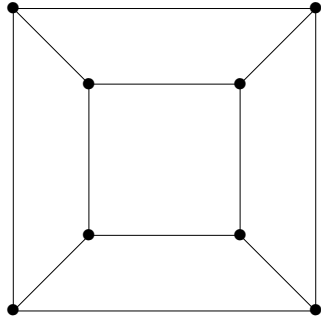


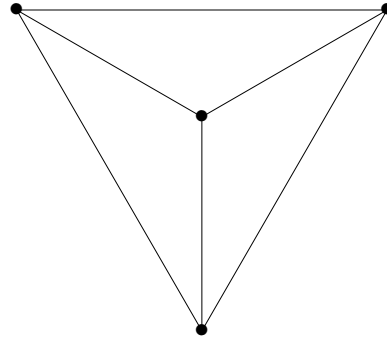
# Eulerscher Polyedersatz

„Man muss einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist.“ Pólya

Für konvexe Polyeder gilt: Anzahl Flächen ( $F$ ) + Anzahl Ecken ( $E$ ) = Anzahl Kanten ( $K$ ) + 2



Das Netz entsteht aus einem Würfel.



Das Netz entsteht aus einem Tetraeder.

Um die Polyederformel zu begründen, stellen wir uns vor, dass die Oberfläche des hohlen Polyeders aus einer Gummihaut besteht. Wenn wir nun eine Fläche des Polyeders herausschneiden, können wir die übrige Oberfläche so deformieren, dass sie letztendlich flach in einer Ebene liegt. Das Netz in der Ebene enthält dieselbe Anzahl an Ecken, Kanten und Flächen (mit Außenfläche) wie das ursprüngliche Polyeder.

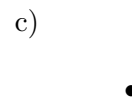
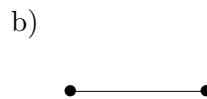
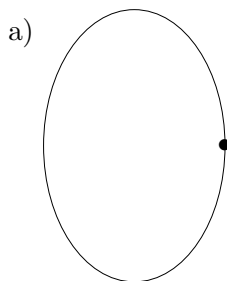
Füge weitere Kanten und Ecken hinzu und untersuche die neue Situation.

Für einen wasserdichten Beweis, es gibt über zwanzig, sind wir auf einem guten Weg.

Die Beziehung  $F + E = K + 2$  gilt auch für Körper, deren Oberfläche sich stetig in eine Kugeloberfläche verformen lassen. Kanten können dann bogenförmig sein.

Beachte, dass das rechte Netz aus dem linken dadurch entsteht, indem die mittlere quadratische Fläche zu einer Ecke zusammengezogen wird. Der Zusammenhang  $F + E = K + 2$  bleibt erhalten.

In der Literatur anzutreffende Induktionsanfänge für die Induktion nach der Anzahl der Kanten:



Zu jedem konvexen Polyeder gibt es einen planaren Graphen (Kanten schneiden sich nicht) mit derselben Beziehung zwischen Flächen, Ecken und Kanten. Die Umkehrung gilt nicht. Nicht zu jedem planaren Graphen existiert ein konvexes Polyeder. Das ist aber ohne Belang.

Für jeden planaren Graph gilt bereits  $F + E = K + 2$ . Der einfachste planare Graph besteht aus nur einer Ecke. Es gibt eine Fläche (die Außenfläche) und keine Kanten. Es gilt also  $1 + 1 = 0 + 2$ .

Aus diesem einfachsten Graphen können alle weiteren sukzessive durch die beiden folgenden Operationen konstruiert werden, welche die Gültigkeit der Beziehung nicht verändern:

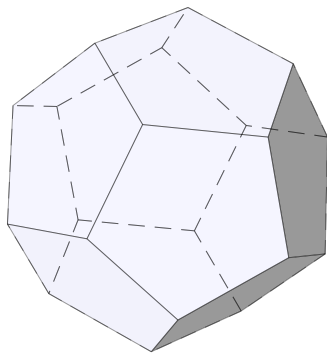
- 1) Hinzufügen einer Ecke, die über eine neue Kante mit dem Rest des Graphen verbunden ist.  
Die Anzahl der Ecken und Kanten steigt jeweils um 1, während die Anzahl der Flächen gleich bleibt.
- 2) Hinzufügen einer Kante, die zwei bereits bestehende Ecken verbindet.  
Während die Anzahl der Ecken gleich bleibt, steigt die Anzahl der Kanten und Flächen jeweils um 1.



