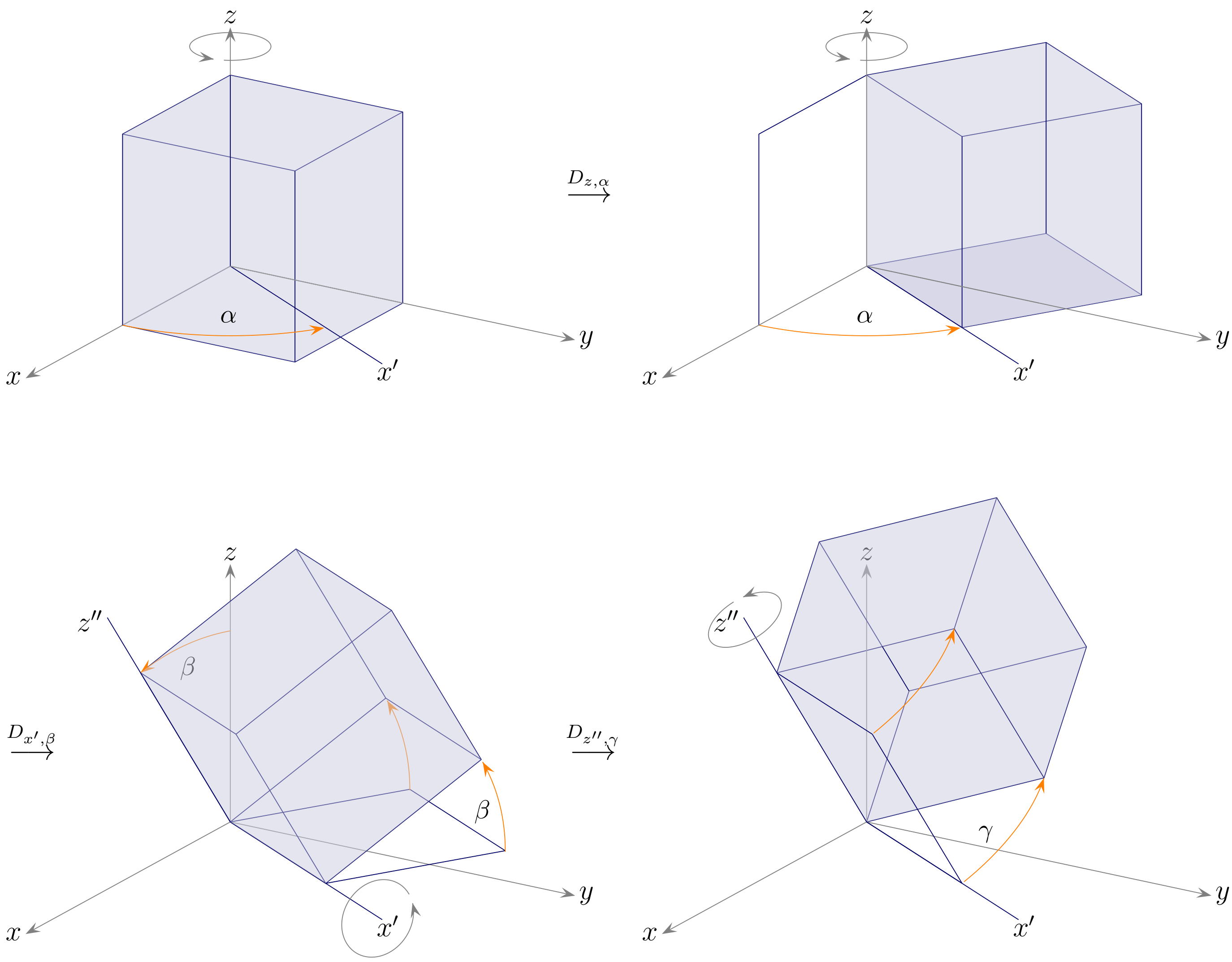
1. Eulerwinkel
2. Kardan-Winkel $(z,\, y',\, x'')$
3. Gimbal Lock $(z,\, y',\, x'')$
4. $(z,\, y',\, x'')$ (Gier-, Nick-, Rollachse)
5. Transformationsmatrix
6. Drehung um eine beliebige Achse
7. Rodrigues-Formel in Matrixschreibweise
8. Zentralprojektion, homogene Koordinaten
9. Tiefenstaffelung
10. Translation, Drehung, Spiegelung in homogenen Koordinaten
11. Spiegelung an einer Ebene
12. Drehmatrizen
13. Drehachse und Drehwinkel
14. Euler-Winkel ermitteln, Standard-x-Konvention
15. Euler-Winkel ermitteln, Standard-y-Konvention

↑ Eulerwinkel

Die Drehlage eines Körpers kann durch drei aufeinanderfolgende Drehungen $D_{z,\alpha}$, $D_{x',\beta}$ und $D_{z'',\gamma}$, also durch drei Winkel, erfasst werden, $x \to x' \to x'' \to x'''$. Anfänglich stimmen das kartesische (raumfeste) Koordinatensystem mit dem körperfesten überein. Eine Zerlegung in Drehungen, bei denen jeweils um mitgedrehte Koordinatenachsen gedreht wird, nennt man intrinsische Drehfolge. Umgekehrt kann ein verdrehter Körper zurückgedreht werden, d. h. körperfestes und raumfestes Koordinatensystem werden zur Deckung gebracht, indem zuerst die körperfeste x''-Achse mit $D_{z'',-\gamma}$ in die xy-Ebene gedreht wird.



Der Vorteil dieser Betrachtung der Drehlage eines Körpers besteht nun darin, dass die Drehung $D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha}$ (rechts beginnend) durch drei Drehungen um die x-, y- und z-Achse, deren Drehmatrizen bekannt sind, ausgedrückt werden kann (extrinsische Drehfolge).

Zunächst ist erkennbar: $D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} = D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta}$

Anspruchsvoller direkt einzusehen ist: $D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} = D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma}$

Um am Ende den Körper mit $D_{z'',\gamma}$ auf der linken Seite zu drehen, erfolgt dies auf der rechten Seite am Anfang mit $D_{z,\gamma}$.

↑ formale Begründung

Idee: Die Drehung um eine körperfeste Achse wird auf die Drehung um die entsprechende Koordinatenachse zurückgeführt.

$$\begin{aligned}
D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} &\stackrel{!}{=} D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma} \\[1em]
D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} &= D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \\
D_{x',\beta} &= D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\alpha}^{-1} \\
D_{z'',\gamma} &= (D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha}) \circ D_{z,\gamma} \circ (D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha})^{-1} \\
D_{z'',\gamma} &= (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta}) \circ D_{z,\gamma} \circ (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta})^{-1} \\
D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} &= (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta}) \circ D_{z,\gamma} \circ (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta})^{-1} \circ (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta}) \\
&= D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma}
\end{aligned}$$

Beachte die umgekehrte Reihenfolge.

