Extrema von Funktionen mit zwei Variablen

Es gilt der Satz:

Ist an einer Stelle (x_0, y_0)

$f_x(x_0, y_0) = 0$ *und* $f_y(x_0, y_0) = 0$

und besteht außerdem die Ungleichung

$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$,

so liegt an dieser Stelle ein Extremum vor, und zwar ein Maximum, wenn $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, und ein Minimum, wenn $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ist.

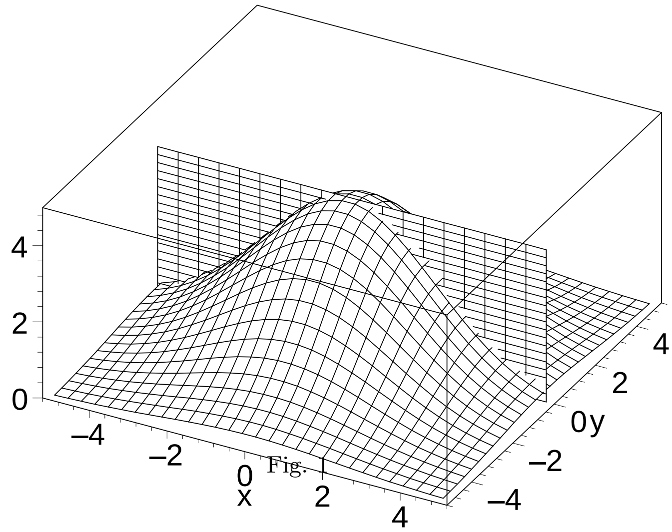


Fig. 1

Wir wollen uns diesen Satz plausibel machen und betrachten hierzu alle Kurven, die sich als Schnitt der Fläche mit Ebenen ergeben, die senkrecht zur xy-Ebene durch die Stelle (x_0, y_0) verlaufen. Wenn ein Extremum vorliegt, so gilt dies sicherlich auch für die Schnittkurven in x- und y-Richtung, d.h. die partiellen Ableitungen sind an dieser Stelle null. Die Sattelfläche (siehe Schiebeflächen) zeigt, dass diese Bedingung noch nicht hinreichend ist.

Die Schnittkurven werden durch: $g(\lambda) = f(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b)$, a und b beliebig, erfasst.

Es ist $g''(\lambda) = f_{xx}(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) \cdot a^2 + 2 f_{xy}(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) \cdot ab + f_{yy}(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b) \cdot b^2$

und für $\lambda = 0$ ergibt sich: $g''(0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot a^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) \cdot ab + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot b^2$.

Beim Zusammenfassen werden $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ und die verallgemeinerte Kettenregel benutzt. Beide Regeln können ohne großen Aufwand eingesehen werden (siehe weiter unten).

Um erkennen zu können, welches Vorzeichen $g''(0)$ hat, formen wir weiter um, zur einfacheren Schreibweise werden die Argumente weggelassen. Falls $f_{xx} > 0$ oder $f_{xx} < 0$ ist, liegt zumindest für die Schnittkurve in x-Richtung ein Extremum vor. Wir klammern daher f_{xx} aus und ergänzen quadratisch, damit das Vorzeichen erhalten bleibt.

$$g''(0) = f_{xx} \cdot a^2 + 2 f_{xy} \cdot ab + f_{yy} \cdot b^2 = f_{xx} \left[\left(a + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \cdot b \right)^2 + \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2} \, b^2 \right]$$

Nun ist zu erkennen: Der Term in eckigen Klammern ist stets positiv, falls $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ist (falls $b = 0$ ist, müsste $a \neq 0$ sein), so dass f_{xx} das Vorzeichen von $g''(0)$ festlegt.

Das Beispiel $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

wirft leider einen Schatten auf unsere bisherigen Überlegungen. Sämtliche Schnittkurven der angegebenen Art besitzten an der Stelle $(0,0)$ ein Minimum, doch dieses gilt nicht für die Funktion $f(x,y)$.