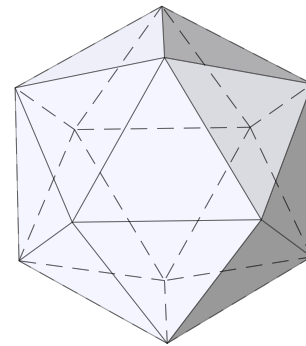
Alternatives sukzessives Vorgehen:

Verschmelze zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind.

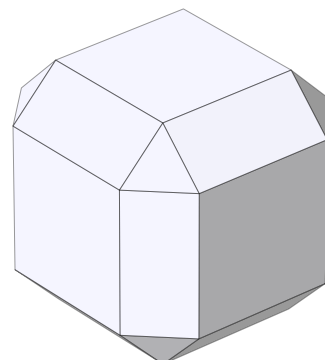
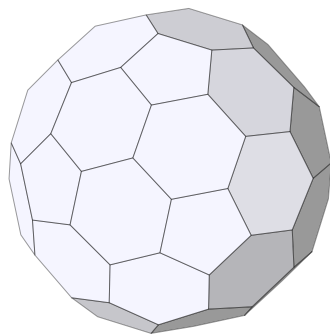
Ein Graph mit nur einer Ecke hat nur Kanten, deren Anfangs- und Endpunkt diese Ecke ist. Jede dieser Kanten schließt eine Fläche ein.



Dodekaeder



Ikosaeder



## Warum gibt es nur fünf platonische Körper?

Ein platonischer Körper (konvexes Polyeder, bei dem jede Fläche ein regelmäßiges Polygon ist) bestehe aus  $p$ -Ecken (z.B. 3-Ecken), und es treffen sich  $q$  an jeder Ecke.

Für die Ecken gilt  $qE = 2K$ .

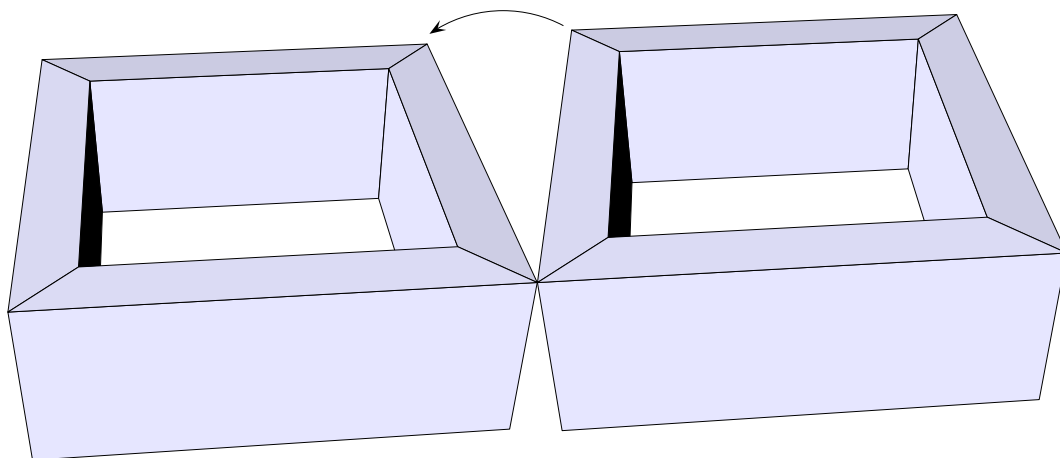
Für die Flächen gilt  $pF = 2K$ .