Für die Drehmatrizen (siehe hier) bedeutet das:

$$[D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha}] = [D_{z,\alpha}]\,[D_{x,\beta}]\,[D_{z,\gamma}]$$

$$[D_{x,\varphi}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad [D_{y,\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad [D_{z,\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

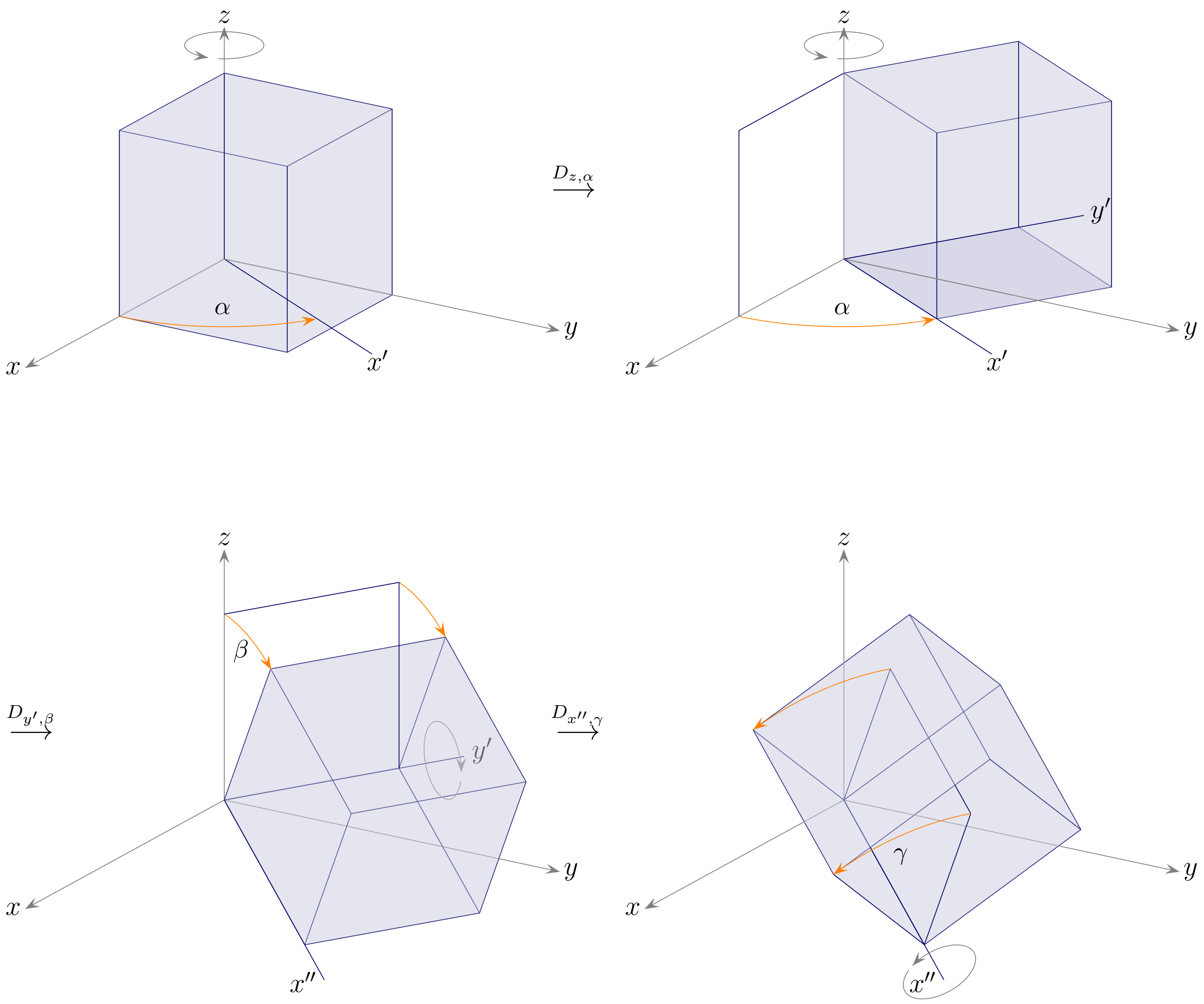
$$[D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Neben der hier gewählten Wahl der Achsen $(z,\, x',\, z'')$ (Standard-x-Konvention) für die Eulerwinkel bestehen die Möglichkeiten:

$(z,\, y',\, z'')$ Standard-y-Konvention
$(y,\, x',\, y'')$
$(y,\, z',\, y'')$
$(x,\, y',\, x'')$
$(x,\, z',\, x'')$

Bei den Kardan-Winkeln (nach Cardano) erfolgen die Drehungen gemäß
$(z,\, x',\, y'')$
$(z,\, y',\, x'')$
$(y,\, x',\, z'')$
$(y,\, z',\, x'')$
$(x,\, y',\, z'')$
$(x,\, z',\, y'')$

