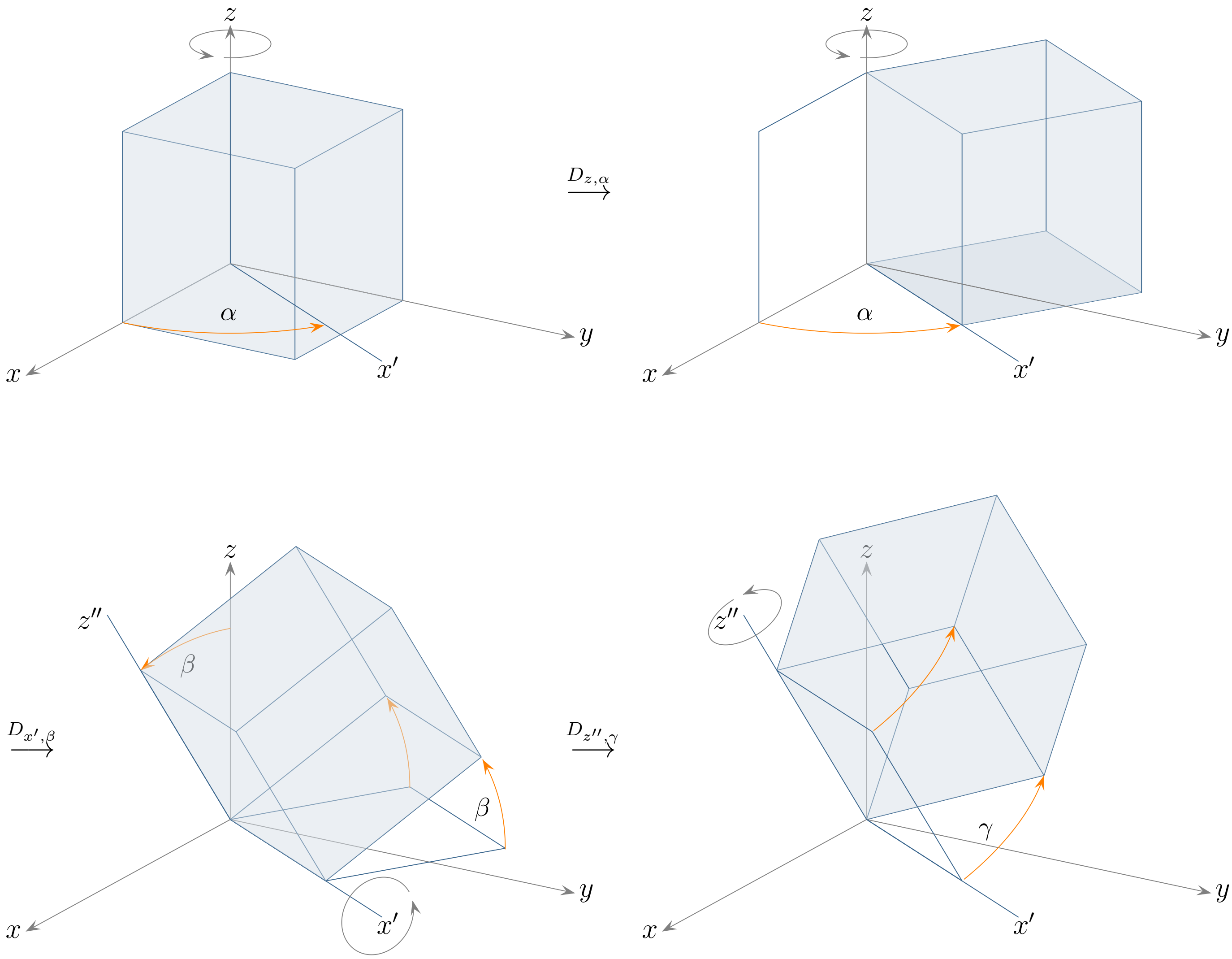
Eulerwinkel

Die Drehlage eines Körpers kann durch drei aufeinanderfolgende Drehungen $D_{z,\alpha}$, $D_{x',\beta}$ und $D_{z'',\gamma}$, also durch drei Winkel, erfasst werden, $x \to x' \to x'' \to x'''$. Anfänglich stimmen das kartesische (raumfeste) Koordinatensystem mit dem körperfesten überein. Eine Zerlegung in Drehungen, bei denen jeweils um mitgedrehte Koordinatenachsen gedreht wird, nennt man intrinsische Drehfolge. Umgekehrt kann ein verdrehter Körper zurückgedreht werden, d. h. körperfestes und raumfestes Koordinatensystem werden zur Deckung gebracht, indem zuerst die körperfeste x''-Achse mit $D_{z'',-\gamma}$ in die xy-Ebene gedreht wird.



