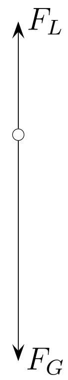
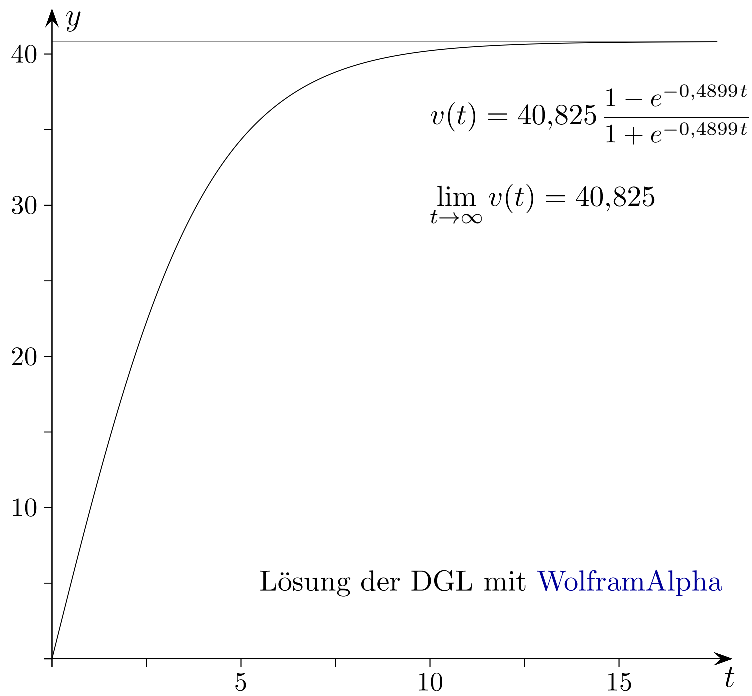
Fallschirmspringen[1]



Die Kräfte, die bei einem vertikalen Fallschirmsprung vor und nach dem Öffnen des Fallschirms wirken, sind die Schwer- oder Gewichtskraft F_G und die Luftwiderstandskraft F_L. Die Gesamtkraft F ist die Summe von F_G und F_L. $F_G = mg$, $g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ bezeichnet die Erdbeschleunigung. Die Luftwiderstandskraft F_L ist eine Funktion der Geschwindigkeit v (halte z. B. die Hand aus einem fahrenden Auto). Die math. einfachste Annahme ist, dass F_L proportional zu v ist: $F_L = -kv$. F_L wirkt entgegen der Bewegungsrichtung. Angemessener ist eine quadratische Annahme: $F_L = -kv^2$. Vor dem Öffnen des Fallschirms wäre $k_{\mathrm{vor}} = 0{,}48\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$ für $m = 80\,\mathrm{kg}$ möglich, nach dem Öffnen $k_{\mathrm{nach}} = 33\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$. Der Wert von k steigt also auf mehr als das Sechzigfache an. Zur Zeit t gilt somit:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= mg - k[v(t)]^2 && \\
ma(t) &= mg - k[v(t)]^2 && \text{Grundgesetz der Mechanik (Zusammenhang von Kraft und Bewegung)} \\
\dot{v}(t) &= g - \frac{k}{m}[v(t)]^2 && \text{Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit, } a(t) = \dot{v}(t) \\
\dot{v}(t) &= 10 - 0{,}006\,[v(t)]^2 && \text{vor dem Öffnen des Fallschirms mit } k_{\mathrm{vor}} \text{ und } v(0) = 0
\end{aligned}
$$

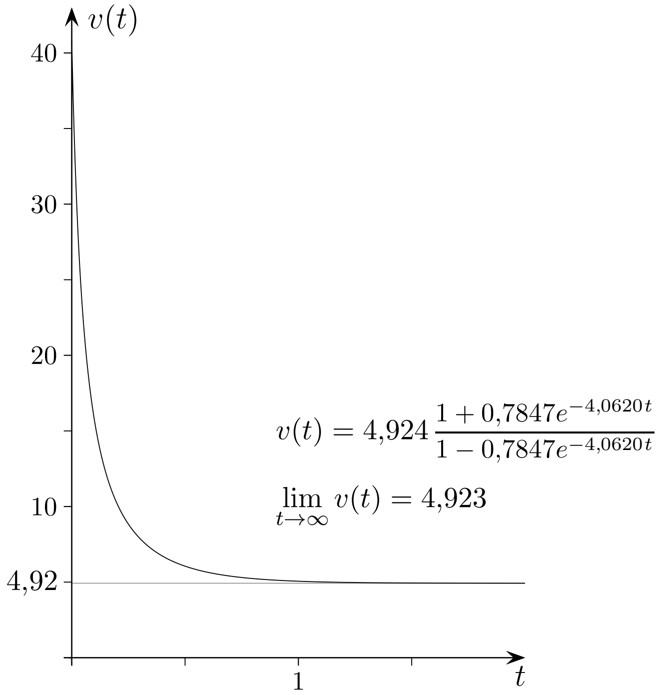


$$
\begin{aligned}
0 &= mg - k[v_\infty]^2 \\
v_\infty &\approx 40{,}82
\end{aligned}
$$

F_G und F_L sind betragsmäßig gleich groß.

[1] Als Vorlage diente Die Fallschirmspringerin.