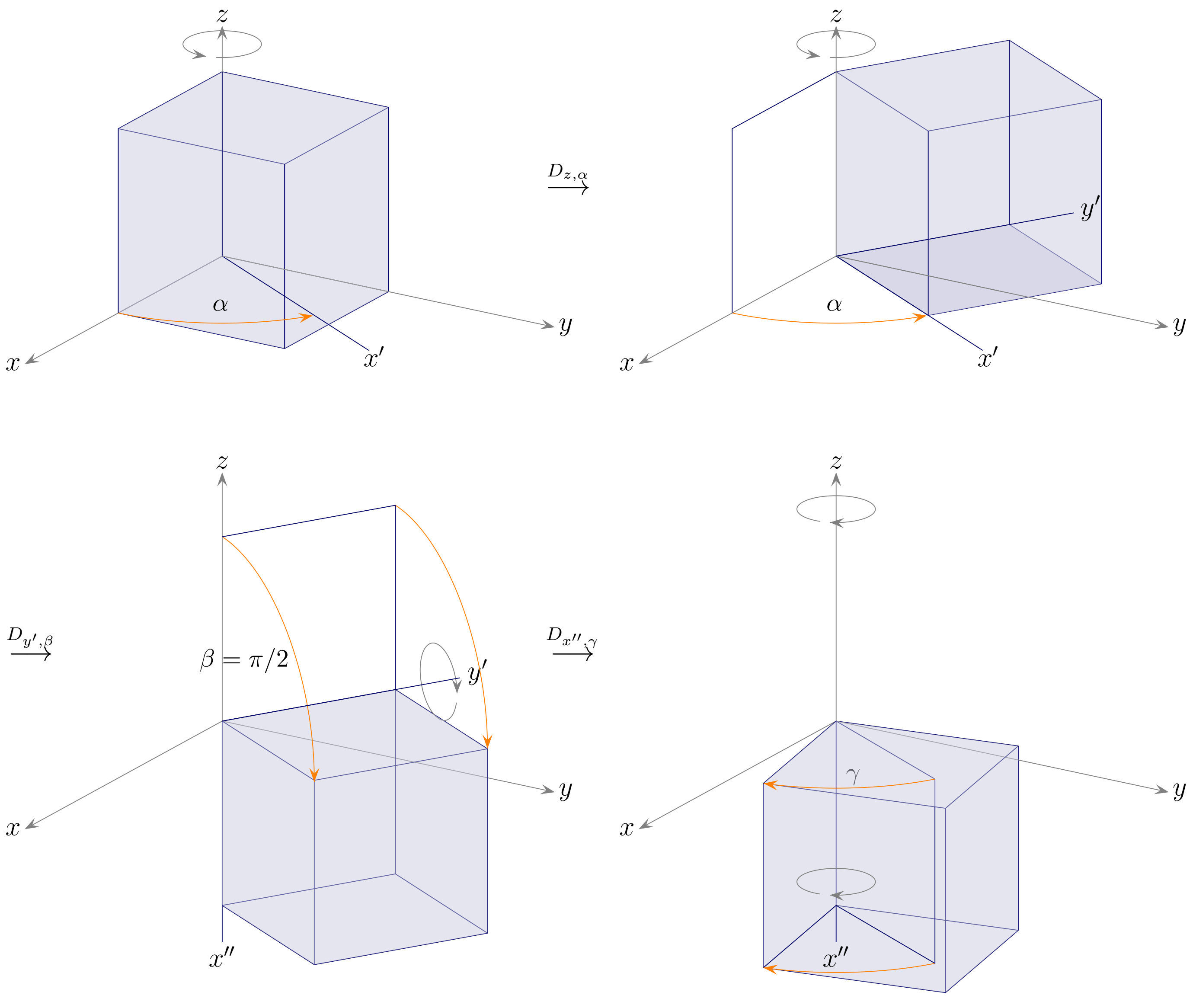
↑ Kardan-Winkel $(z,\, y',\, x'')$



$$[D_{x'',\gamma} \circ D_{y',\beta} \circ D_{z,\alpha}] = [D_{z,\alpha}]\,[D_{y,\beta}]\,[D_{x,\gamma}]$$

↑ Gimbal Lock zu (z, y', x'')

Eine intrinsische Drehfolge wird technisch durch eine kardanische Aufhängung (engl. gimbal) realisiert. Sie besteht aus einen Ring, in dem zwei weitere Ringe, die Achsen jeweils um 90° gegeneinander versetzt, ineinander drehbar gelagert werden. Deren Drehachsen werden jeweils von den vorherigen Drehungen mitbestimmt. Der Körper wird am innersten Ring befestigt. Bei der Drehfolge (z, y', x'') entspricht z der Drehachse des äußeren Rings. Mit einer kardanischen Aufhängung kann z. B. eine Drohnen-Kamera stabilisiert, bzw. gezielt ferngesteuert werden.



Ein Problem entsteht, wenn die Achse der ersten Drehung und die der dritten für $\beta = \pi/2$ zusammenfallen. Eine Veränderung der Winkel α und γ bewirkt eine Drehung um dieselbe Achse. Die Bewegungsmöglichkeiten sind nun eingeschränkt, es fehlt ein Freiheitsgrad. Dieser Fall tritt bei allen Drehfolgen ein, wenn zwei Drehachsen übereinstimmen (lock engl. Blockierung, Verriegelung, Sperre).

$\uparrow$ Gimbal Lock zu $(z,\, y',\, x'')$

Die beschriebene Situation spiegelt sich in der Gesamtdrehmatrix wider,
da sie nur noch von der Differenz $\alpha - \gamma$ abhängig ist.

$$[D_{x'',\gamma} \circ D_{y',\beta} \circ D_{z,\alpha}] = [D_{z,\alpha}]\,[D_{y,\beta}]\,[D_{x,\gamma}], \quad \beta = \pi/2$$

$$[D_{x,\gamma}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}, \quad [D_{y,\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D_{z,\alpha}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D_{z,\alpha} \circ D_{y,\beta} \circ D_{x,\gamma}] = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma \\ 0 & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha-\gamma) & \cos(\alpha-\gamma) \\ 0 & \cos(\alpha-\gamma) & \sin(\alpha-\gamma) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