Nach  $E$ , bzw.  $F$  umstellen und in die Polyederformel einsetzen ergibt:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K} > \frac{1}{2}$

Die einzigen ganzzahligen Lösungen der Ungleichung sind die fünf Körper.

| Name        | Tetraeder | Oktaeder | Ikosaeder  | Hexaeder | Dodekaeder |
|-------------|-----------|----------|------------|----------|------------|
| $p$ -Ecke   | 3         | 3        | 3          | 4        | 5          |
| $q$ an Ecke | 3         | 4        | 5          | 3        | 3          |
| $F, E, K$   | 4, 4, 6   | 8, 6, 12 | 20, 12, 30 | 6, 8, 12 | 12, 20, 30 |

## Euler-Charakteristik $\chi$



Der Polyedersatz  $F + E - K = 2$  lässt sich verallgemeinern.

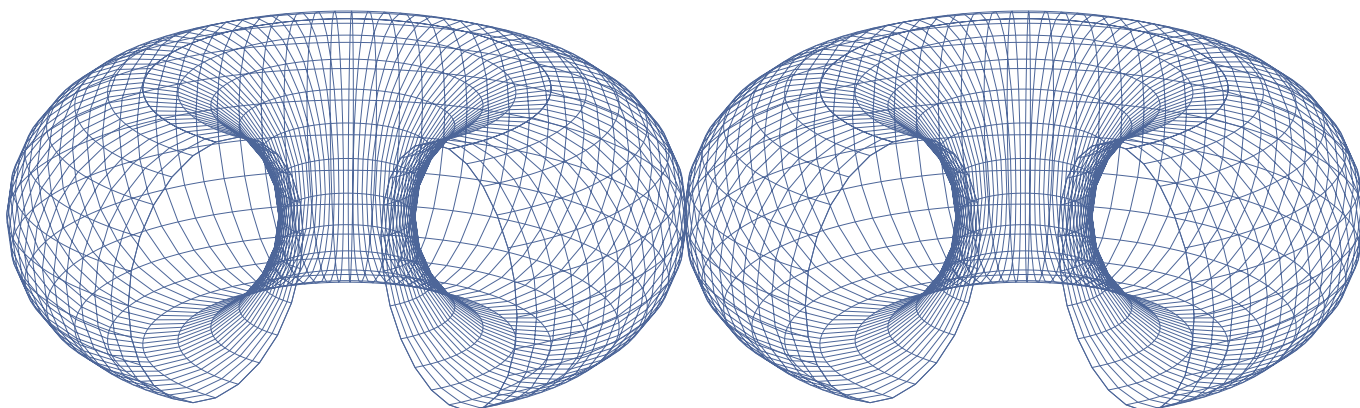
Für einen Quader mit Loch gilt: Anzahl Flächen (F) + Anzahl Ecken (E) - Anzahl Kanten (K) =  $2 - 2g$

Werden zwei Quader mit Loch verklebt, d.h. zwei gleichgroße Flächen der Quader, so gilt:

$F + E - K = 2 - 2g$ ,  $g$  Anzahl der Löcher, hier  $g = 2$ ,  $\chi = 2 - 2g$  ist die Euler-Charakteristik,  $g$  das Geschlecht der Oberfläche. Der Torus hat die Euler-Charakteristik 0. Für eine Verklebung erhalten wir

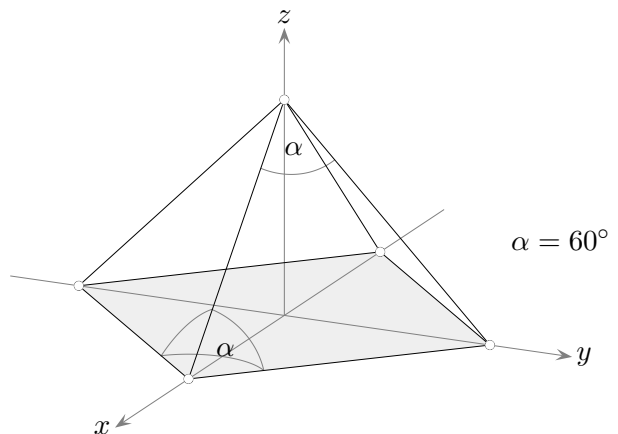
$$\begin{array}{r}
 F_1 + E_1 - K_1 = 2 - 2g_1 \\
 F_2 + E_2 - K_2 = 2 - 2g_2 \\
 \hline
 (F_1 + F_2 - 2) + (E_1 + E_2 - 4) - (K_1 + K_2 - 4) = 4 - 2(g_1 + g_2) - 2 \\
 F' + E' - K' = 2 - 2(g_1 + g_2)
 \end{array}$$

Durch die beiden Verklebeflächen verringert sich die Anzahl der Flächen um 2.  
 8 Kanten (Ecken) werden verklebt, 4 bleiben übrig.



