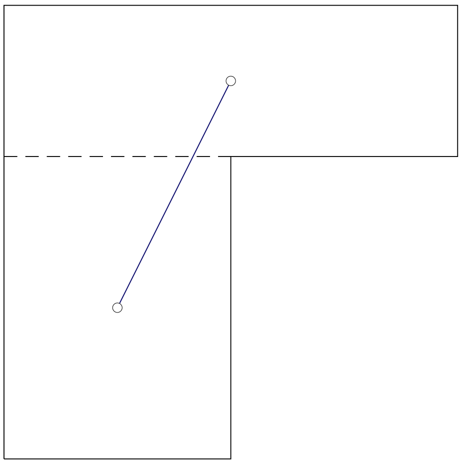
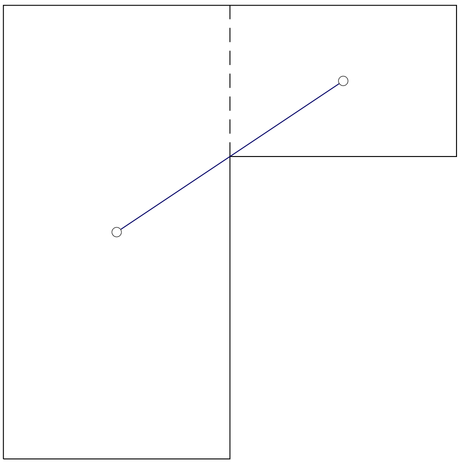
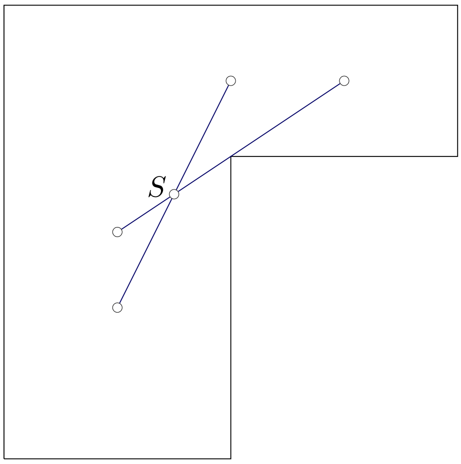
↑ Flächenschwerpunkt grafisch

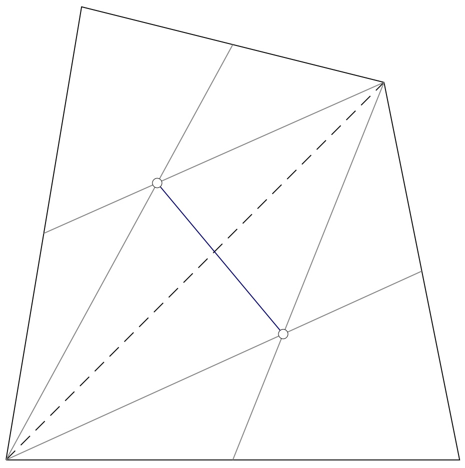


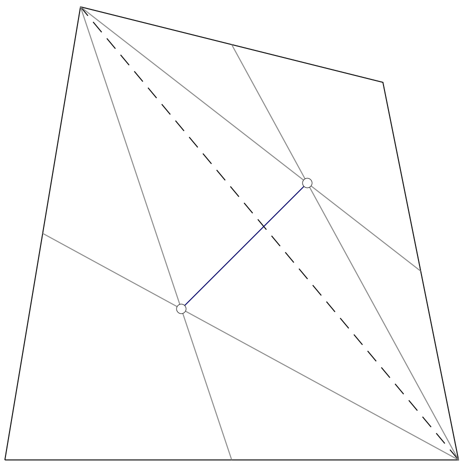


Die Fläche wird jeweils in zwei Teilflächen unterteilt. Von den Teilflächen wird der Schwerpunkt ermittelt. Der Schwerpunkt der gesamten Fläche muss jeweils auf der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der Teilflächen liegen. Der Schnittpunkt der beiden Verbindungsstrecken ist somit die gesuchte Lage des Schwerpunkts S.

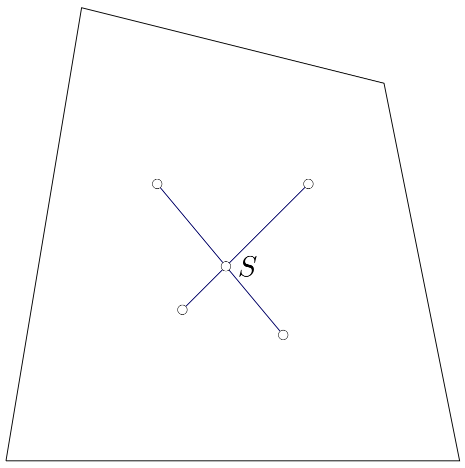


↑ Flächenschwerpunkt grafisch



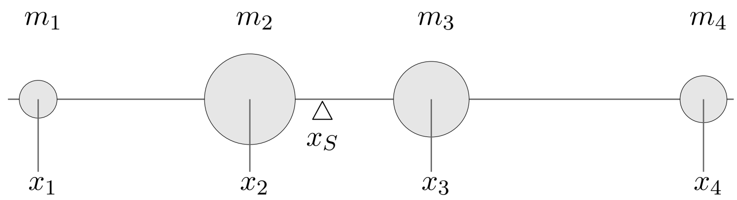


Die Fläche wird jeweils in zwei Teilflächen unterteilt. Von den Teilflächen wird der Schwerpunkt ermittelt. Der Schwerpunkt der gesamten Fläche muss jeweils auf der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der Teilflächen liegen. Der Schnittpunkt der beiden Verbindungsstrecken ist somit die gesuchte Lage des Schwerpunkts S.