Nur im Bereich zwischen den Graphen von $y = x^2$ und $y = 2x^2$ in der xy-Ebene ist die Funktion f negativ. In jeder Umgebung des Ursprungs existieren daher negative und positive Funktionswerte (man setze $y = \frac{3}{2}x^2$ ein).

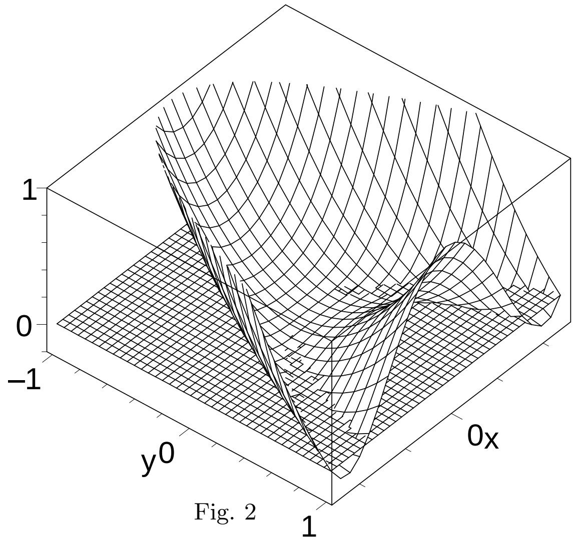


Fig. 2

Wir müssen unsere Überlegungen daher auf beliebige Schnitte und damit auf Wege $(\phi_1(t), \phi_2(t))$ erweitern, die für $t = 0$ durch (x_0, y_0) verlaufen und deren Ableitungen nicht beide an der Stelle $t = 0$ verschwinden, es muss also eine Tangente an dieser Stelle existieren. Eine erneute Rechnung ergibt nun:

$$g''(0) = f_{xx} \cdot a^2 + 2f_{xy} \cdot ab + f_{yy} \cdot b^2, \quad \text{mit } a = \phi_1'(0) \text{ und } b = \phi_2'(0) .$$

Das erwähnte Kriterium ist also auch hinreichend dafür, dass jede Schnittkurve, deren zugehöriger Weg in der xy-Ebene eine glatte (d.h. differenzierbare) Kurve ist, ein Extremum an der Stelle (x_0, y_0) hat.

Nun ist es plausibel, dass dann auch die Funktion $f(x,y)$ an dieser Stelle eine Extremum aufweist.

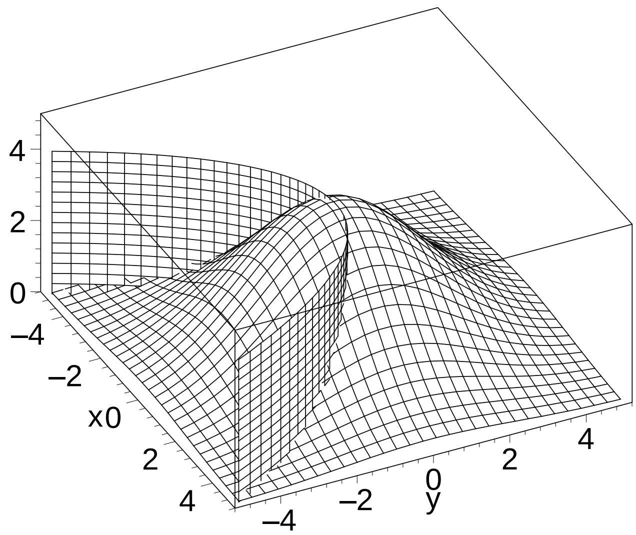


Fig. 3

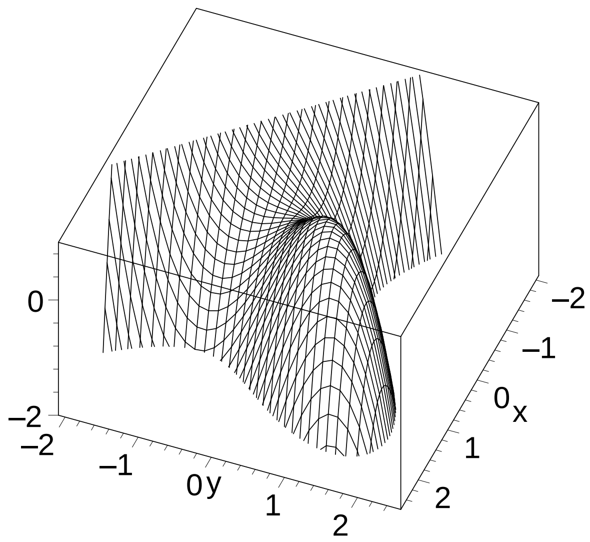


Fig. 4

Beispiel:

$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$

Die notwendigen Bedingungen $f_x = 0$ und $f_y = 0$ führen zu dem Gleichungssystem:

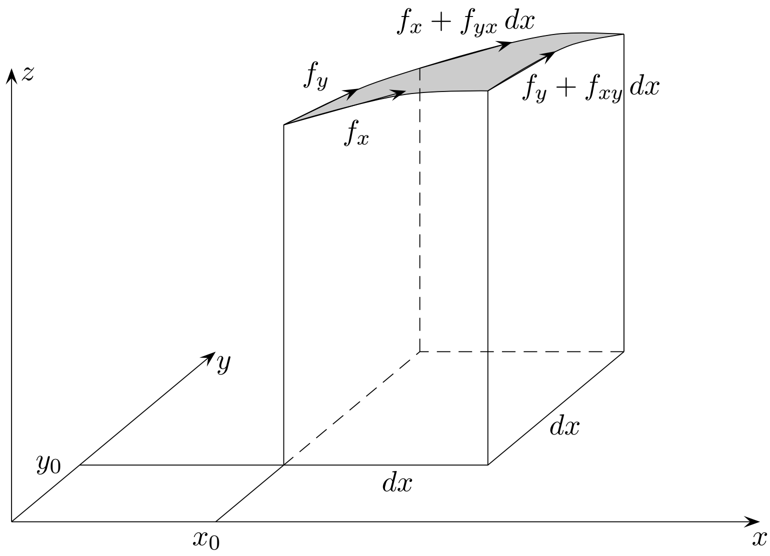
$$\begin{array}{rcrcl} 3y & - & 3x^2 & = & 0 \\ 3x & - & 3y^2 & = & 0 \end{array}$$

mit den Lösungen $(0, 0)$ und $(1, 1)$

$$f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0, \quad f_{xy}(0,0) = 3$$
$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -9 < 0$$
$$f_{xx}(1,1) = f_{yy}(1,1) = -6, \quad f_{xy}(1,1) = 3$$
$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 27 > 0$$

Nur an der Stelle $(1, 1)$ ist das hinreichende Kriterium erfüllt, hier liegt ein Maximum vor.

Satz von Schwarz: $\quad f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ (unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen)



Die partiellen Ableitungen werden an der Stelle (x_0, y_0) betrachtet. Die Funktion $f_y(x, y_0)$, deren Variable x ist, wird gemäß $f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)\,dx$ linear approximiert. Dann ist

$$f_y(x_0 + dx, y_0) \;=\; f_y(x_0, y_0) + f_{xy}(x_0, y_0)\,dx\,, \qquad \text{Entsprechendes gilt für } f_x.$$

Der Grafik kann entnommen werden:

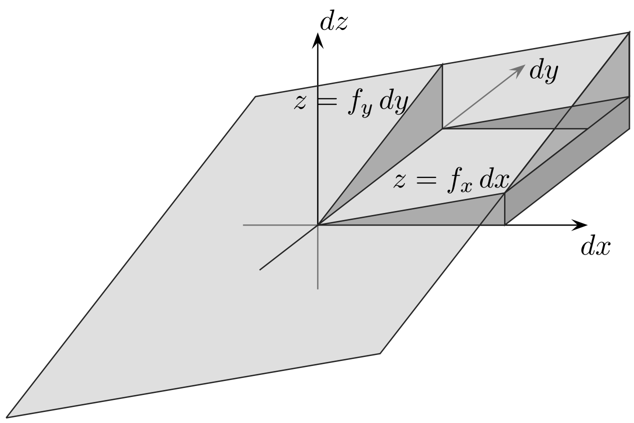
$$dz \;=\; f_x\,dx + (f_y + f_{xy}\,dx)\,dx \;=\; f_y\,dx + (f_x + f_{yx}\,dx)\,dx \quad\Longrightarrow\quad f_{xy} \;=\; f_{yx}$$