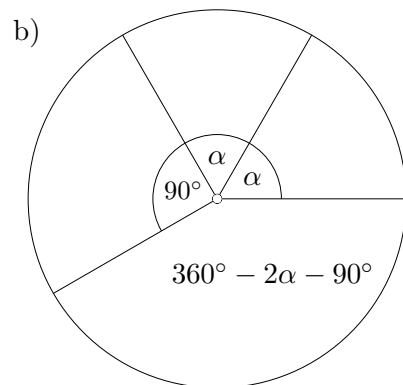
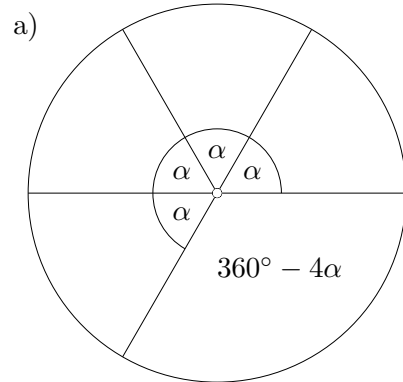
Durch jeden der  $g$  verklebten Tori (hier  $g = 2$ ) verringert sich die Euler-Charakteristik also um 2.  
 Im Allgemeinen erfolgt eine Verklebung entlang eines Dreiecks einer Triangulierung.  
 Die Überlegungen sind vom gewählten Gitter unabhängig.

# Winkeldefizite



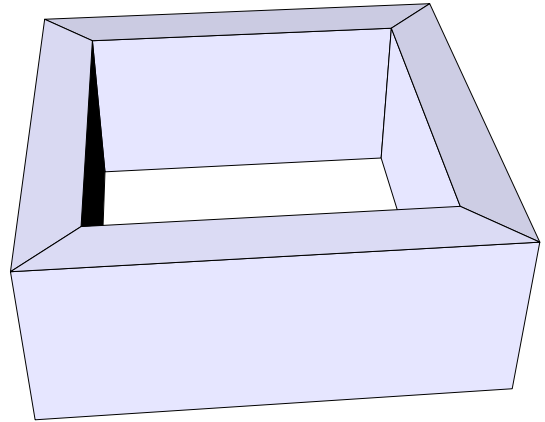
Für eine regelmäßige Pyramide mit quadratischer Grundfläche bilden wir für jede Ecke das Winkeldefizit,  $d_k = 360^\circ - \text{Summe der Winkel der Seitenflächen, die an der Ecke zusammenstoßen}$ . a) beinhaltet das Winkeldefizit der Pyramidenspitze, b) das einer Ecke der Grundfläche.

Die Summe aller Winkeldefizite beträgt  $\sum_{k=1}^5 d_k = 360^\circ - 4\alpha + 4(360^\circ - 2\alpha - 90^\circ) = 720^\circ = 4\pi$ .



Wie groß ist die Summe aller Winkeldefizite bei einem Quader mit einem Loch?

# Winkeldefizite



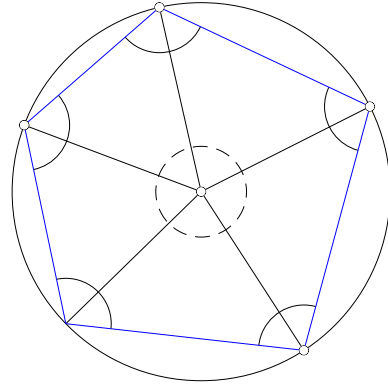
Zunächst haben wir außen acht Ecken mit je einem Winkeldefizit von  $360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ$ .

Für eine der acht zum Lochrand gehörenden Ecken erhalten wir das Winkeldefizit

$360^\circ - (270^\circ + 2 \cdot 90^\circ) = -90^\circ$ . Die Summe aller Winkeldefizite ist  $\sum_{k=1}^{16} d_k = 0$ .