↑ Flächenschwerpunkt

Nach dem Hebelgesetz müssen die links- und rechtsdrehenden Momente gleich sein.



$$(x_S - x_1)m_1 + (x_S - x_2)m_2 \;=\; (x_3 - x_S)m_3 + (x_4 - x_S)m_4$$

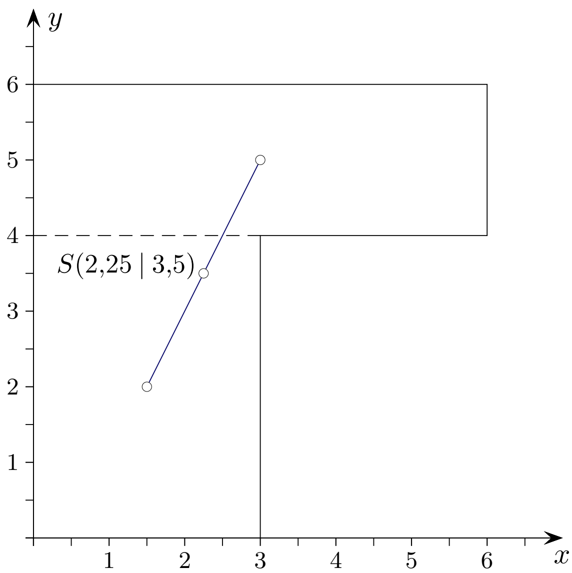
Durch Auflösen nach x_S und unter Berücksichtigung von $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m$ folgt:

$$x_S \;=\; \frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3+x_4m_4}{m}$$

Analoges gilt für die y-Koordinate y_S des Schwerpunkts.

Somit kann der Schwerpunkt aus den Flächen und den Koordinaten der Schwerpunkte der Teilflächen berechnet werden:

$$x_S = \frac{1}{A}\sum x_{S_i}A_i \qquad y_S = \frac{1}{A}\sum y_{S_i}A_i$$

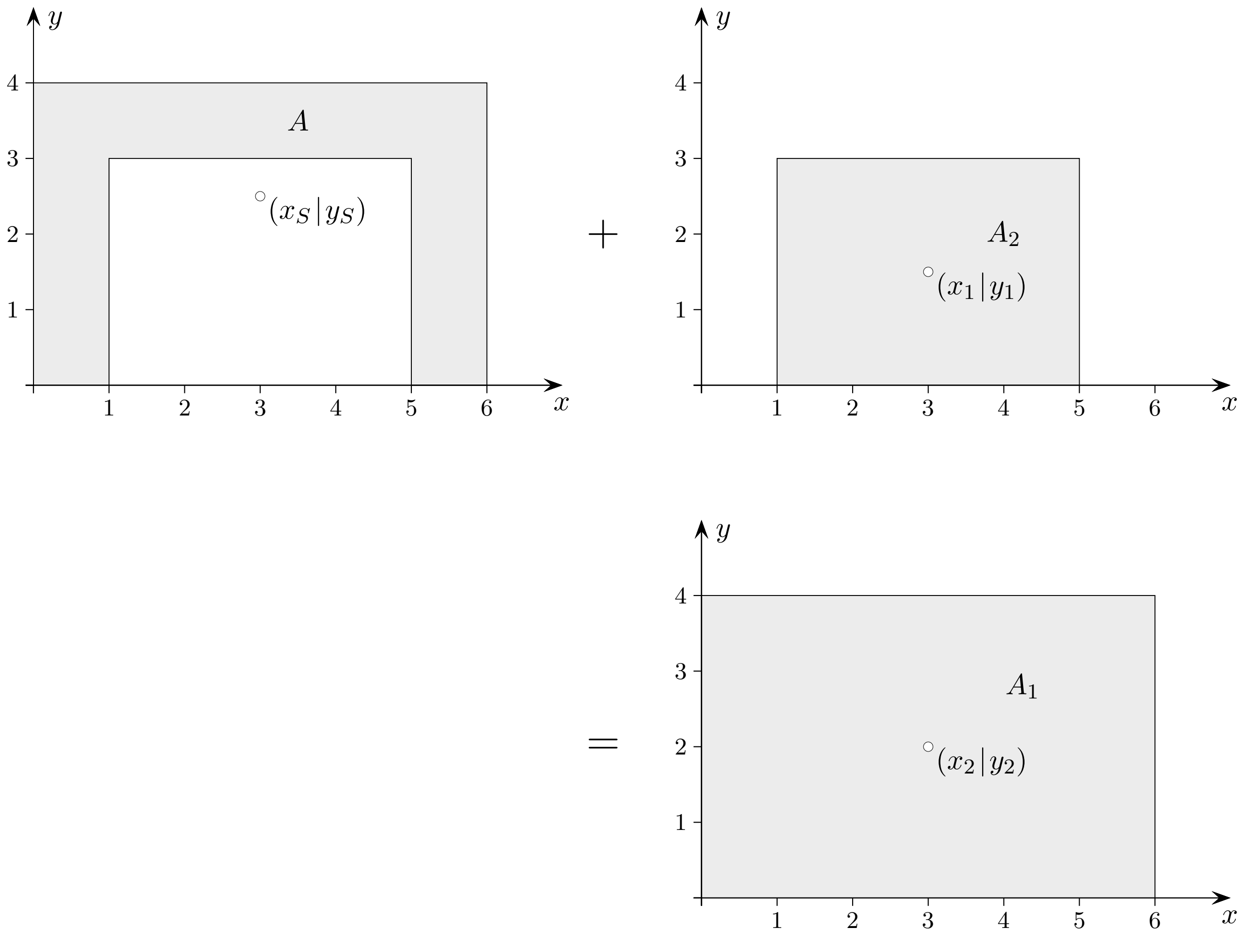


$$x_S \;=\; \frac{1{,}5 \cdot 12 + 3 \cdot 12}{24} = 2{,}25$$

$$y_S \;=\; \frac{2 \cdot 12 + 5 \cdot 12}{24} = 3{,}5$$

Die Schwerpunkte der Teilflächen sind durch Addition zu verknüpfen.