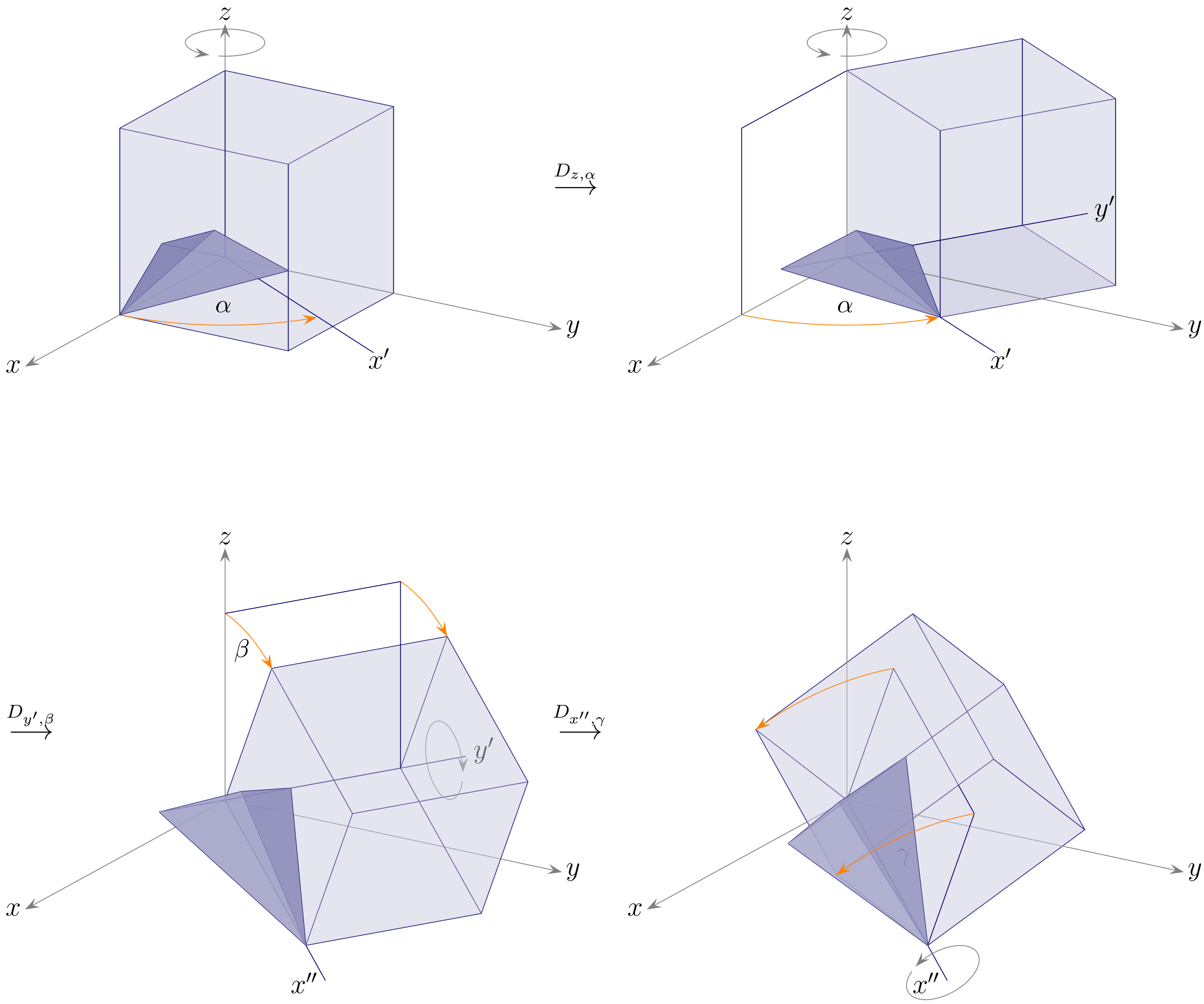
Hier wären Überlegungen anzustellen, wie ein Gimbal Lock verhindert werden kann.

↑ $(z,\, y',\, x'')$ (Gier-, Nick-, Rollachse)

Für die Ausrichtung eines Flugobjekts gibt es eigene Bezeichnungen.

$(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ $(\psi,\, \theta,\, \varphi)$
Gier- (Hoch-, Vertikal-), Nick- (Höhen-, Quer-), Roll- (Schräglagen-, Längs-) Achse
engl. yaw, pitch (inclination), roll (bank) angle

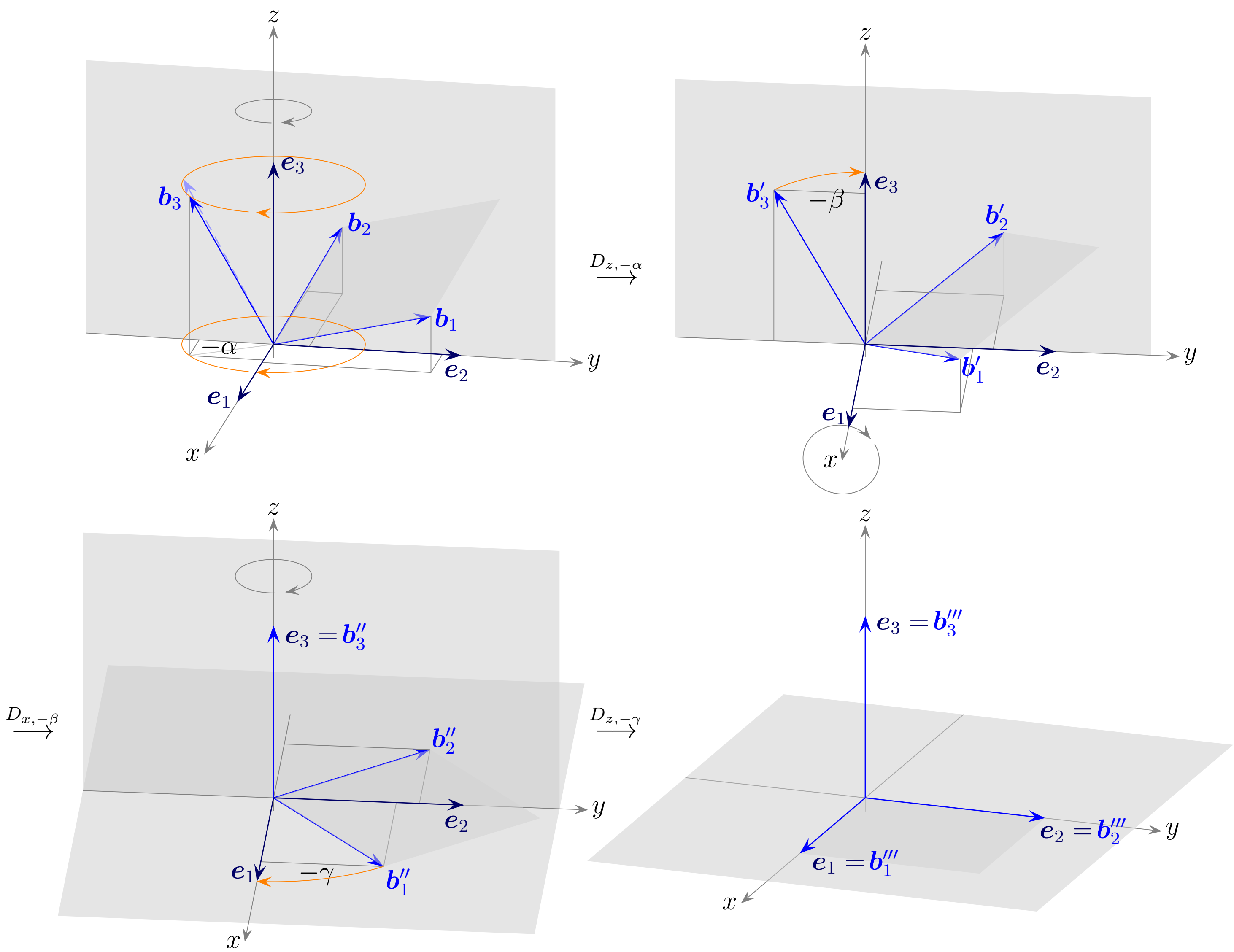
to yaw	vom Kurs abweichen, schlingern
to pitch	nicken, kippen
to roll	rollen, wanken



In den Abbildungen befindet sich das xyz-Koordinatensystem in großer Höhe, $\beta > 0$.