Vermutung: Bei einem Polyeder mit/ohne Loch beträgt die Summe aller Winkeldefizite  $\sum_{k=1}^E d_k = 2\pi\chi$ .

## Gauss-Bonnet diskrete Version



Die Fläche  $F_i$  hat  $K_i$  **Kanten**,  $i = 1 \dots F$ .

Für  $F_i$  beträgt die Summe der Innenwinkel  $\alpha_i = \pi \cdot K_i - 2\pi = (K_i - 2)\pi$ .

Die Innenwinkel der  $K_i$  Dreiecke werden summiert und der Vollwinkel subtrahiert.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^F \alpha_i &= \sum_{i=1}^F (K_i - 2)\pi && \text{Summe aller Innenwinkel, Anzahl der Flächen } F \\ &= \sum_{i=1}^F \pi K_i - \sum_{i=1}^F 2\pi \\ &= 2\pi K - 2\pi F && \text{Eine Kante gehört zu zwei Flächen.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^E d_k &= 2\pi E - (2\pi K - 2\pi F) && \text{Summe aller Winkeldefizite, Anzahl der Ecken } E \\ &= 2\pi(E + F - K) \\ &= 2\pi\chi \end{aligned}$$

Satz von Gauß-Bonnet  $\int_M K dA = 2\pi\chi(M)$

Verformt man eine Fläche  $M$ , so bleibt ihre Euler-Charakteristik unverändert, im Gegensatz zur lokalen Gaußkrümmung  $K$ . Der Satz sagt aus, dass das Integral über die Krümmung, also die Gesamtkrümmung, unverändert bleibt.

Für eine Fläche  $M$  mit Rand gilt  $\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M)$ ,  $k_g$  ist die **geodätische Krümmung**.

Die geodätische Krümmung  $\kappa_g$  ist die Krümmung der in die Tangentialebene projizierten Kurve. Kurven mit der geodätischen Krümmung 0 werden als Geodäten bezeichnet und bilden den (lokal) kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten auf der Fläche. Die geodätische Krümmung ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von der geodätischen Linie.

# Gauss-Bonnet

Satz (Gauß 1827)

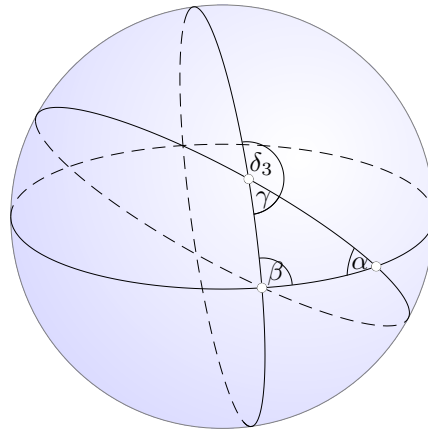
Für ein geodätisches Dreieck gilt  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} K dA$ , siehe Winkelabweichung eines sphär. Dreiecks.

alternative Formulierung:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} K dA$$

$$|\alpha = \pi - \delta_1, \beta = \pi - \delta_2, \gamma = \pi - \delta_3, \text{ Außenwinkel } \delta_i$$

$$2\pi = \int_{\Delta} K dA + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$$



Die Idee zum Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet ist, dass bei einem Körper die Triangulierung mit infinitesimalen (d. h. hinreichend kleinen, der Näherungsfehler bei der Summation kann vernachlässigt werden) sphärischen Dreiecken erfolgt.

$$\begin{aligned} \int_M K dA &= \sum_{i=1}^F \int_{\Delta_i} K dA \\ &= \sum_{i=1}^F (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) \\ &= 2\pi E - \pi F \end{aligned}$$

$$| 3F = 2K, \text{ d. h. } F = 2K - 2F$$

Für disjunkte Dreiecke gilt  $K = 3F$ .

Hierbei wird jede Kante doppelt gezählt.