↑ Flächenschwerpunkt Subtraktion

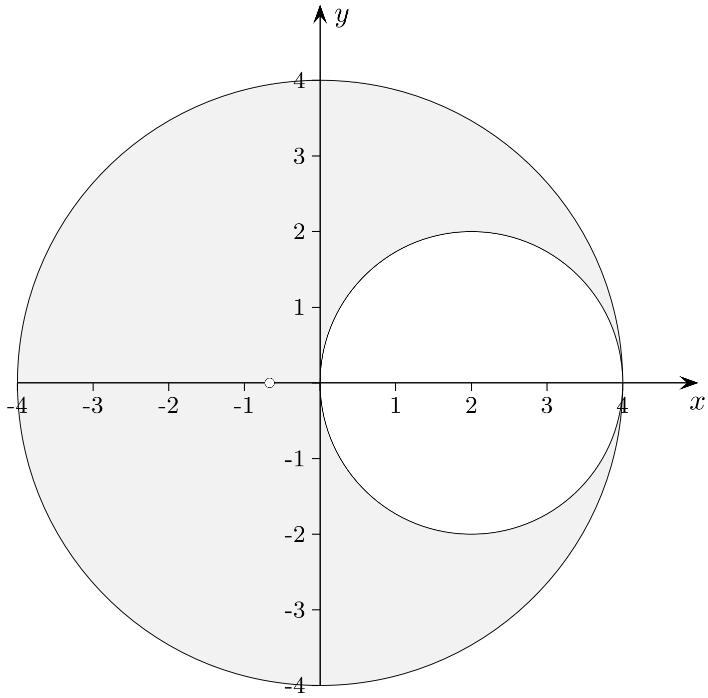


$$
\begin{aligned}
x_S A + x_1 A_2 &= x_2 A_1 \\
y_S A + y_1 A_2 &= y_2 A_1 \qquad \Longrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_S &= \frac{x_2 A_1 - x_1 A_2}{A} = \frac{x_2 A_1 - x_1 A_2}{A_1 - A_2} \\
y_S &= \frac{y_2 A_1 - y_1 A_2}{A} = \frac{y_2 A_1 - y_1 A_2}{A_1 - A_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_S &= \frac{3 \cdot 24 - 3 \cdot 12}{24 - 12} = 3 \qquad \text{ohnehin klar} \\
y_S &= \frac{2 \cdot 24 - 1{,}5 \cdot 12}{24 - 12} = 2{,}5
\end{aligned}
$$

Es ist also der Schwerpunkt der ergänzten Fläche durch Subtraktion mit dem Schwerpunkt der Ergänzung zu verknüpfen.

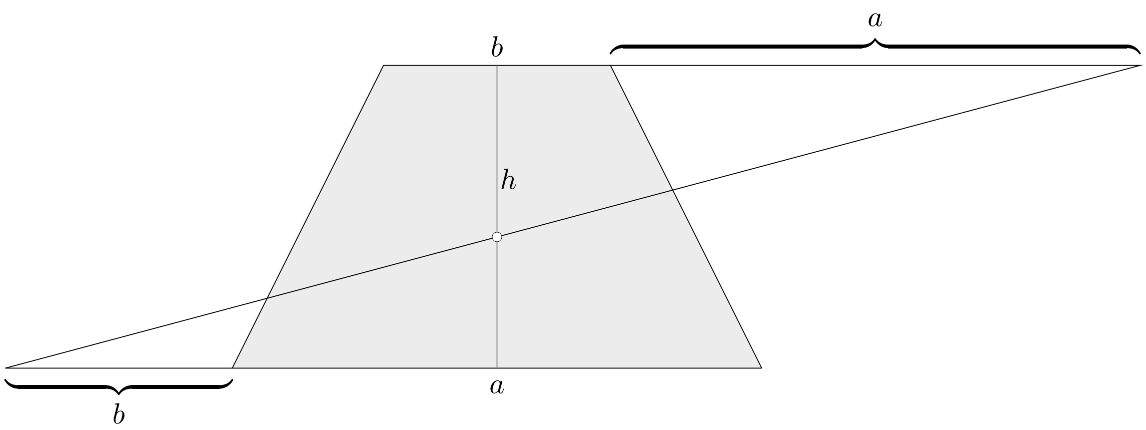


$$y_S = 0$$

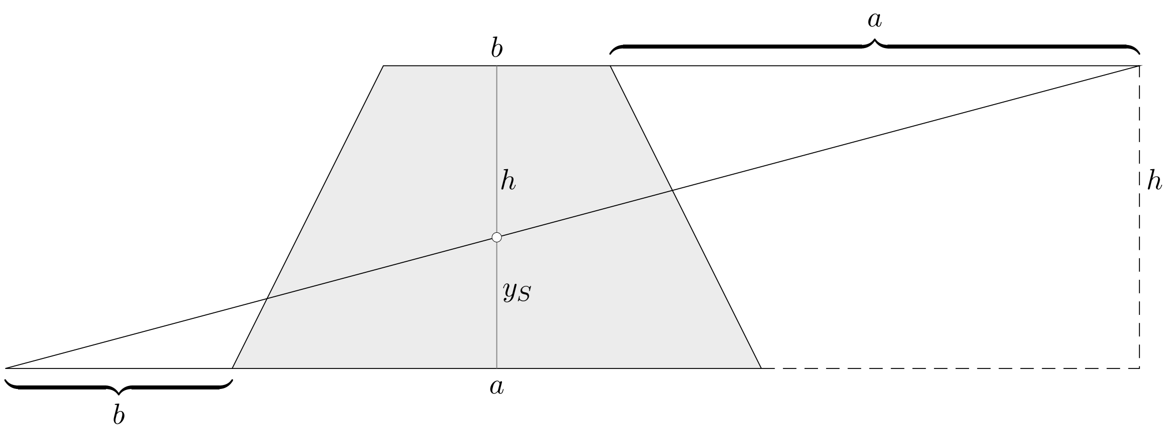
$$x_S = \frac{x_2 A_1 - x_1 A_2}{A} = \frac{x_2 A_1 - x_1 A_2}{A_1 - A_2}$$

$$x_S = \frac{0 \cdot \pi 4^2 - 2 \cdot \pi 2^2}{\pi 4^2 - \pi 2^2} = -\frac{2}{3}$$

↑ Symmetrisches Trapez



Der Schwerpunkt kann grafisch sehr leicht ermittelt werden.
Mit dem Strahlensatz folgt:

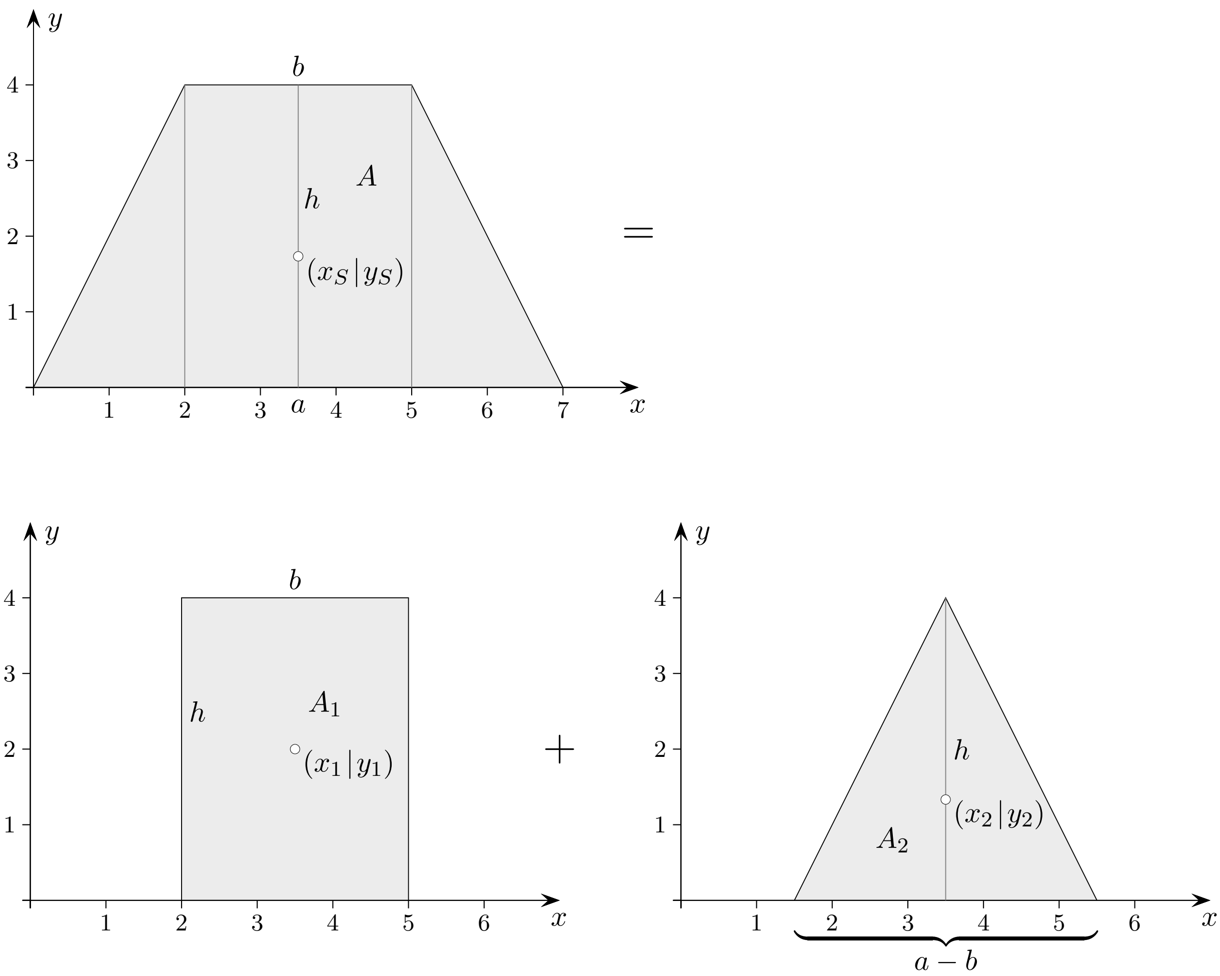


$$\frac{y_S}{h} = \frac{b + \frac{a}{2}}{b + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + a}$$

$$\ldots$$

$$y_S = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2b}{a + b}$$

↑ Symmetrisches Trapez

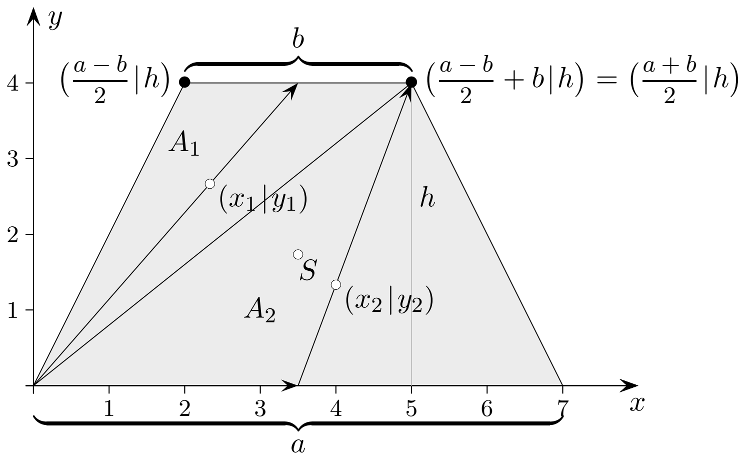


Das Trapez wird so zerlegt, dass der Schwerpunkt erhalten bleibt.
Nur die y-Koordinate y_S muss errechnet werden.

$$
\begin{aligned}
y_S &= \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} \\
&= \frac{\frac{h}{2} bh + \frac{h}{3} \frac{a-b}{2} h}{bh + \frac{a-b}{2} h} \\
&\dots \\
y_S &= \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b} \\
y_S &= \frac{4(7+6)}{3 \cdot 10} = 1{,}733 \qquad x_S = 3{,}5
\end{aligned}
$$

Für den Schwerpunkt des Dreiecks gilt $y_2 = \frac{h}{3}$.

↑ Symmetrisches Trapez   alternative Berechnung



Das Trapez wird in 2 Dreiecke zerlegt. Die Formeln

$$x_S = \frac{x_1A_1 + x_2A_2}{A}, \qquad A = A_1 + A_2$$

$$y_S = \frac{y_1A_1 + y_2A_2}{A}$$

werden mit Vektoren zusammengefasst:

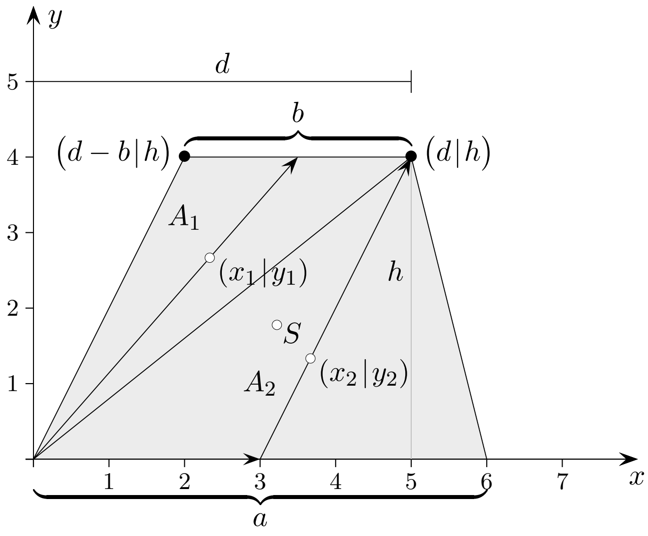
$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \left[A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] \frac{1}{A}$$

$$= \left[\frac{bh}{2}\,\frac{2}{3}\begin{pmatrix} a/2 \\ h \end{pmatrix} + \frac{ah}{2}\left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix} b/2 \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right] \frac{2}{(a+b)h} \qquad \Longrightarrow$$

$$x_S = \frac{a}{2}$$

$$y_S = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}$$

↑ Trapez



Für ein unsymmetrisches Trapez benötigen wir die weitere Größe d.
Das Trapez wird in 2 Dreiecke zerlegt. Die Formeln

$$x_S = \frac{x_1A_1 + x_2A_2}{A}, \qquad A = A_1 + A_2$$
$$y_S = \frac{y_1A_1 + y_2A_2}{A}$$

werden mit Vektoren zusammengefasst:

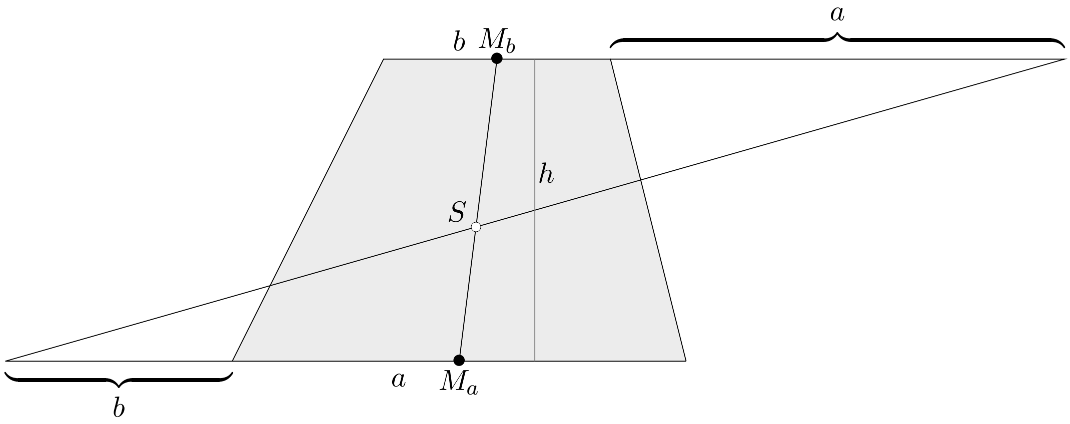
$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \left[A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] \frac{1}{A}$$

$$= \left[\frac{bh}{2}\frac{2}{3}\begin{pmatrix} d-b/2 \\ h \end{pmatrix} + \frac{ah}{2}\left[\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right]\frac{2}{(a+b)h} \qquad \Longrightarrow$$

$$x_S = \frac{a^2 - b^2 + d(a+2b)}{3(a+b)}$$

$$y_S = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$$

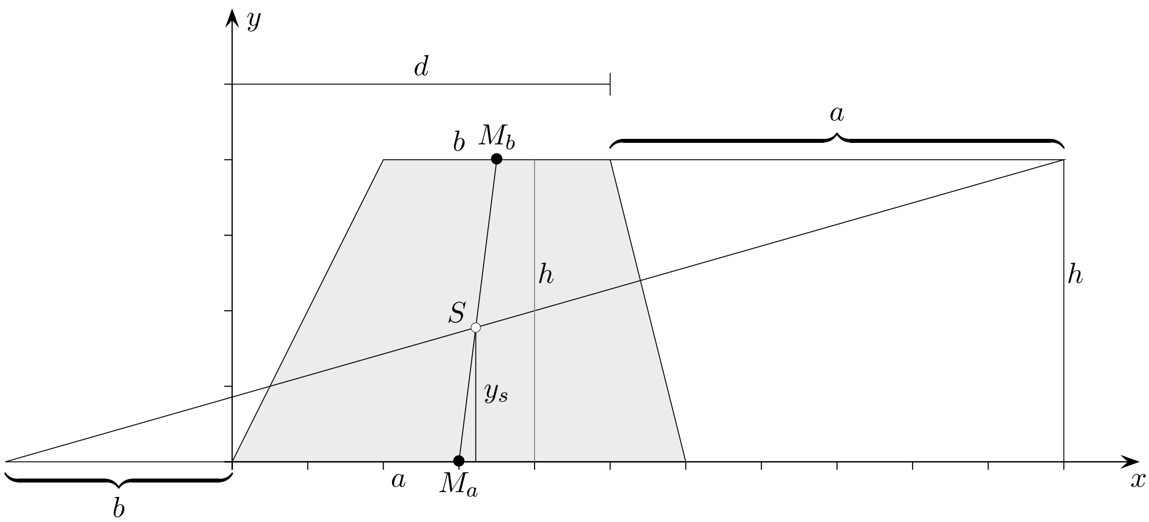
↑ Trapez



Der Schwerpunkt S kann grafisch leicht ermittelt werden.

$$x_S = \frac{a^2 - b^2 + d(a+2b)}{3(a+b)}$$

$$y_S = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$$



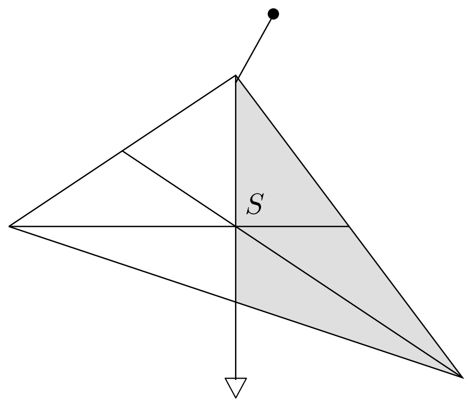
$$\overline{M_aE} = d - \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = d - \frac{a+b}{2}$$

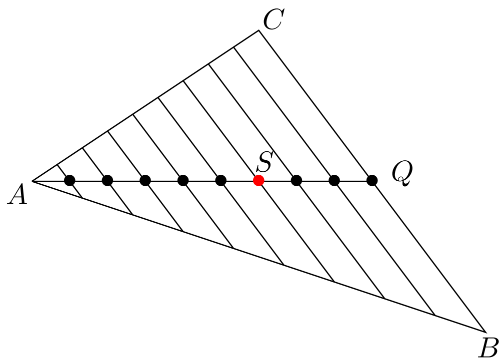
$S(x_S|y_S)$ liegt auf der Geraden durch M_a und M_b: $y = \frac{h}{\overline{M_aE}}(x - \frac{a}{2})$ (einsetzen und umformen)

Weiter gilt: $\frac{h}{b+d+a} = \frac{y_s}{x_s+b}$. (einsetzen und umformen)

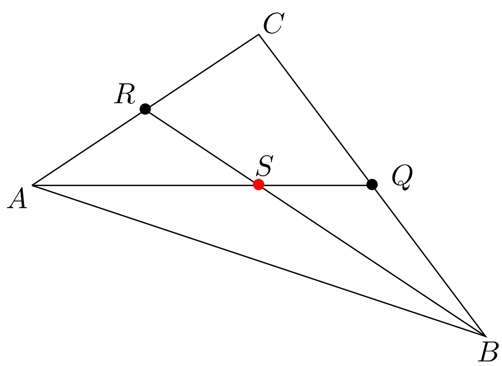
Das grafische Verfahren ist somit begründet.