Verallgemeinerte Kettenregel: (einfacher Spezialfall)

Sei $g(t) \;=\; f(x_0 + at,\; y_0 + bt)$, dann ist

$$g'(0) \;=\; f_x(x_0, y_0)\cdot a + f_y(x_0, y_0)\cdot b\,.$$

Betrachten wir die Tangentialebene von $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0), es ist
$dz \;=\; f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$
(siehe Tangentialebene und Gradient).



Erhöht sich t für $t = 0$ um dt, so wächst (x_0, y_0) um $a\,dt$ in x-Richtung und $b\,dt$ in y-Richtung und

$g(t)$ daher um $\quad dz \;=\; f_x(x_0, y_0)\,a\,dt + f_y(x_0, y_0)\,b\,dt$.

Das ist die Behauptung (siehe Lineare Näherung).

Der Verallgemeinerung liegt die gleiche Idee zugrunde.

$$g(t) \;=\; f(\phi_1(t),\, \phi_2(t)) \quad\Longrightarrow\quad g'(t) \;=\; f_x(\phi_1(t),\, \phi_2(t))\cdot\phi_1'(t) + f_y(\phi_1(t),\, \phi_2(t))\cdot\phi_2'(t)$$

Erhöht sich t für $t = t_0$ um dt, so wächst $(\phi_1(t),\, \phi_2(t))$ um $\phi_1'(t)\,dt$ in x-Richtung und $\phi_2'(t)\,dt$ in y-Richtung.

Extrema von Funktionen mit zwei Variablen

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y)$ an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 0$$

Für eine hinreichende Bedingung ist die Hesse-Matrix aufzustellen:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

partielle Ableitungen an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0)$, die Reihenfolge der Ableitungen ist für zweimal stetig differenzierbare Funktionen unerheblich. M ist daher symmetrisch.

$$(u_1, u_2) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} > 0 \quad \Longrightarrow$$ lokales Minimum an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0)$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, M ist positiv definit

$$(u_1, u_2) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} < 0 \quad \Longrightarrow$$ lokales Maximum

$\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, M ist negativ definit

$\vec{u} \longrightarrow \vec{u}^{\mathrm{T}} M \vec{u}$ ist die Verallgemeinerung von $x \longrightarrow f''(x_0)x^2$.
Das Vorzeichen von $f''(x_0)$ bestimmt die Art des Extremums.

alternativ

$\det M > 0, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \Longrightarrow$ lokales Minimum an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0)$

$\det M > 0, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \Longrightarrow$ lokales Maximum

$\det M < 0 \quad \Longrightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0)$

Extrema von Funktionen mit drei Variablen

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von $f(x, y, z)$ an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0 \,|\, z_0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Für eine hinreichende Bedingung ist die Hesse-Matrix an der Stelle $(x_0 \,|\, y_0 \,|\, z_0)$ aufzustellen:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \qquad M \text{ ist symmetrisch.}$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 \,|\, y_0 \,|\, z_0)$$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{u} \neq \vec{0},\ M$ ist positiv definit

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{u} \neq \vec{0},\ M$ ist negativ definit

