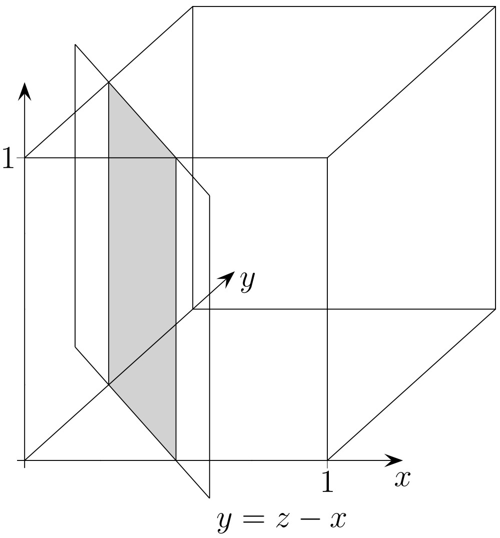
Summe von Zufallsvariablen

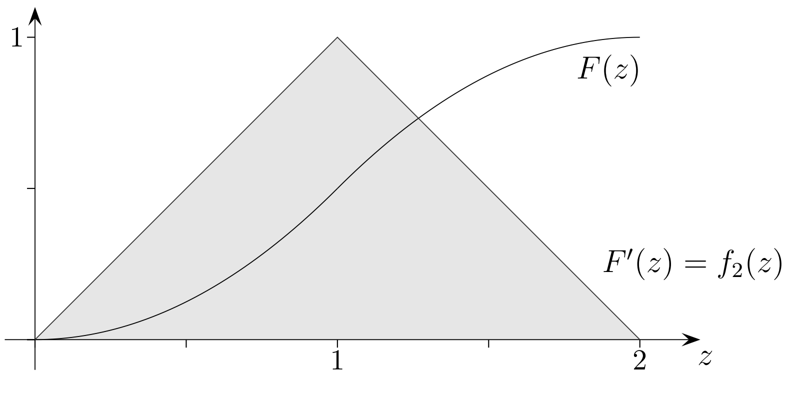
Gegeben sind die unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x)$ und $g(x)$.

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeiten $P(X + Y \le z)$.

Für ihre Berechnung ist das Volumen des von der Ebene abgeschnittenen Teilkörpers in Abhängigkeit von z zu bestimmen.
Das Ergebnis, die Verteilungsfunktion $F(z)$, sowie deren Ableitung, die Wahrscheinlichkeitsdichte, sind dargestellt.
Die Funktionsterme sind einfach zu ermitteln.





$$F(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{für} \quad 0 \le z \le 1 \\ 1 - \frac{(z-2)^2}{2} & 1 \le z \le 2 \end{cases}$$

$$f_2(z) = \begin{cases} z & \text{für} \quad 0 \le z \le 1 \\ 2 - z & 1 \le z \le 2 \end{cases}$$

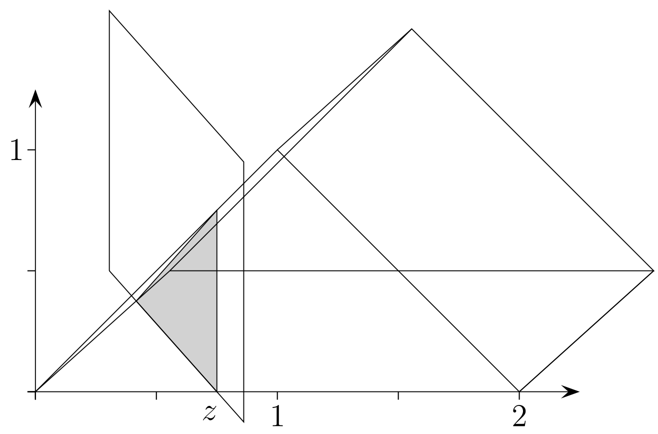
Die Summenbildung führt zu einer Glättung der beteiligten Funktionen.
Die Dichte von $X + Y$ ist stetig. Es kann erwartet werden, dass die Dichte von $X + Y + Z$ dreier gleichverteilter Zufallsvariablen differenzierbar ist.

Summe dreier Zufallsvariablen

Zu den vorigen Zufallsvariablen X und Y nehmen wir noch eine dritte unabhängige Zufallsvariable Z mit derselben Wahrscheinlichkeitsdichte $h(x)$ hinzu.
.