↑ Zur Erinnerung Schwerpunkt eines Dreiecks

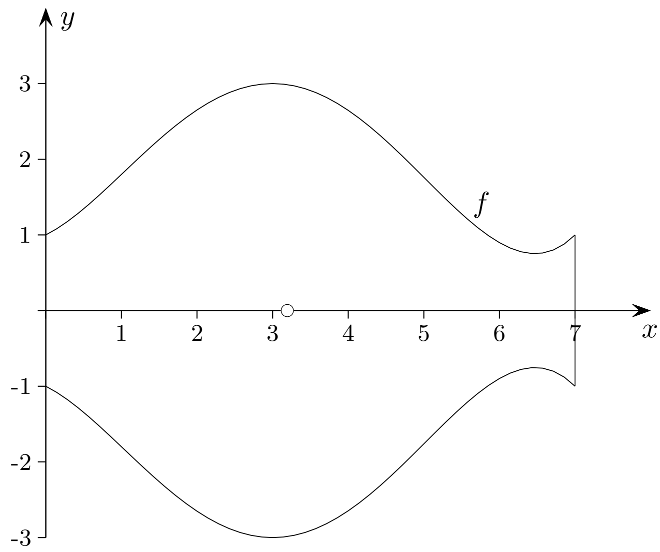


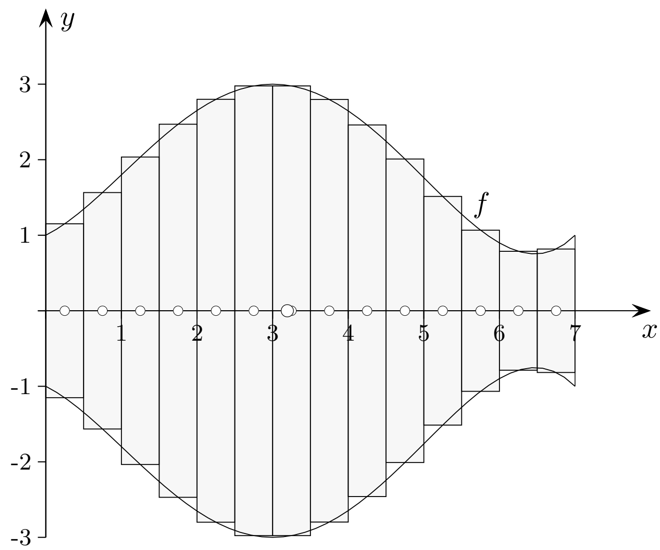


Q ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$.
S teilt die Strecke $\overline{AQ}$ im Verhältnis $2:1$, d. h. $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AQ}$.



↑ Krummliniges



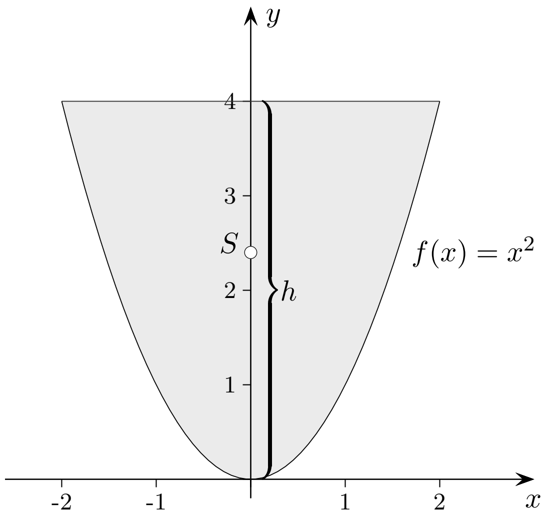


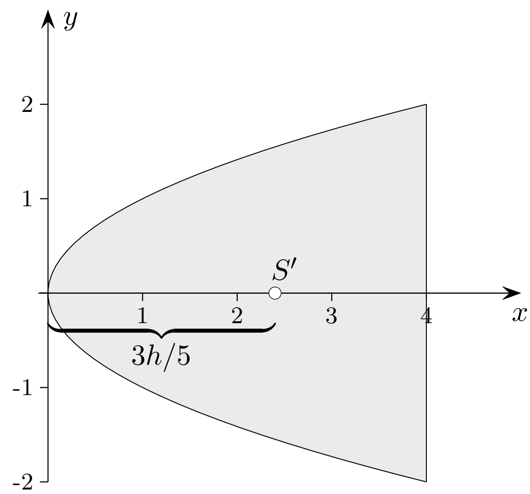
Um den Schwerpunkt einer zur x-Achse symmetrischen Figur zu ermitteln, denken wir uns eine hinreichend feine Unterteilung in Rechtecke.

Dann sollte $$x_S = \frac{\int\limits_a^b 2xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b 2f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

unmittelbar einleuchtend sein.

↑ Parabel Schwerpunkt





$$x_{S'} = \frac{\int\limits_0^h x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\int\limits_0^h \sqrt{x}\,\mathrm{d}x} = \ldots = \frac{3h}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

<u>alternativ ohne Umkehrfunktion</u>

Für f und g (begrenzende obere und untere Funktion) lautet y_S, siehe nächste Seite:

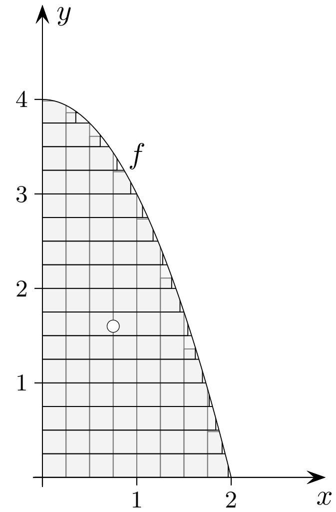
$$y_S = \frac{1}{2A}\int\limits_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2A}\int\limits_{-2}^2 \left[4^2 - (x^2)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$A = 2\left[8 - \int\limits_0^2 x^2\,\mathrm{d}x\right] = \frac{32}{3}$$

$$y_S = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

↑ Schwerpunkt



Für den Schwerpunkt einer Fläche mit dem Inhalt A gilt allgemein:

$$x_S \;=\; \frac{1}{A}\iint\limits_A x\,\mathrm{d}A \qquad\qquad \text{diskret} \quad x_S = \frac{1}{A}\sum_i x_i A_i$$

$$y_S \;=\; \frac{1}{A}\iint\limits_A y\,\mathrm{d}A \qquad\qquad\qquad\quad y_S = \frac{1}{A}\sum_i y_i A_i$$

$$A = \sum_i A_i$$

Falls die Fläche durch eine obere Funktion f und eine untere Funktion g begrenzt wird, ergibt das:

$$x_S \;=\; \frac{1}{A}\int\limits_a^b \Big[\int\limits_{g(x)}^{f(x)} x\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\int\limits_a^b \Big[x\int\limits_{g(x)}^{f(x)} \mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\int\limits_a^b x\Big[f(x)-g(x)\Big]\mathrm{d}x$$

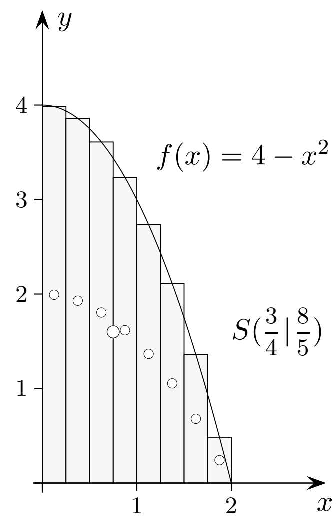
$$y_S \;=\; \frac{1}{A}\int\limits_a^b \Big[\int\limits_{g(x)}^{f(x)} y\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\int\limits_a^b \Big[\big(f(x)\big)^2-\big(g(x)\big)^2\Big]\mathrm{d}x, \qquad \text{beachte:} \int y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2 + C$$

Unmittelbar einsichtig für $g(x) = 0$:

$$x_S \;=\; \frac{1}{A}\int\limits_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

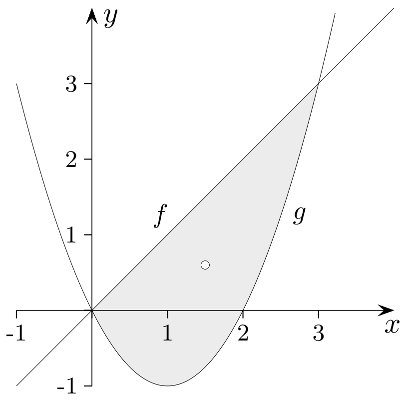
$$y_S \;=\; \frac{1}{2A}\int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\int\limits_a^b \frac{1}{2}f(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ein infinitesimales Rechteck hat den Inhalt $f(x)\,\mathrm{d}x$.
Für y_S ist zu bedenken, dass der Schwerpunkt des Rechtecks jeweils auf der Höhe $\frac{1}{2}f(x)$ liegt.



↑ Fläche zwischen zwei Graphen Schwerpunkt

$f(x) = x$
$g(x) = x^2 - 2x$

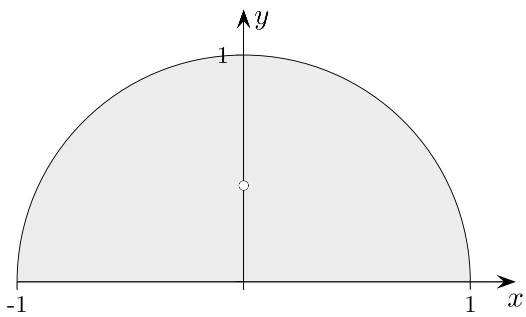


$$A = \int_0^3 (x - (x^2 - 2x))\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \ldots = \frac{9}{2}$$

$$x_S = \frac{1}{A}\int\limits_a^b x\Big[f(x) - g(x)\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\int\limits_0^3 \Big[-x^3 + 3x^2\Big]\mathrm{d}x = \ldots = \frac{3}{2}$$

$$y_S = \frac{1}{2A}\int\limits_a^b \Big[\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\Big]\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\int\limits_0^3 \Big[-x^4 + 4x^3 - 3x^2\Big]\mathrm{d}x = \ldots = \frac{3}{5}$$

↑ Schwerpunkt des Halbkreises



$$x_S = 0 \qquad \text{Symmetrie}$$

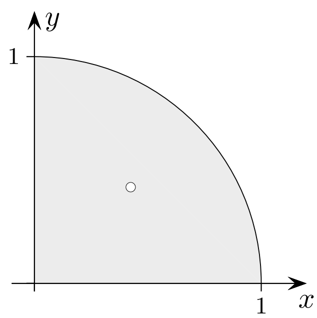
$$y_S = \frac{1}{2A}\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{beachte} \quad x^2+y^2=1$$

$$= \ldots = \frac{4}{3\pi}$$

Für einen Radius r erhalten wir durch Streckung $y_S = \frac{4}{3\pi}r$.

↑ Schwerpunkt des Viertelkreises



$$x_S = y_S \qquad \text{Symmetrie}$$

$$y_S = \frac{1}{2A}\int_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \ldots = \frac{4}{3\pi}$$

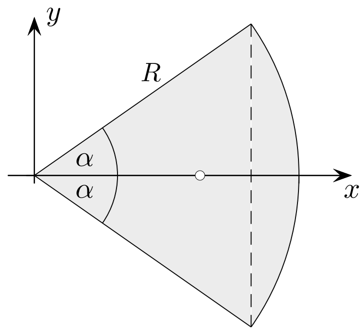
Für einen Radius r erhalten wir durch Streckung $y_S = \frac{4}{3\pi}r$.

Die Rechnung ist nicht erforderlich. Für einen Halbkreis mit $r = 1$ liegt der Schwerpunkt auf der Geraden $y = \frac{4}{3\pi}$. Da sich der Halbkreis aus zwei Viertelkreisen zusammensetzt, liegt der Schwerpunkt des Viertelkreises auch auf dieser Geraden. Aus Symmetriegründen ist dann $x_S = y_S$.