↑ Transformationsmatrix

Gesucht ist die Transformationsmatrix, die in einem kartesischen Koordinatensystem ein gedrehtes Orthonormalsystem $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ in die Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ überführt. Wir werden erkennen, dass sich jede Drehung im Raum in drei Drehungen um die Koordinatenachsen zerlegen lässt.



Im 1. Schritt drehen wir $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ mit $D_{z,-\alpha}$ um die z-Achse, so dass $\boldsymbol{b}_3$ in der yz-Ebene liegt.
Im 2. Schritt drehen wir $\{\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2, \boldsymbol{b}'_3\}$ mit $D_{x,-\beta}$ um die x-Achse, so dass $\boldsymbol{b}'_3$ auf der z-Achse liegt.
Im 3. und letzten Schritt drehen wir $\{\boldsymbol{b}''_1, \boldsymbol{b}''_2, \boldsymbol{b}''_3\}$ mit $D_{z,-\gamma}$ um die z-Achse, so dass die Orthonormalsysteme übereinstimmen (es gibt viele weitere Möglichkeiten).

$$\boldsymbol{e}_i = D_{z,-\gamma} \circ D_{x,-\beta} \circ D_{z,-\alpha}(\boldsymbol{b}_i) \qquad i = 1, 2, 3, \text{ für die inverse Transformation gilt:}$$

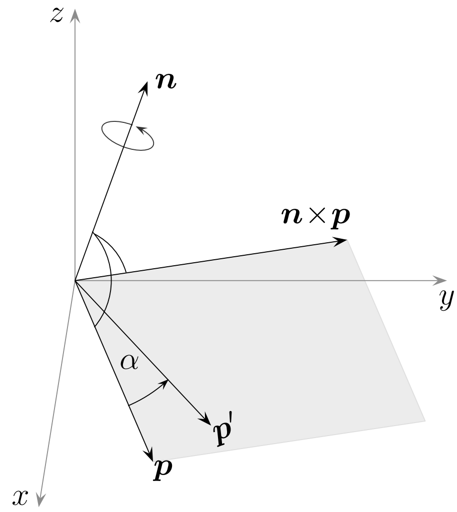
$$\boldsymbol{b}_i = D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma}(\boldsymbol{e}_i) \qquad \text{Multiplikation von links, } D_{z,\gamma} \circ D_{z,-\gamma} = \text{id, usw.}$$

$[D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma}]$ wurde schon ermittelt.

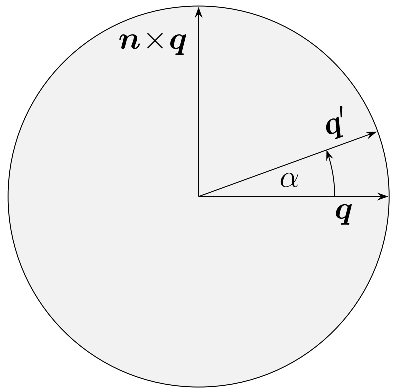
↑ Drehung um eine beliebige Achse

Eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ wird mit Hilfe des Kreuzproduktes beschrieben, danach wird die Drehmatrix ermittelt.

Die Drehachse möge durch den Ursprung verlaufen und durch einen Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ gegeben sein.



Zunächst betrachten wir den Fall, dass der Vektor $\boldsymbol{q}$, der um den Winkel α um $\boldsymbol{n}$ gedreht werden soll, in der zu $\boldsymbol{n}$ senkrechten Ebene liegt.
In dieser Ebene liegen auch die mit $\boldsymbol{q}$ gleichlangen Vektoren $\boldsymbol{q}'$ und $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{q}$,
$|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{q}|\sin 90^\circ = |\boldsymbol{q}|$.



Für $\boldsymbol{q}'$ erhalten wir damit die Gleichung (Projektion auf die Achsen):

$$\boldsymbol{q}' = \cos\alpha\,\boldsymbol{q} + \sin\alpha\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{q}$$

Im allgemeinen Fall ist ein Vektor $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + \lambda\boldsymbol{n}$ zu drehen,
wobei $\boldsymbol{q}$ in der zu $\boldsymbol{n}$ senkrechten Ebene liegt. Für $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \lambda\boldsymbol{n}$ gilt daher

$$\boldsymbol{p}' - \lambda\boldsymbol{n} = \underbrace{\cos\alpha\,(\boldsymbol{p} - \lambda\boldsymbol{n})}_{\cos\alpha\,\boldsymbol{p} - \cos\alpha\,\lambda\boldsymbol{n}} + \sin\alpha\,\underbrace{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{p} - \lambda\boldsymbol{n})}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}} \qquad \text{beachte: } (\boldsymbol{p} - \lambda\boldsymbol{n})' = \boldsymbol{p}' - \lambda\boldsymbol{n}$$

Aus $\boldsymbol{q} \perp \boldsymbol{n}$ folgt $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p} - \lambda\boldsymbol{n}) = 0$, und damit $\lambda = \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}$.
Einsetzen, Umstellen und Ausklammern liefert die Rodrigues-Formel (1840):

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}\big[1 - \cos\alpha\big]\,\boldsymbol{n} + \cos\alpha\,\boldsymbol{p} + \sin\alpha\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}$$

↑ Rodrigues-Formel in Matrixschreibweise

Benötigt werden:

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{n}_3 & \boldsymbol{n}_2 \\ \boldsymbol{n}_3 & 0 & -\boldsymbol{n}_1 \\ -\boldsymbol{n}_2 & \boldsymbol{n}_1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{p}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} && \text{Graßmann-Identität} \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}) &= (\boldsymbol{n}\boldsymbol{p})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} && |\boldsymbol{n}| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p} &= \boldsymbol{K}\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}) &= \boldsymbol{K}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{K}^2\boldsymbol{p} \\ (\boldsymbol{n}\boldsymbol{p})\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{K}^2\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{K}^2 &= \begin{bmatrix} -n_2^2 - n_3^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & -n_1^2 - n_3^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & -n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