Eine Kante trennt zwei Flächen,  $K = 3/2 F$ .

$$= 2\pi E + 2\pi F - 2\pi K = 2\pi\chi(M)$$

Idee für die (aufwändige) Verallgemeinerung der Euler-Charakteristik auf  $n$  Dimensionen

$$\chi(M) = E - K + F$$

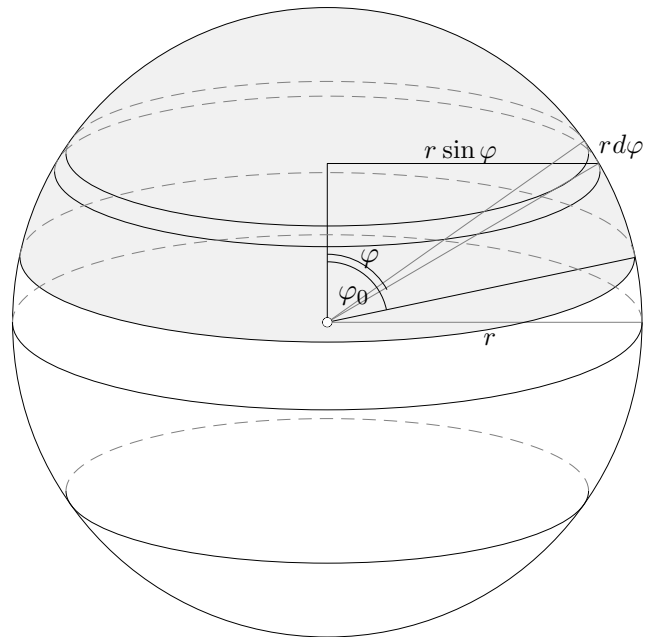
$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

$$|\alpha_0 = E \text{ 0-dimensional, } \alpha_1 = K \text{ 1-dimensional, } \alpha_2 = F \text{ 2-dimensional}$$

$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \mp \dots + (-1)^n \alpha_n \quad |\alpha_i \text{ Anzahl der } i\text{-dimensionalen Simplexe von } M$$



## Gauss-Bonnet Beispiel



Für ein Kugelsegment gilt:  $\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi$

$k_g$  ist die ↑ geodätische Krümmung eines Breitenkreises,  $M$  die ↑ Mantelfläche.

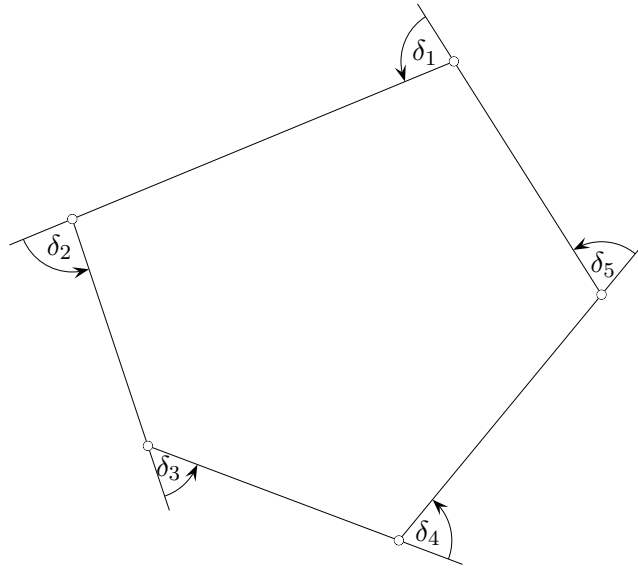
$$\int_M K dA = \frac{1}{r^2} 2\pi r^2 (1 - \cos \varphi_0)$$

$$\int_{\partial M} k_g ds = \frac{\cos \varphi_0}{r \sin \varphi_0} \cdot 2\pi r \sin \varphi_0$$