↑ Kreissektor (Kreisausschnitt)

$$y_S = 0 \qquad \text{Symmetrie}$$

$$x_S = \frac{2\,R}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$



Die Berechnung erfolgt mit Polarkoordinaten. Aus

$$x_S = \frac{1}{A}\iint\limits_A x\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$y_S = \frac{1}{A}\iint\limits_A y\;\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{wird}$$

$$x_S = \frac{1}{A}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1}\Big[\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}\varphi \qquad x = r\cos\varphi \;\text{ und Volumenelement }\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \;\text{ eingesetzt}$$

$$y_S = \frac{1}{A}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1}\Big[\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Kreissektor (Kreisausschnitt)

$$x_S = \frac{1}{A}\int\limits_0^{\alpha}\Big[\int\limits_0^{R} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}\varphi, \qquad A = \frac{\alpha R^2}{2}, \quad \text{obere Hälfte}$$

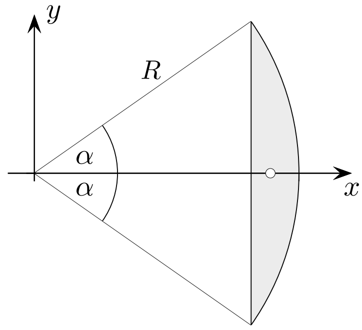
$$= \frac{1}{A}\int\limits_0^{\alpha}\Big[\cos\varphi\int\limits_0^{R} r^2\,\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}\varphi$$

$$x_S = \ldots = \frac{2\,R}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

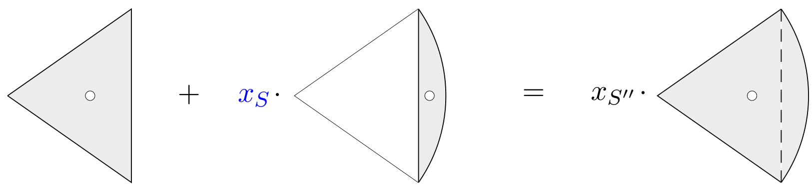
↑ Kreissegment (Kreisabschnitt)

$$y_S = 0 \qquad \text{Symmetrie}$$

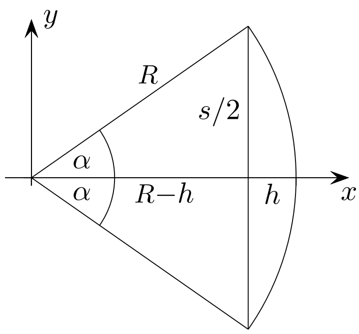
$$x_S = \frac{4}{3}\,\frac{R\big(\sin(\alpha)\big)^3}{2\alpha - \sin(2\alpha)}$$



Es besteht der Zusammenhang zwischen den x-Koordinaten der Schwerpunkte und den Flächeninhalten:

$x_{S'}\cdot$  $+\ x_S\cdot$ $=\ x_{S''}\cdot$

Mit den Bezeichnungen



ergibt das:

$$\frac{2}{3}(R-h)\,\frac{s}{2}(R-h) + x_S\cdot\Big(\alpha R^2 - \frac{s}{2}(R-h)\Big) \;=\; \frac{2R}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\alpha R^2$$

Mit
$$R = 1$$
$$h = 1-\cos(\alpha)$$
$$s = 2\sin(\alpha)$$

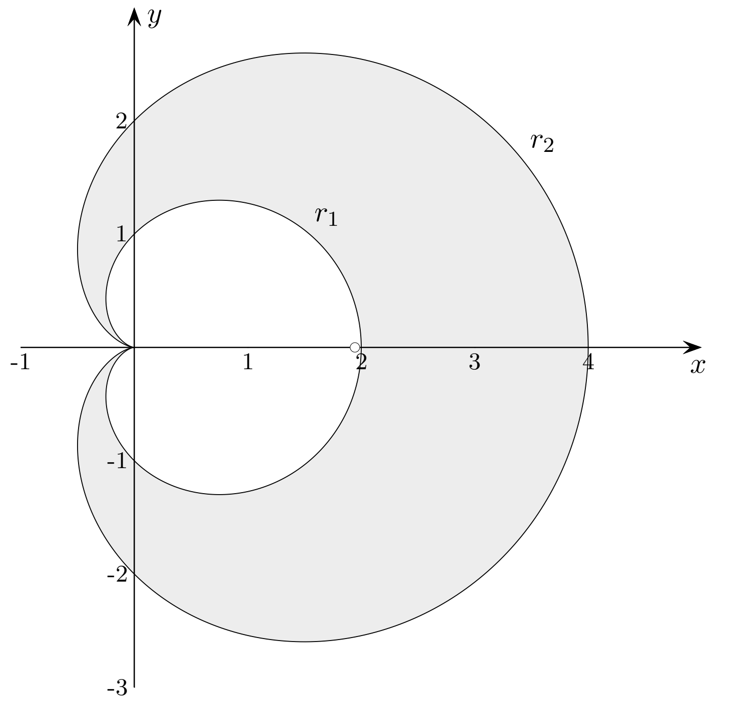
gelangt man zu

$$x_S = \frac{2}{3}\,\frac{\sin(\alpha)\big(\cos^2(\alpha)-1\big)}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)-\alpha}$$

und mit den trig. Umformungen $\sin^2(x) = 1-\cos^2(\alpha)$, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ und einer Streckung mit R zum Ergebnis x_S.

↑ Schwerpunkt, Kardioide

$$r_1(\varphi) \;=\; 1 + \cos\varphi$$
$$r_2(\varphi) \;=\; 2(1 + \cos\varphi)$$



$$x_S \;=\; \frac{1}{A}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Big[\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}\varphi$$

$$\;=\; \frac{1}{A_2 - A_1}\int\limits_{0}^{2\pi}\Big[\cos\varphi\int\limits_{1+\cos\varphi}^{2(1+\cos\varphi)} r^2\,\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}\varphi$$

$$x_S \;=\; \ldots\mathrm{CAS}\ldots = \frac{35}{18}$$

$$A_1 \;=\; \int\limits_{0}^{2\pi}\Big[\int\limits_{0}^{1+\cos\varphi} r\,\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2}\pi$$

$$A_2 \;=\; \int\limits_{0}^{2\pi}\Big[\int\limits_{0}^{2(1+\cos\varphi)} r\,\mathrm{d}r\Big]\mathrm{d}\varphi = 6\pi$$

beachte: $r_2 = 2r_1 \implies A_2 = 4A_1$

Maple

```
f:=r^2*cos(phi);
I1:=int(f,r=1+cos(phi)..2*(1+cos(phi)));
I2:=int(I1,phi=0..2*pi);
A:=6*pi-3/2*pi;
x_S:=I2/A;
```

↑
Schwerpunkt eines Dreiecks
vektoriell
Schwerpunkt
Startseite