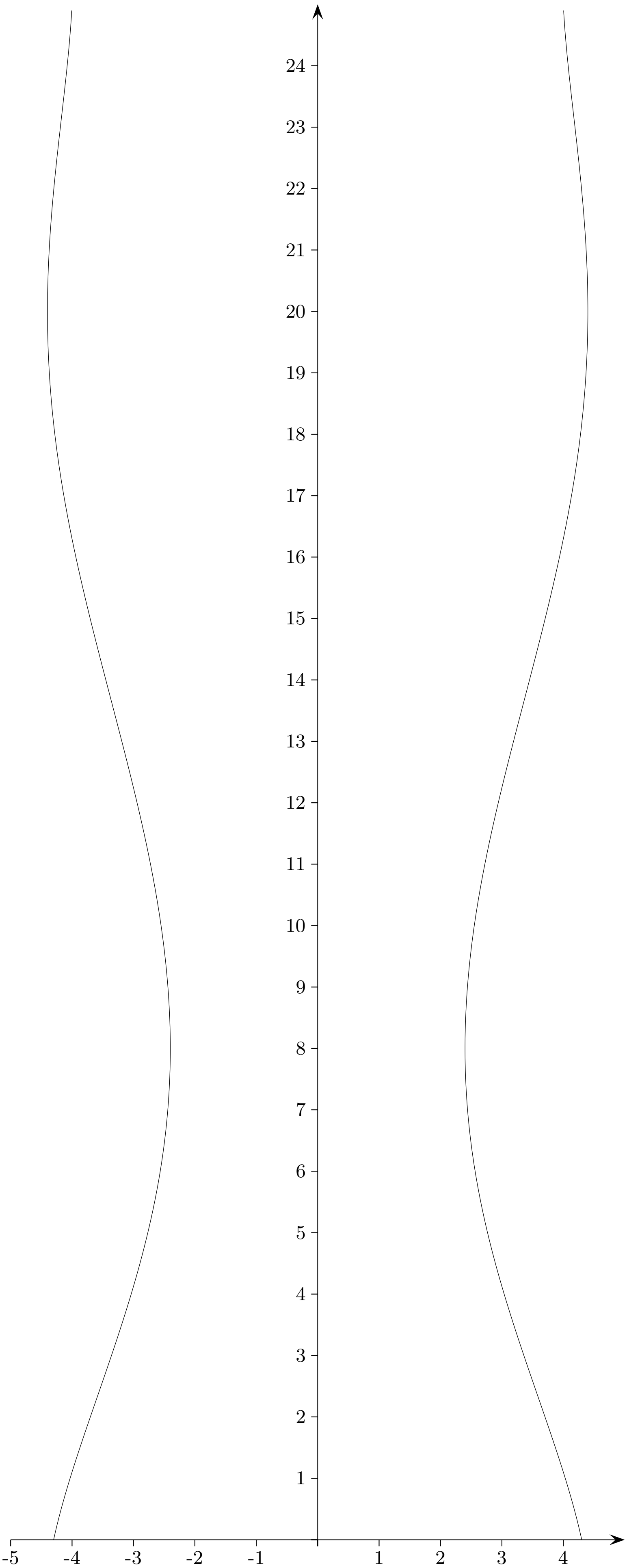


Für Rotationskörper lauten die Zusammenhänge:

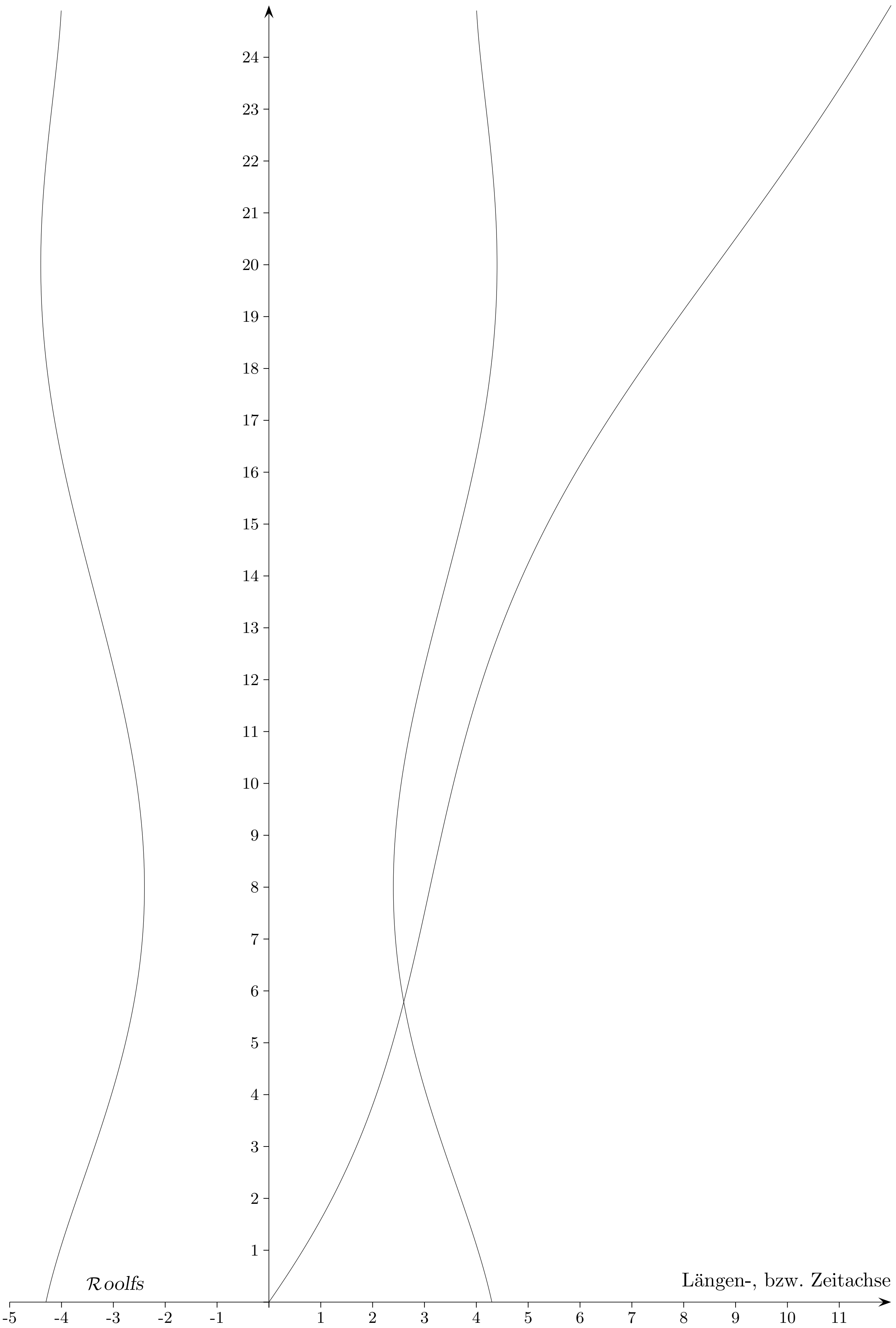
$$Q(x) = \pi \cdot (f(x))^2$$
$$V = \int_0^h Q(x)\,dx \;=\; \pi \int_0^h (f(x))^2\,dx$$
$$V = q \cdot t$$
$$\Longrightarrow \quad t = \frac{\pi}{q} \int_0^h (f(x))^2\,dx$$