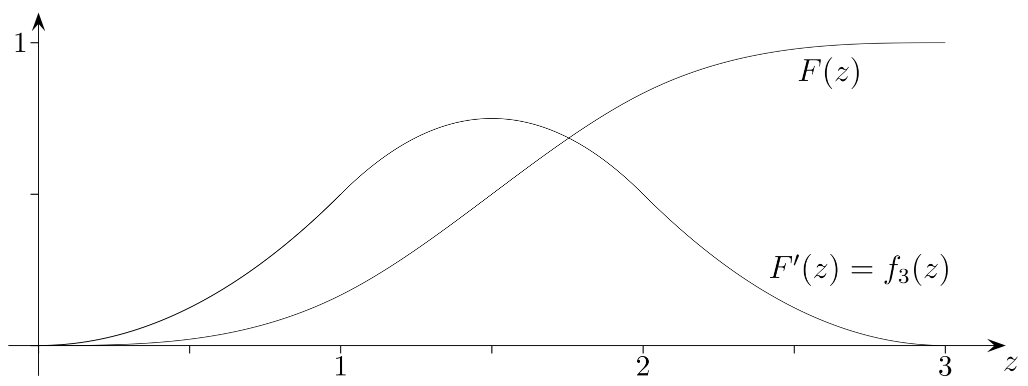
$$f(x) = g(x) = h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir ermitteln nun die Wahrscheinlichkeiten $P(X + Y + Z \le z)$, hierbei können wir die Dichte der Wahrscheinlichkeiten $P(X + Y \le z)$ verwenden.



Für die Berechnung ist wieder (diesmal jedoch etwas mühsam) das Volumen des von der Ebene abgeschnittenen Teilkörpers in Abhängigkeit von z zu bestimmen.
Die Verteilungsfunktion $F(z)$ lautet (auf den wesentlichen Intervallen):

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3}{6} & \text{für} \quad 0 \le z \le 1 \\ \dfrac{1}{6} + \dfrac{(z-1)^2}{2} \cdot (2 - z) + \dfrac{(z-1)^3}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{(2-z)^2}{2} \cdot (z - 1) - \dfrac{(2-z)^3}{3} & 1 \le z \le 2 \\ 1 - \dfrac{(3-z)^3}{6} & 2 \le z \le 3 \end{cases}$$



Unabhängige Zufallsvariable

Seien X und Y stetige unabhängige Zufallsvariable (≥ 0) mit den Dichten f_X und f_Y. Dann ist:

$$P(X \in dx, Y \in dy) = P(X \in dx) \cdot P(Y \in dy) = f_X dx \cdot f_Y dy = f_X\, f_Y \cdot dx\, dy$$

$$\Longrightarrow \quad P(X \in A, Y \in B) = \int_{A \times B} f_X(x) \cdot f_Y(y)\ dx\, dy$$

Faltung

Betrachten wir die Summe zweier diskreter unabhängiger Zufallsvariablen X und Y, die die Werte 0, 1, 2, … annehmen können,

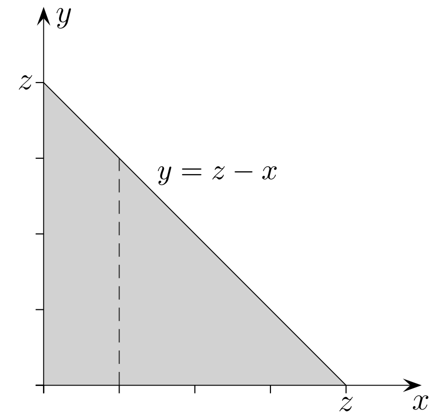
dann ist z.B. $$P(X+Y=5) = \sum_{k=0}^{5} P(X=k)\cdot P(Y=5-k)$$

und allgemeiner: $$P(X+Y\in[a,\,b\,]) = \sum_{n\in[a,\,b\,]} \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot P(Y=n-k)$$

Seien nun X und Y stetige unabhängige Zufallsvariable (≥ 0) mit den Dichten f_X und f_Y. Dann ist:

$$P(X\in A, Y\in B) = \int_A f_X(x)\;dx\cdot\int_B f_Y(y)\;dy = \int_{A\times B} f_X(x)\cdot f_Y(y)\;dx\,dy \qquad \text{und}$$

$$P(X+Y\leq z) = \int_0^z\int_0^{z-x} f_X(x)\cdot f_Y(y)\;dy\,dx$$

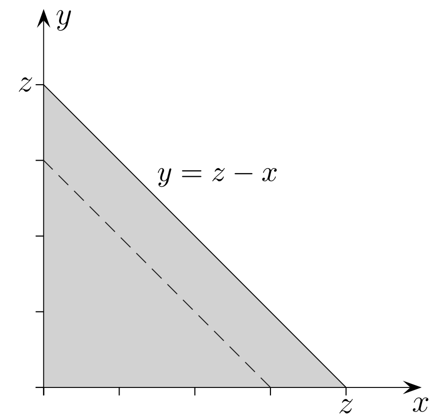


In diesem Volumenintegral werden die Querschnittsflächen (längs der gestrichelten Linie)

$$Q(x) = \int_0^{z-x} f_X(x)\cdot f_Y(y)\;dy$$

nach x integriert.