Der Vorteil dieser Betrachtung der Drehlage eines Körpers besteht nun darin, dass die Drehung $D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha}$ (rechts beginnend) durch drei Drehungen um die x-, y- und z-Achse, deren Drehmatrizen bekannt sind, ausgedrückt werden kann (extrinsische Drehfolge).

Zunächst ist erkennbar: $D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} = D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta}$

Anspruchsvoller direkt einzusehen ist: $D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} = D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma}$

Um am Ende den Körper mit $D_{z'',\gamma}$ auf der linken Seite zu drehen, erfolgt dies auf der rechten Seite am Anfang mit $D_{z,\gamma}$.

formale Begründung

Idee: Die Drehung um eine körperfeste Achse wird auf die Drehung um die entsprechende Koordinatenachse zurückgeführt.

$$D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} \stackrel{!}{=} D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma}$$

$$\begin{aligned}
D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} &= D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \\
D_{x',\beta} &= D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\alpha}^{-1} \\
D_{z'',\gamma} &= (D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha}) \circ D_{z,\gamma} \circ (D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha})^{-1} \\
D_{z'',\gamma} &= (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta}) \circ D_{z,\gamma} \circ (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta})^{-1} \\
D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha} &= (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta}) \circ D_{z,\gamma} \circ (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta})^{-1} \circ (D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta}) \\
&= D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma}
\end{aligned}$$

Beachte die umgekehrte Reihenfolge.

Für die Drehmatrizen (siehe hier) bedeutet das:

$$[D_{z'',\gamma} \circ D_{x',\beta} \circ D_{z,\alpha}] = [D_{z,\alpha}]\,[D_{x,\beta}]\,[D_{z,\gamma}]$$

$$[D_{x,\varphi}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad [D_{y,\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad [D_{z,\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

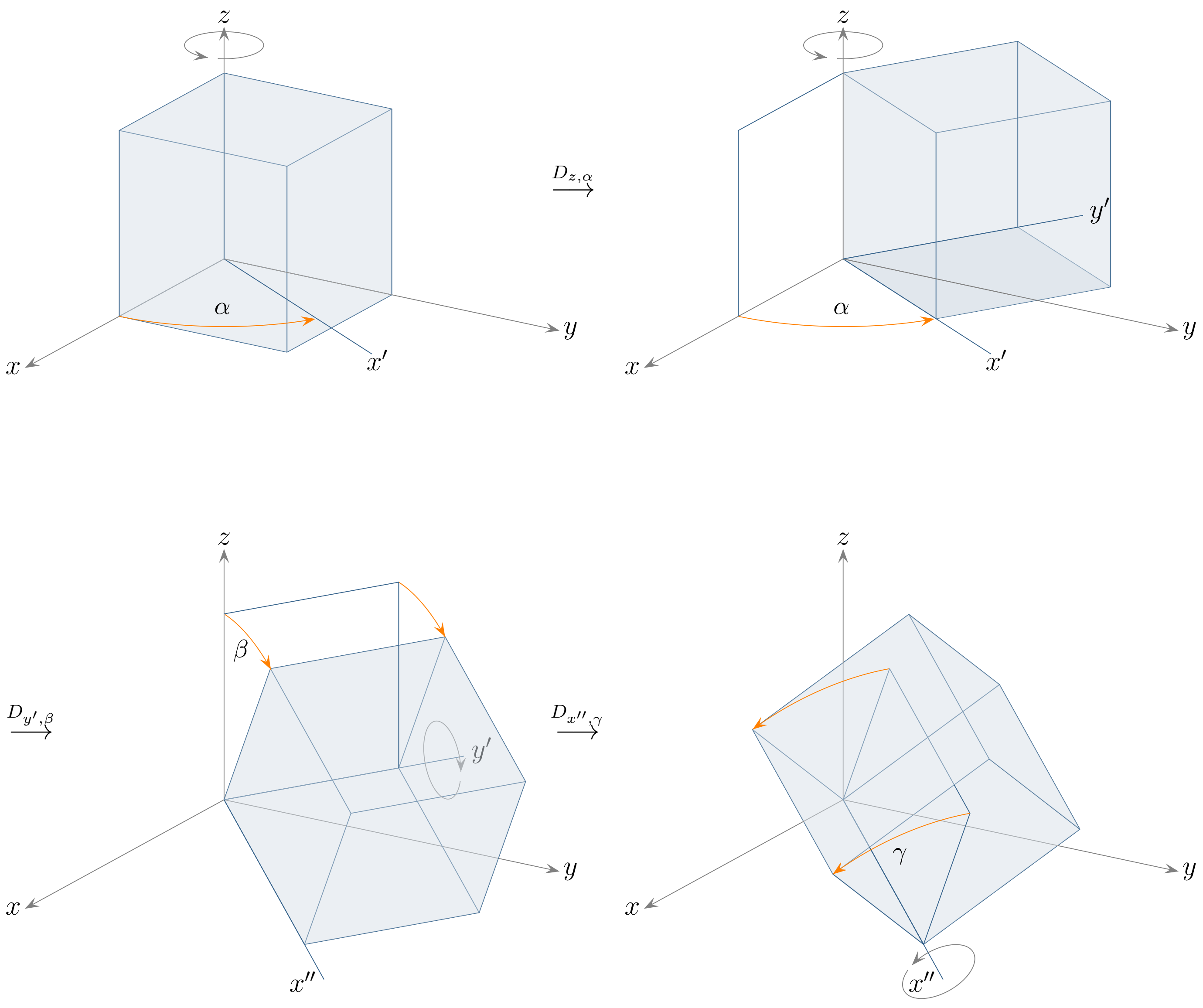
$$[D_{z,\alpha} \circ D_{x,\beta} \circ D_{z,\gamma}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Neben der hier gewählten Wahl der Achsen $(z,\, x',\, z'')$ (Standard-x-Konvention) für die Eulerwinkel bestehen die Möglichkeiten:

$(z,\, y',\, z'')$ Standard-y-Konvention
$(y,\, x',\, y'')$
$(y,\, z',\, y'')$
$(x,\, y',\, x'')$
$(x,\, z',\, x'')$

Bei den Kardan-Winkeln (nach Cardano) erfolgen die Drehungen gemäß
$(z,\, x',\, y'')$
$(z,\, y',\, x'')$
$(y,\, x',\, z'')$
$(y,\, z',\, x'')$
$(x,\, y',\, z'')$
$(x,\, z',\, y'')$

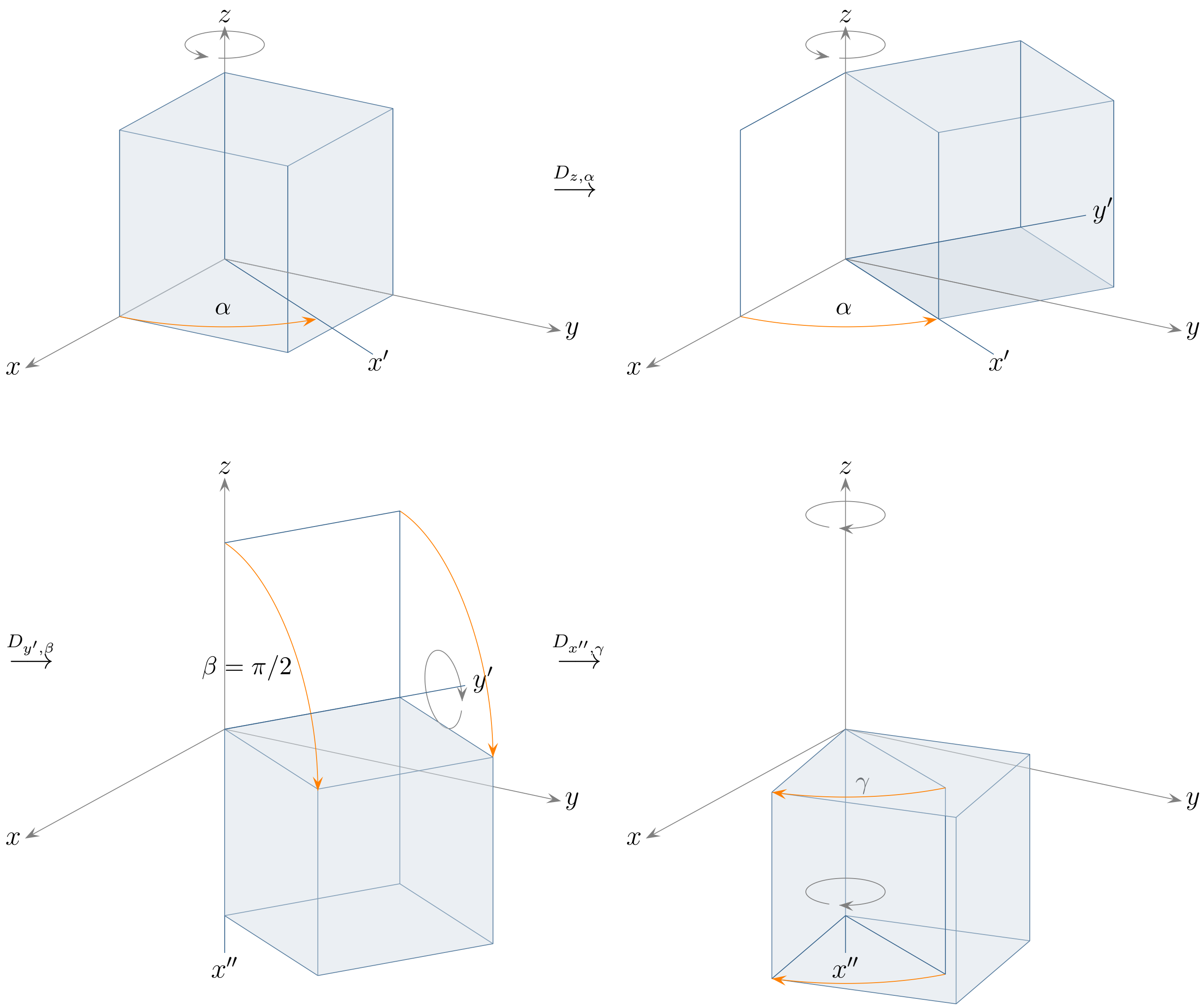
Kardan-Winkel $(z,\, y',\, x'')$



$$[D_{x'',\gamma} \circ D_{y',\beta} \circ D_{z,\alpha}] = [D_{z,\alpha}]\,[D_{y,\beta}]\,[D_{x,\gamma}]$$

Gimbal Lock zu $(z,\, y',\, x'')$

Eine intrinsische Drehfolge wird technisch durch eine kardanische Aufhängung (engl. gimbal) realisiert. Sie besteht aus einen Ring, in dem zwei weitere Ringe, die Achsen jeweils um 90° gegeneinander versetzt, ineinander drehbar gelagert werden. Deren Drehachsen werden jeweils von den vorherigen Drehungen mitbestimmt. Der Körper wird am innersten Ring befestigt. Bei der Drehfolge $(z,\, y',\, x'')$ entspricht z der Drehachse des äußeren Rings. Mit einer kardanischen Aufhängung kann z. B. eine Drohnen-Kamera stabilisiert, bzw. gezielt ferngesteuert werden.