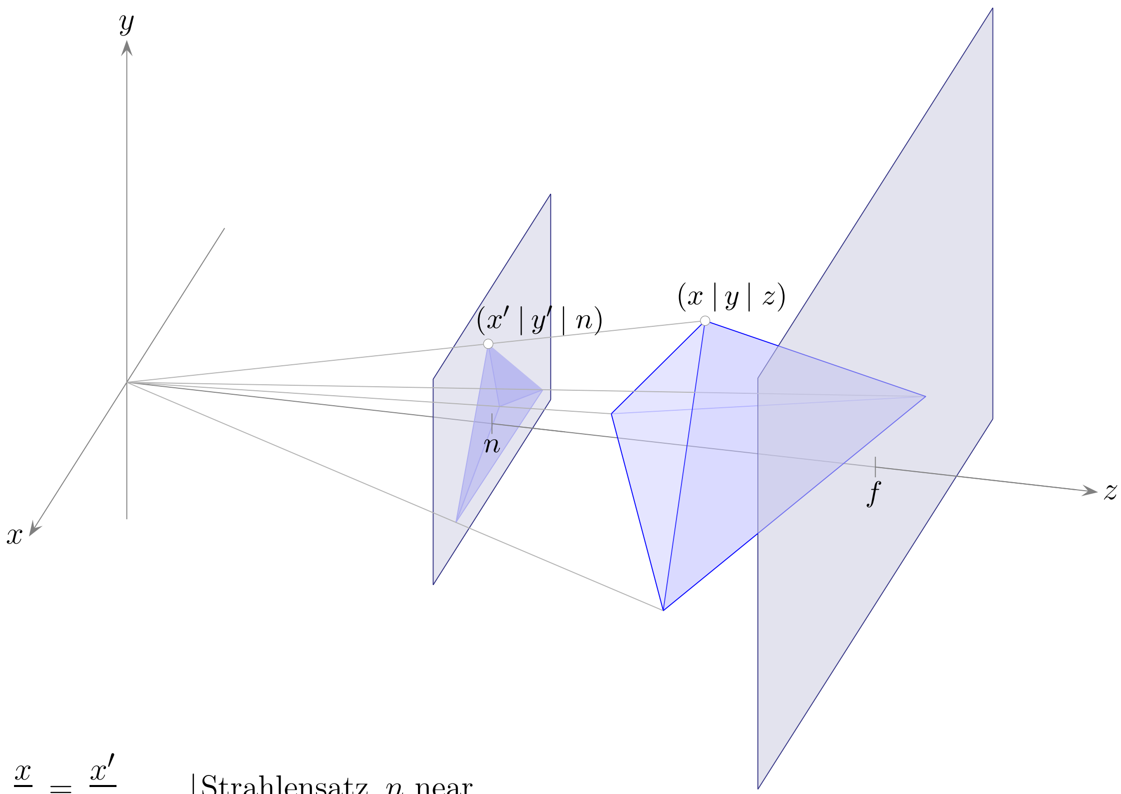
$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{n}\boldsymbol{p}\big[1 - \cos\alpha\big]\boldsymbol{n} + \cos\alpha\,\boldsymbol{p} + \sin\alpha\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p} \\ &= (\boldsymbol{K}^2\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p})\big[1 - \cos\alpha\big] + \cos\alpha\,\boldsymbol{p} + \sin\alpha\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{p} \\ &= \boldsymbol{p} + \sin\alpha\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{p} + \big[1 - \cos\alpha\big]\boldsymbol{K}^2\boldsymbol{p} \\ &= \big(\boldsymbol{I} + \sin\alpha\ \boldsymbol{K} + \big[1 - \cos\alpha\big]\boldsymbol{K}^2\big)\boldsymbol{p} \qquad |\ \text{Identitätsmatrix } \boldsymbol{I} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} n_1^2(1-\cos\alpha) + \cos\alpha & n_1 n_2(1-\cos\alpha) - n_3\sin\alpha & n_1 n_3(1-\cos\alpha) + n_2\sin\alpha \\ n_1 n_2(1-\cos\alpha) + n_3\sin\alpha & n_2^2(1-\cos\alpha) + \cos\alpha & n_2 n_3(1-\cos\alpha) - n_1\sin\alpha \\ n_1 n_3(1-\cos\alpha) - n_2\sin\alpha & n_2 n_3(1-\cos\alpha) + n_1\sin\alpha & n_3^2(1-\cos\alpha) + \cos\alpha \end{bmatrix}\boldsymbol{p}$$

Die Diagonalelemente wurden entsprechend

$$\begin{aligned} (n_2^2 + n_3^2)\cos\alpha - n_2^2 - n_3^2 + 1 &= (1 - n_1^2)\cos\alpha + n_1^2 \\ &= n_1^2(1 - \cos\alpha) + \cos\alpha \qquad \text{vereinfacht.} \end{aligned}$$

↑ Zentralprojektion, homogene Koordinaten



$$\begin{aligned}
\frac{x}{z} &= \frac{x'}{n} &\quad &|\text{Strahlensatz, } n \text{ near}\\
x' &= \frac{xn}{z}\\
\frac{y}{z} &= \frac{y'}{n}\\
y' &= \frac{yn}{z}
\end{aligned}$$

Eine Matrix wäre wünschenswert, die die Zuordnung Punkt → Bildpunkt liefert.
Diese Matrix könnte z. B. mit Drehmatrizen multipliziert werden.

Auf den ersten Blick erscheint die Lösung etwas befremdlich.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{n} \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine 4. Komponente ist erforderlich. Für Ortsvektoren ist sie 1, für Richtungsvektoren 0.
Um vom Ergebnis (den homogenen Koordinaten) der Matrixmultiplikation auf die kartesischen Koordinaten zu schließen, werden die ersten beiden Koordinaten durch die 4. dividiert.
Eine Abänderung der Matrix ist möglich, so dass die durch die z-Komponenten gegebene Tiefenstaffelung rekonstruiert werden kann.

↑ Tiefenstaffelung

Die z-Koordinate liegt zwischen n (near) und f (far).
Sinnvoll ist eine Abänderung an zwei Stellen der Matrix. Das hat zur Folge:

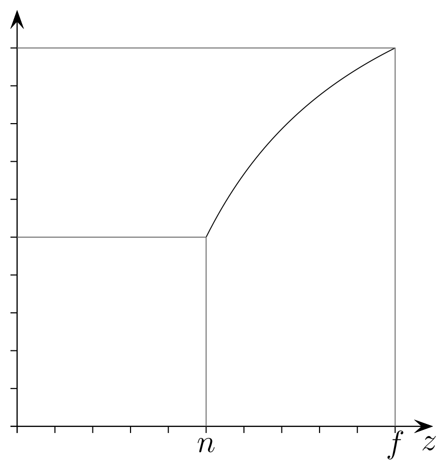
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ Az + B \\ \frac{z}{n} \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ An + \frac{Bn}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Falls $z = n$ ist, sollte $An + \frac{Bn}{z} = n$ sein.
Falls $z = f$ ist, sollte $An + \frac{Bn}{z} = f$ sein.