Füllgraph

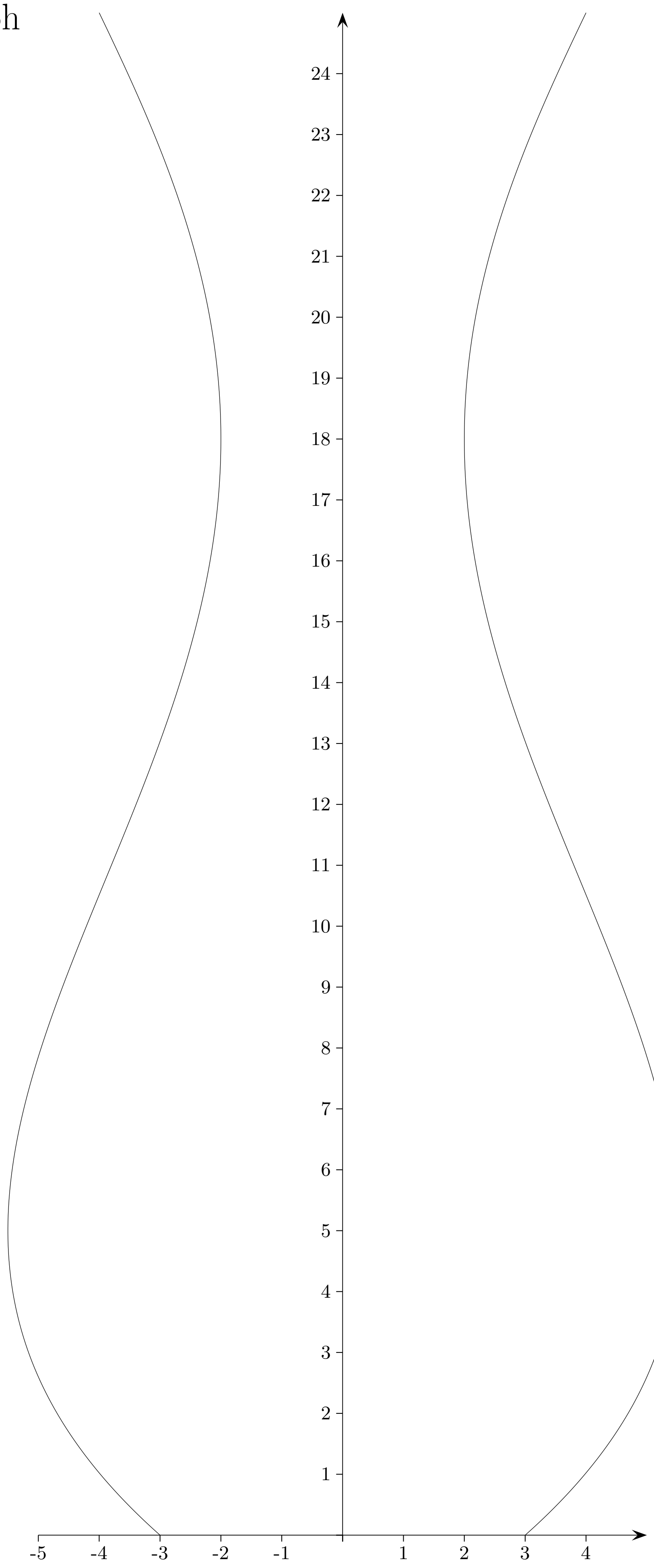


$\mathcal{R}oolfs$

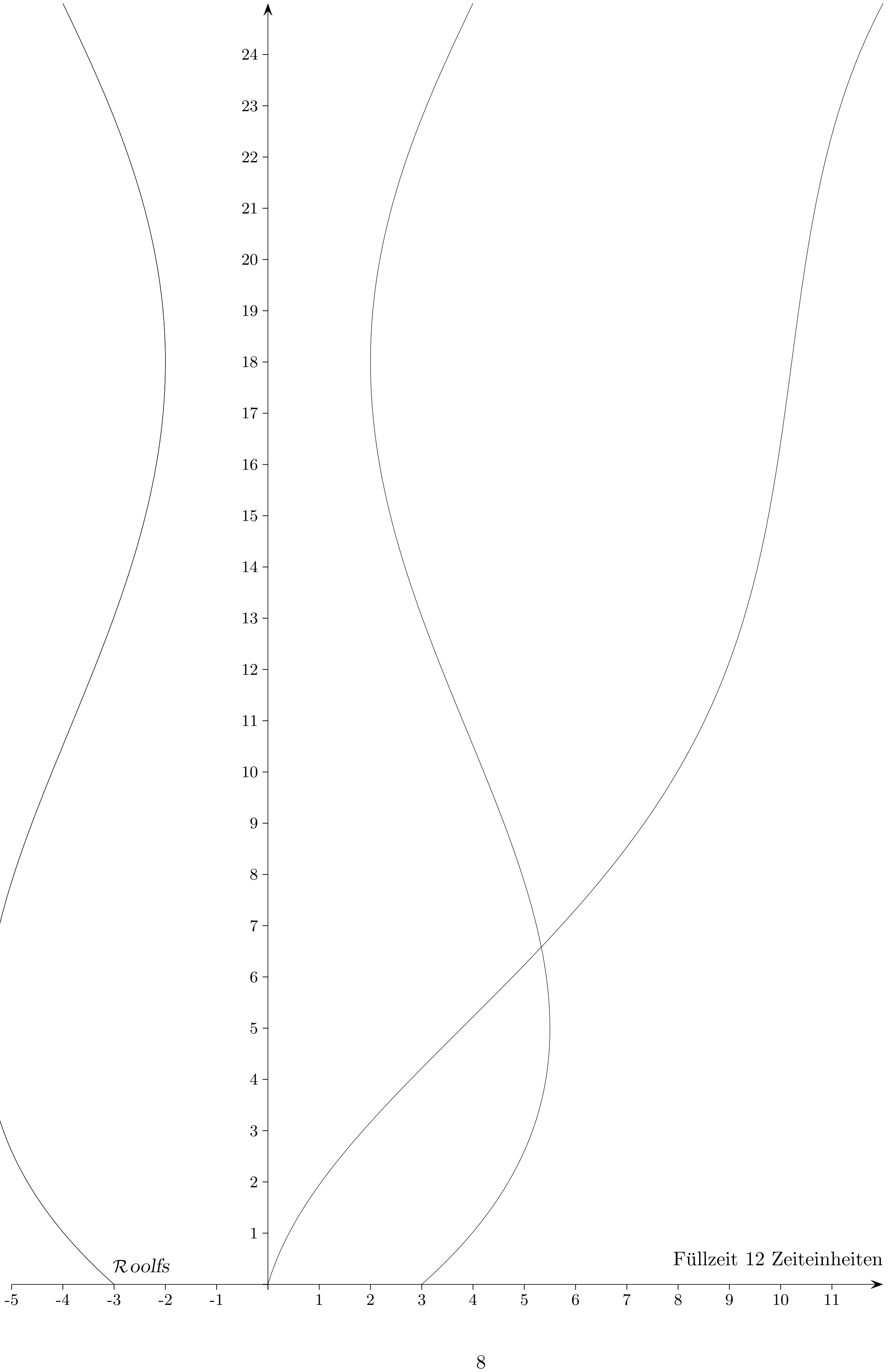


Roolfs
Längen-, bzw. Zeitachse

Füllgraph



$\mathcal{R}oolfs$


Roolfs
Füllzeit 12 Zeiteinheiten