Um die Dichte zu erhalten, betrachten wir die Querschnittsflächen, die parallel zur Geraden $y=z-x$ verlaufen und führen eine Scherung parallel zur x-Achse durch. Integrieren wir nun diese (einfach begrenzten) Querschnitte, so erhalten wir:



$$P(X+Y\leq z) = \int_0^z\int_0^t f_X(t-u)\cdot f_Y(u)\;du\,dt$$

Es liegt also die Tranformation

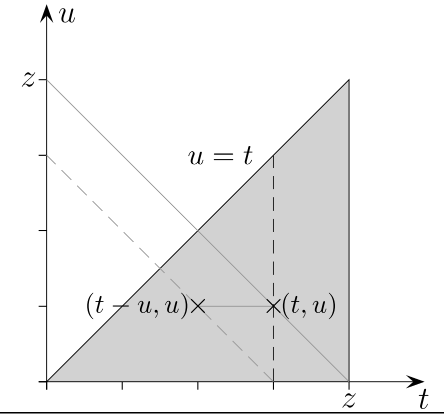
$$(t,u) \quad\longrightarrow\quad (t-u,u)=(x,y)$$

vor.

$$f_{X+Y}\,(t) = \int_0^t f_X(t-u)\cdot f_Y(u)\,du$$

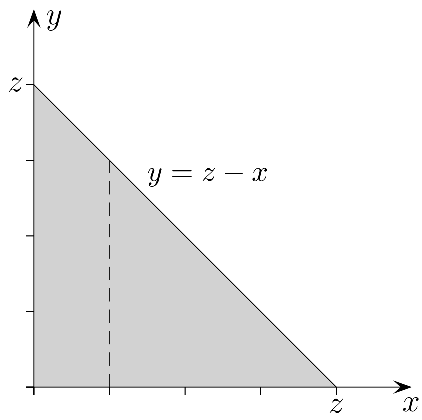
f_{X+Y} heißt Faltung von f_X und f_Y.

Die Analogie zum diskreten Fall ist offensichtlich.



Faltung

$$P(X+Y \leq z) = \int_0^z \int_0^{z-x} f_X(x) \cdot f_Y(y)\ dy\,dx$$

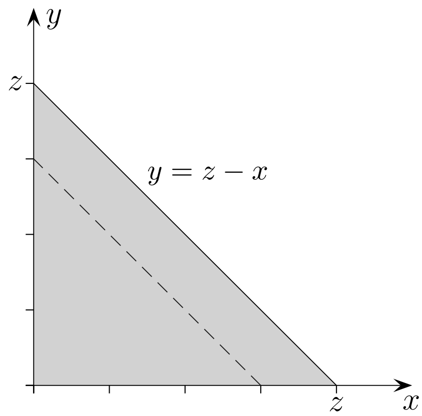


In diesem Volumenintegral werden die Querschnittsflächen (längs der gestrichelten Linie)

$$Q(x) = \int_0^{z-x} f_X(x) \cdot f_Y(y)\ dy$$

nach x integriert.

Um die Dichte zu erhalten, betrachten wir die Querschnittsflächen, die parallel zur Geraden $y = z - x$ verlaufen und führen eine Scherung parallel zur y-Achse durch. Integrieren wir nun diese (einfach begrenzten) Querschnitte, so erhalten wir:



$$P(X+Y \leq z) = \int_0^z \int_0^u f_X(t) \cdot f_Y(u-t)\ dt\,du$$

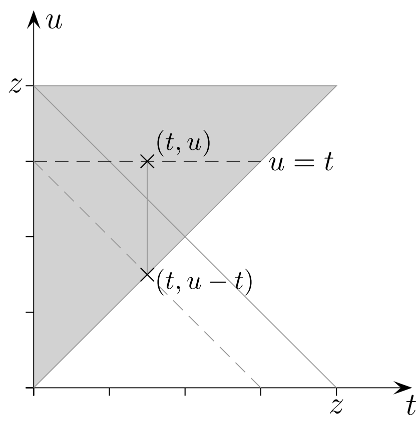
Es liegt also die Tranformation

$$(t, u) \quad \longrightarrow \quad (t, u-t) = (x, y)$$

vor.