Das lineare Gleichungssystem $\begin{aligned} An + \frac{Bn}{n} &= n \\ An + \frac{Bn}{f} &= f \end{aligned}$ wird durch $A = \frac{n+f}{n}$ und $B = -f$ gelöst.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{n} & -f \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ Az + B \\ \frac{z}{n} \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ n + f - \frac{fn}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit $z \to n + f - \frac{fn}{z}$ wird das Intervall $[n, f]$ auf sich (etwas verzerrt) abgebildet.



↑ Translation, Drehung, Spiegelung in homogenen Koordinaten

Verschiebung um einen Vektor $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ in homogenen Koordinaten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a_1 \\ y + a_2 \\ z + a_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrix für die Drehung um die x-Koordinatenachse
mit einen Winkel φ im math. positiven Drehsinn:

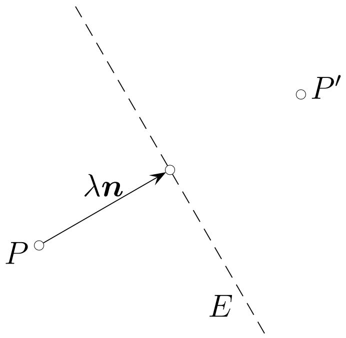
$$[D_{x,\varphi}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spiegelung
Wir betrachten die Spiegelung an einer durch den Ursprung verlaufenden Ebene E, die durch ihren Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ der Länge 1 gegeben ist, $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2d\boldsymbol{n},\ d = \boldsymbol{n}\,\overrightarrow{OP} = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$.
Die beiden möglichen Einheitsnormalenvektoren unterscheiden sich nur im Vorzeichen, d gleicht das aus.

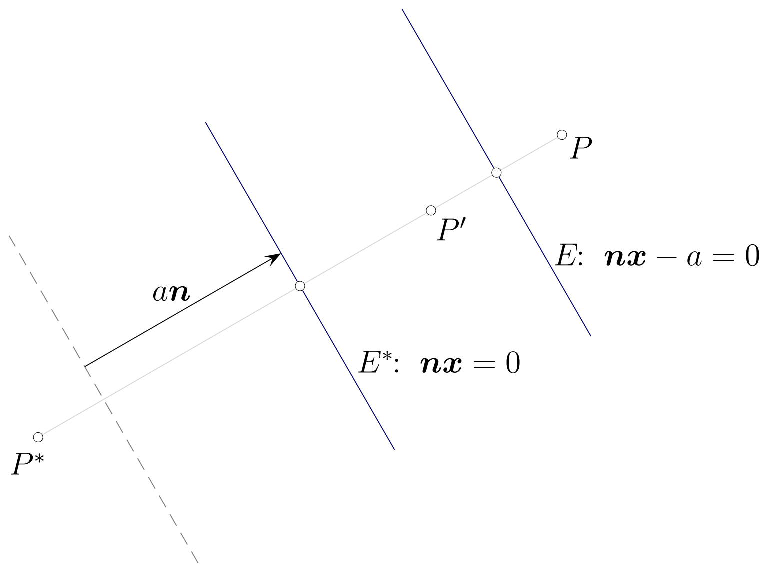
$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & - & 2n_1(n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) \\ p_2 & - & 2n_2(n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) \\ p_3 & - & 2n_3(n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) \\ & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 0 \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_2n_3 & 0 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1 - 2n_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1 - 2n_3^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^\top \qquad \text{Identitätsmatrix } \boldsymbol{I},\ \det(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^\top) = -1$$

$$\begin{aligned} E\colon\ \boldsymbol{n}\boldsymbol{x} &= 0 \\ g\colon\ \boldsymbol{x} &= \overrightarrow{OP} + \lambda\,\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}(\overrightarrow{OP} + \lambda\,\boldsymbol{n}) &= 0 \qquad \text{Schnitt} \\ \lambda &= -\boldsymbol{n}\,\overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OP} + 2\lambda\,\boldsymbol{n} = \overrightarrow{OP} - 2d\boldsymbol{n} \end{aligned}$$



↑ Spiegelung an einer Ebene



Von der Ebene E ist die Hessesche Normalenform $\boldsymbol{nx} - a = 0$ gegeben.
a ist der Abstand von E zum Ursprung.
Um P an E zu spiegeln, wird P an der durch den Ursprung verlaufenden parallelen Ebene E^* gespiegelt. P^* wird um den doppelten Ebenenabstand $2a$ in Richtung des Normalenvektors verschoben.

$$\overrightarrow{OP'} = (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^\top)\,\overrightarrow{OP} + 2a\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_1n_2 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1-2n_3^2 \end{bmatrix} \overrightarrow{OP} + 2a \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Mit homogenen Koordinaten kann das zu einer Matrix zusammengefasst werden.

↑ Drehmatrizen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} = [D_{x,\varphi}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^\top &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{R}^\top = \boldsymbol{R}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ 0 & \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} \\
\det \boldsymbol{R} &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1
\end{aligned}$$

Wie erwartet wird mit $\boldsymbol{R}^{-1}$ mit $-\varphi$ entgegengesetzt gedreht (sin ungerade, cos gerade).

Die definierenden Eigenschaften für eine Drehmatrix Q sind:

$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top = \boldsymbol{I}$ (Orthogonalität) und $\det Q = 1$ (Orientierung bleibt erhalten)

Mit $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top = \boldsymbol{I}$ gilt auch $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$.

In einer orthogonalen Matrix sind die Zeilen- oder Spaltenvektoren paarweise orthogonal und normiert. Die Matrix einer Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung ist orthogonal, die Determinante ist -1.

Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ mit einer orthogonalen Matrix ist längen- und winkeltreu.

$|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$

$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ Das Skalarprodukt bleibt invariant bezüglich der Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix, damit bleibt auch der Winkel zwischen den beiden Vektoren erhalten.

Beide Eigenschaften folgen direkt aus der Verschiebungseigenschaft:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a})^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\top (\boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{b}$$

$$\implies \quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{Q}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{Q}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

Eine orthogonale Matrix besitzt höchstens die reellen Eigenwerte ± 1. Ein komplexer Eigenwert hat den Betrag 1. $\quad |\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}| = |\lambda \boldsymbol{x}| = |\lambda||\boldsymbol{x}| \quad \implies \quad |\lambda| = 1$

Eine orthogonale Matrix mit Determinante 1 besitzt den Eigenwert 1.