alternativ

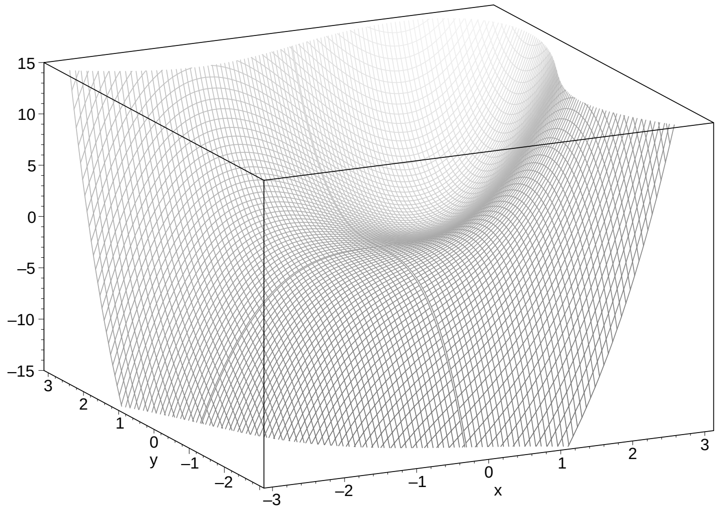
$$M_1: \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \qquad M_2: \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \end{matrix} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \qquad M_3: \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\det M_1 > 0,\ \ \det M_2 > 0,\ \ \det M_3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum an der Stelle } (x_0 \,|\, y_0 \,|\, z_0)$$

$$\det M_1 < 0,\ \ \det M_2 > 0,\ \ \det M_3 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$

Das Kriterium kann für $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verallgemeinert werden. Für ein lokales Maximum ist die Reihe der Vorzeichen der Hauptabschnittsdeterminanten alternierend und beginnt mit -1.

Extrema Beispiel



Wir suchen nach Extremwerten für die Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Die notwendige Bedingung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \qquad 3x^2 - 3y = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0 \qquad 3y^2 - 3x = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = y^2$.
Dies in die erste Gleichung eingesetzt, y ausgeklammert, ergibt $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.
Falls $y_1 = 0$ ist, folgt mit der ersten Gleichung $x_1 = 0$,
so dass der erste Kandidat für einen Extremwert $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.
Falls $y_2 = 1$ ist, folgt mit der ersten Gleichung $x_{1/3} = \pm 1$.
$x_3 = -1$ scheidet aus, weil die zweite Gleichung nicht erfüllt wird.
Der zweite Kandidat für einen Extremwert ist $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinreichende Bedingung
Die (symmetrische) Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

wird an den Stellen $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ auf positiv/negativ definit überprüft.

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -3u_1u_2 - 3u_1u_3$$

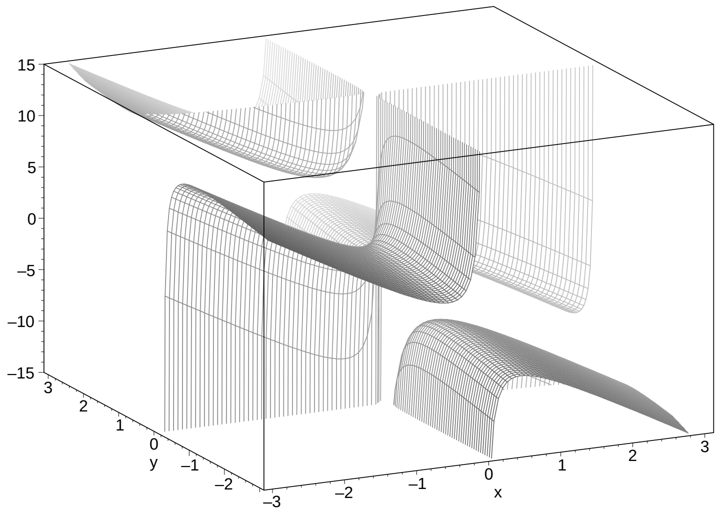
für $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ mal positiv, mal negativ

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 6(u_1^2 + u_2^2 - u_1u_2) > 0 \qquad \text{beachte:} \quad (u_1 - u_2)^2 = u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2$$

$\Longrightarrow$ lokales Minimum an der Stelle $\vec{x}_1$

Extrema weiteres Beispiel



Wir suchen nach Extremwerten für die Funktion $f(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} - 4x + y.$

Die notwendige Bedingung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 \qquad \frac{1}{x^2} - 4 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0 \qquad -\frac{1}{y^2} + 1 = 0 \qquad x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}, \quad y_{1/2} = \pm 1$$

Hinreichende Bedingung
Die (symmetrische) Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

wird an den 4 Stellen auf positiv/negativ definit überprüft.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Sattelpunkt}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Maximum}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Minimum}$$

$$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{Sattelpunkt}$$