---

$$2\pi(1 - \cos \varphi_0) + 2\pi \cos \varphi_0 = 2\pi$$

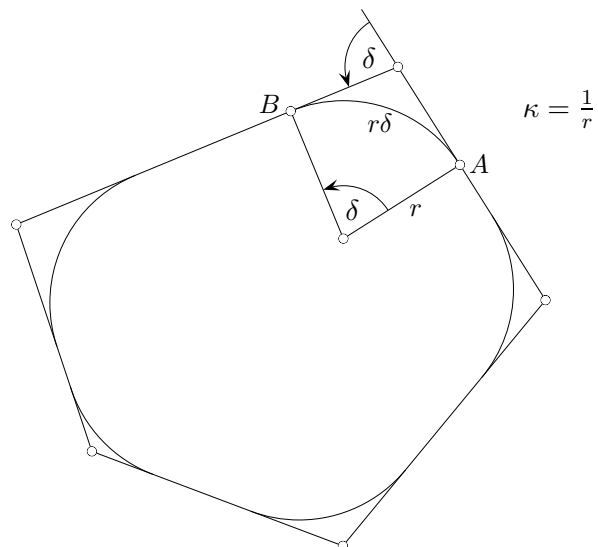
## Flächenkrümmung $K = 0$



$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 = 2\pi$$

Die Summe der Außenwinkel eines konvexen Polygons beträgt unabhängig von der Anzahl der Ecken stets  $360^\circ$ .

Wir laufen auf dem Rand ums Polygon und beginnen auf einer Kante. In den Ecken müssen wir uns jeweils um die Winkel  $\delta_i$  drehen. Am Anfangspunkt angelangt, haben wir uns insgesamt um  $360^\circ$  gedreht.

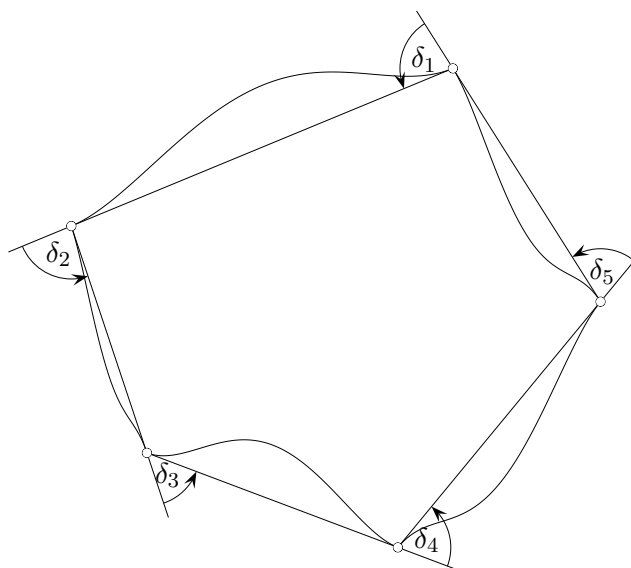


Das Polygon wurde mit Kreisbögen geglättet.

$$\begin{aligned} \delta &= \kappa \cdot r\delta \\ &= \int_A^B \kappa ds \end{aligned}$$

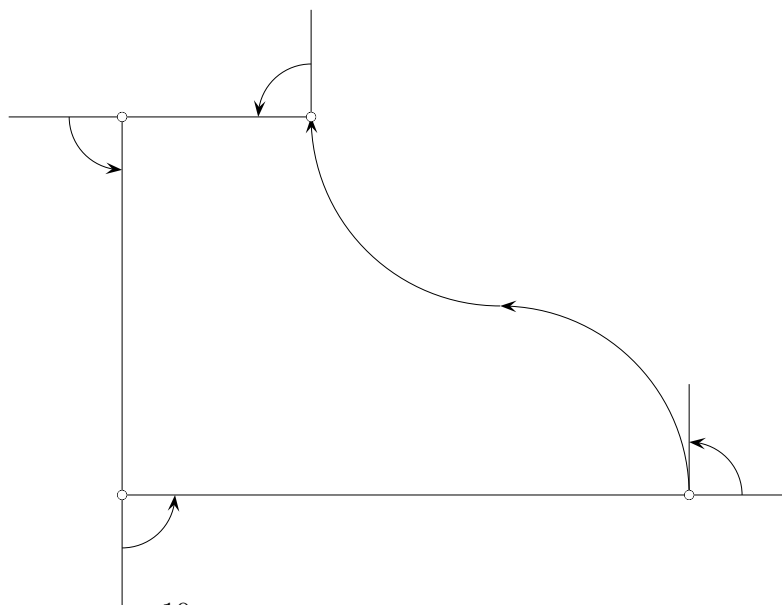
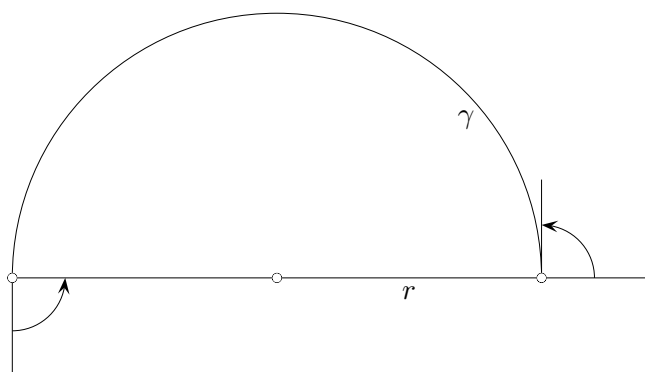
$$2\pi = \int_\gamma \kappa ds \quad \text{Naheliegender für eine Kurve } \gamma, \text{ infinitesimale Summation von } \kappa ds = d\varphi, \quad \kappa = \frac{d\varphi}{ds}.$$