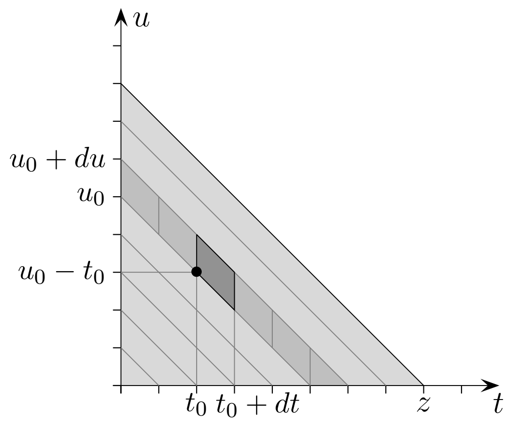
$$f_{X+Y}\,(u) = \int_0^u f_X(t) \cdot f_Y(u-t)\ dt$$

f_{X+Y} heißt Faltung von f_X und f_Y.



Letztlich wurden lediglich X und Y vertauscht.

Faltung verkürzte Darstellung



Der Grafik kann die Berechnung der Verteilung

$$P(X+Y \leq z) = \int_0^z \int_0^u f_X(t) \cdot f_Y(u-t)\ dt\, du$$

unmittelbar entnommen werden.

Zu beachten ist:

$$P((X,Y) \in \text{Parallelogramm}) = f_X(t) \cdot f_Y(u-t)\, dt\, du$$

Zuerst werden die infinitesimalen Volumenelemente zu jeweils festem u_0 und den Grundflächen mit $A_{\text{Parallelogramm}} = dt\, du$, die auf der Schrägen $u = u_0 - t$ liegen, addiert (Integration nach t von 0 bis u).
Anschließend werden diese Volumenscheiben zusammengefasst (Integration nach u von 0 bis z).

$$f_{X+Y}\,(u) = \int_0^u f_X(t) \cdot f_Y(u-t)\, dt$$

f_{X+Y} ist die Dichte von $X+Y$.

Exponentialverteilung

Für manche (gedächtnislosen) Bauteile ist die Annahme sinnvoll, dass zu jedem Zeitpunkt die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil noch weitere n Zeiteinheiten funktioniert, unabhängig ist von der Dauer, wie lange es bereits eingesetzt war. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Exponentialverteilung der Lebensdauer. Die Verteilungsfunktion besitzt die Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit dem Parameter λ gilt:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Für die kumulative Verteilungsfunktion von X ergibt sich:

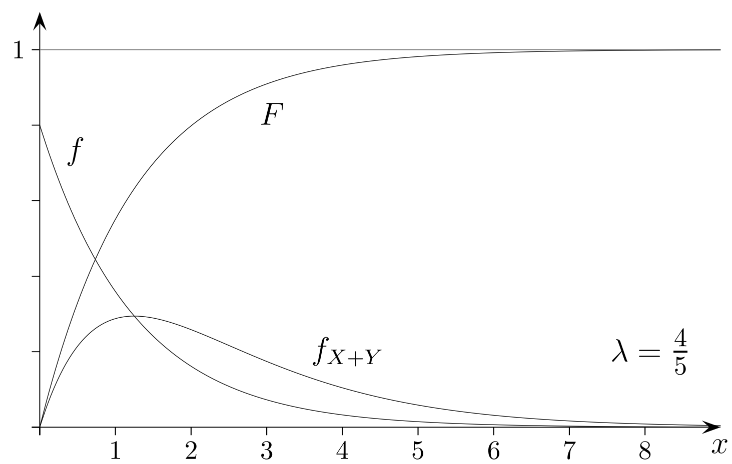
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Somit folgt

$$P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$$

Aus Sicherheitsgründen werde einem System eine identische, unabhängige Kopie eingebaut, so dass das System so lange funktioniert, so lange einer der beiden Bauteile funktionstüchtig ist. Die gesamte Lebensdauer des Systems ist somit die Summe der Zufallsvariablen.

$$f_{X+Y}(x) = \int_0^x f_X(u) \cdot f_Y(x-u)\;du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(x-u)}\,du = \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda x}\;du = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$



Für $n = 3$ erhalten wir die Dichte (einfache Rechnung):

$$f_{X+Y+Z}(x) = \int_0^x f_{X+Y}(u) \cdot f_Z(x-u)\,du = \ldots = \frac{\lambda^3 \cdot x^2}{2}\,e^{-\lambda x}$$

und dann allgemein:

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n \cdot x^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\lambda x} \qquad \text{(Erlang-Verteilung)}$$