Ein Problem entsteht, wenn die Achse der ersten Drehung und die der dritten für $\beta = \pi/2$ zusammenfallen. Eine Veränderung der Winkel α und γ bewirkt eine Drehung um dieselbe Achse. Die Bewegungsmöglichkeiten sind nun eingeschränkt, es fehlt ein Freiheitsgrad. Dieser Fall tritt bei allen Drehfolgen ein, wenn zwei Drehachsen übereinstimmen (lock engl. Blockierung, Verriegelung, Sperre).

Gimbal Lock zu $(z,\, y',\, x'')$

Die beschriebene Situation spiegelt sich in der Gesamtdrehmatrix wider,
da sie nur noch von der Differenz $\alpha - \gamma$ abhängig ist.

$[D_{x'',\gamma} \circ D_{y',\beta} \circ D_{z,\alpha}] = [D_{z,\alpha}]\,[D_{y,\beta}]\,[D_{x,\gamma}], \quad \beta = \pi/2$

$$[D_{x,\gamma}] \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}, \qquad [D_{y,\beta}] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [D_{z,\alpha}] \;=\; \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D_{z,\alpha} \circ D_{y,\beta} \circ D_{x,\gamma}] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma \\ 0 & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha-\gamma) & \cos(\alpha-\gamma) \\ 0 & \cos(\alpha-\gamma) & \sin(\alpha-\gamma) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hier wären Überlegungen anzustellen, wie ein Gimbal Lock verhindert werden kann.

Lineare Abbildungen, Drehung, Additionstheoreme

Quaternionen und Drehungen

Startseite