Nehmen wir zunächst an, dass die Zeitdauer, in der sich der Fallschirm öffnet, vernachlässigbar sei. Der Fallschirm öffne sich also schlagartig. Der Widerstandskoeffizient springt von k_{vor} zu k_{nach}. Die DGL lautet nun $\dot{v}(t) = 10 - 0{,}4125[v(t)]^2$, Anfangsbedingung $v(0) = v_\infty$.



Die Gleichgewichtslösung der Differentialgleichung erhält man allgemein mit dem Ansatz $v(t) = c$.

$$\begin{aligned} 0 &= g - \frac{k}{m}c^2 \\ &\dots \\ c &= \sqrt{\frac{mg}{k}} \end{aligned}$$

Die sanfte Landung erfolgt mit einer Geschwindigkeit von $c = 4{,}92\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mit einem Sprung von einer ca. 1,20 m hohen Mauer landet man auf dem Boden mit der gleichen Geschwindigkeit.

Denn für den freien Fall gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} v(t) &= gt && \text{Fallgeschwindigkeit} \\ s(t) &= \frac{1}{2}gt^2 && \text{Fallweg, } v(0) = 0,\ s(0) = 0 \\ v(s) &= \sqrt{2gs} && t \text{ eliminiert} \\ s(v) &= \frac{v^2}{2g} && \text{nach } s \text{ aufgelöst, } \ s(c) \approx 1{,}23 \ [\text{m}] \end{aligned}$$

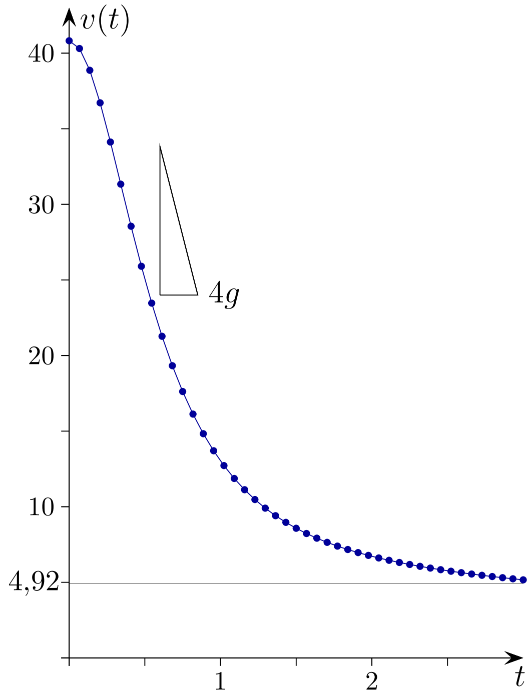
Würde sich der Fallschirm schlagartig öffnen, führte das zu einem rasanten Abfall der Geschwindigkeit von $41\frac{\text{m}}{\text{s}}$ innerhalb einer halben Sekunde.

$$\dot{v}(t) = 10 - 0{,}4125[v(0)]^2 = -683{,}41$$

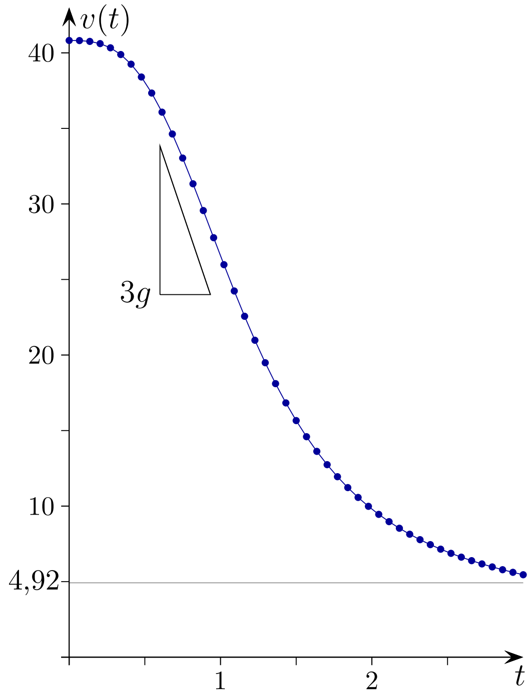
Die Bremsbeschleunigung entspräche fast dem 70-fachen der Erdbeschleunigung und wäre tödlich.

Sei $T = 3\,\mathrm{s}$ die Dauer der Öffnungsphase des Fallschirms und $k(t) = \dfrac{k_{\text{nach}} - k_{\text{vor}}}{T}\,t + k_{\text{vor}}$ die lineare Funktion, für die $k(0) = k_{\text{vor}}$ und $k(T) = k_{\text{nach}}$ gilt.
Die DGL[1] lautet nun

$$\begin{aligned}
\dot v(t) &= g - \frac{k(t)}{m}\,[v(t)]^2 \\
\dot v(t) &= 10 - (0{,}1355t + 0{,}006)[v(t)]^2, \qquad \text{Anfangsbedingung } v(0) = v_\infty.
\end{aligned}$$



Die Bremsbeschleunigung ist nicht größer als $4g$, dem Vierfachen der Erdbeschleunigung.



Denkbar ist auch eine quadratische Anpassung von k_{vor} an k_{nach} mit noch geringerer Bremsbeschleunigung:

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{k_{\text{nach}} - k_{\text{vor}}}{T^2}\,t^2 + k_{\text{vor}} \\
\dot v(t) &= 10 - (0{,}045167t^2 + 0{,}006)[v(t)]^2
\end{aligned}$$

[1] Die Graphen wurden in LaTeX mit \usepackage{pst-ode} erzeugt.