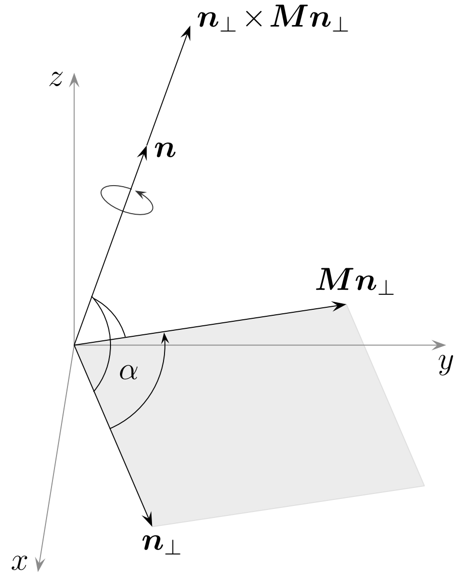
$\det(\boldsymbol{Q} - \lambda \boldsymbol{I}) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$

Das charakteristische Polynom an der Stelle $\lambda = 0$ ergibt $\det \boldsymbol{Q} = a_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Beachte: Ein komplexer Eigenwert tritt konjugiert komplex auf, hier wäre $\lambda_i\overline{\lambda_i} = 1$.

↑ Drehachse und Drehwinkel

Für die Drehachse $\boldsymbol{n}$ einer Drehmatrix $\boldsymbol{M}$ wird der Eigenvektor von $\boldsymbol{M}$ zum Eigenwert 1 (Fixvektor) berechnet.
Mit der Spur $1 + 2\cos\alpha$ der Rodrigues-Matrix kann mit der Spur S von $\boldsymbol{M}$ der Drehwinkel α zu $\boldsymbol{M}$ ermittelt werden, $\alpha = \pm \arccos \frac{1}{2}(S-1)$. $+$ wird genau dann gewählt, falls $(\boldsymbol{n}_\perp, \boldsymbol{M}\boldsymbol{n}_\perp, \boldsymbol{n})$ ein Rechtssystem bildet ($\boldsymbol{n}_\perp$ ist ein beliebiger zu $\boldsymbol{n}$ orthogonaler Vektor), also $\boldsymbol{n}_\perp \times \boldsymbol{M}\boldsymbol{n}_\perp$ und $\boldsymbol{n}$ in dieselbe Richtung weisen.



$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -2 & 11 & -10 \\ -14 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{M}$ ist eine Drehmatrix a) $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^\top = \frac{1}{15^2}\begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -2 & 11 & -10 \\ -14 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -14 \\ 10 & 11 & 2 \\ 10 & -10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\det \boldsymbol{M} = 1$ beachte: $\det \frac{1}{15}\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix} = \frac{1}{15^3} \det \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$

Drehachse

$\boldsymbol{M}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$ unterbestimmtes lineares Gleichungssystem, $\boldsymbol{n} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t = 1$

Drehwinkel
$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \tfrac{1}{2}(\text{Spur } \boldsymbol{M} - 1)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{21}{15} - 1\right)\\ \alpha &= \pm\arccos\tfrac{1}{5} \approx \pm 78{,}5^\circ\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{n}_\perp = 15\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{n}_\perp = \begin{pmatrix}15\\-12\\-9\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n}_\perp \times \boldsymbol{M}\boldsymbol{n}_\perp = 180\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$\alpha \approx -78{,}5^\circ$

Wie erwartet stimmt $\boldsymbol{M}$ für $\alpha = -\arccos\frac{1}{5}$ und $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ mit der Rodrigues-Matrix überein.

↑ Euler-Winkel für $\boldsymbol{M}$ ermitteln, $(z,\, x',\, z'')$, Standard-x-Konvention

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & 10 & 10\\ -2 & 11 & -10\\ -14 & 2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dots & \dots & \sin\alpha\sin\beta\\ \dots & \dots & -\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta\end{bmatrix}$$ siehe Euler-Matrix

$[D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha}] = [D_{z,\alpha}]\,[D_{x,\beta}]\,[D_{z,\gamma}] = \boldsymbol{M}$

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctan\frac{-\boldsymbol{M}_{23}}{\boldsymbol{M}_{13}} &&= \arctan 1 = 45^\circ\\ \beta &= \arccos\boldsymbol{M}_{33} &&= \arccos\tfrac{1}{3} \approx 70{,}5^\circ \qquad \text{für } \beta = -\arccos\boldsymbol{M}_{33} \text{ wäre } \boldsymbol{M}_{13} < 0\\ \gamma &= \arctan\frac{\boldsymbol{M}_{31}}{\boldsymbol{M}_{32}} &&= \arctan(-7) \approx -81{,}9^\circ\end{aligned}$$

$\uparrow$ Euler-Winkel für $\boldsymbol{M}$ ermitteln, $(z,\, y',\, z'')$, Standard-y-Konvention

$[D_{z,\alpha}]\,[D_{y,\beta}]\,[D_{z,\gamma}] \;=$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)-\sin(\alpha)\sin(\gamma) & -\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma)-\sin(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)+\cos(\alpha)\sin(\gamma) & -\sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma)+\cos(\alpha)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\beta)\cos(\gamma) & \sin(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \tfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -2 & 11 & -10 \\ -14 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \dots & \dots & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\beta)\cos(\gamma) & \sin(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$[D_{z'',\gamma}\circ D_{y',\beta}\circ D_{z,\alpha}] = [D_{z,\alpha}]\,[D_{y,\beta}]\,[D_{z,\gamma}] = \boldsymbol{M}$

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\tfrac{\boldsymbol{M}_{23}}{\boldsymbol{M}_{13}} &&= \arctan(-1) = -45^\circ \\ \beta &= \arccos \boldsymbol{M}_{33} &&= \arccos\tfrac{1}{3} \approx 70{,}5^\circ \qquad \text{für } \beta = -\arccos\boldsymbol{M}_{33} \text{ wäre } \boldsymbol{M}_{13} < 0 \\ \gamma &= \arctan\tfrac{-\boldsymbol{M}_{32}}{\boldsymbol{M}_{31}} &&= \arctan\tfrac{1}{7} \approx 8{,}1^\circ \end{aligned}$$

↑ Lineare Abbildungen, Drehung, Additionstheoreme

Quaternionen und Drehungen

Startseite