# Flächenkrümmung $K = 0$



Für eine stückweise glatte geschlossene Kurve mit Teilkurven  $\gamma_i$  und Außenwinkeln  $\delta_i$  gilt:

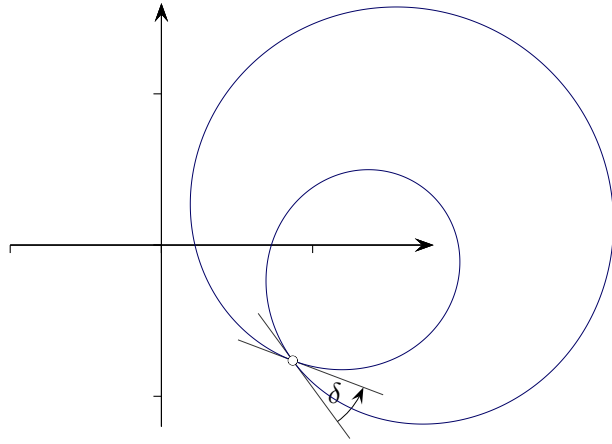
$$2\pi = \sum \int_{\gamma_i} \kappa ds + \sum \delta_i$$



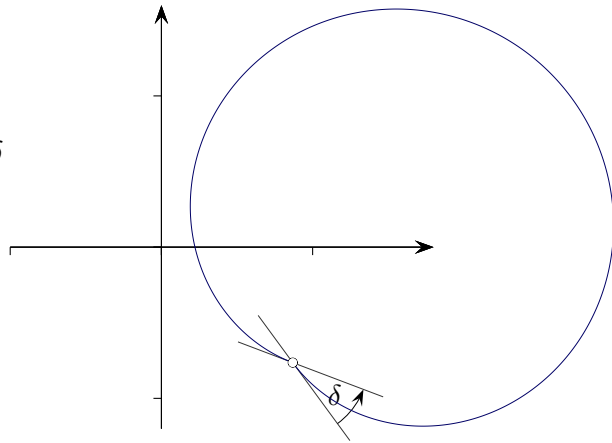
Die Beiträge der Viertelkreise heben sich auf, eine Krümmung ist positiv, die andere negativ. Die Summe der verbleibenden Außenwinkel ist  $2\pi$ .

# Windungen

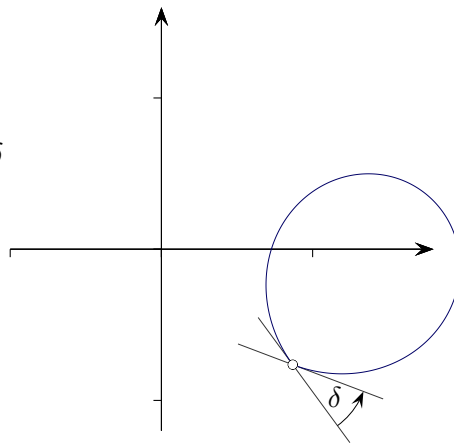
$$\int_{\gamma} \kappa ds = 4\pi$$



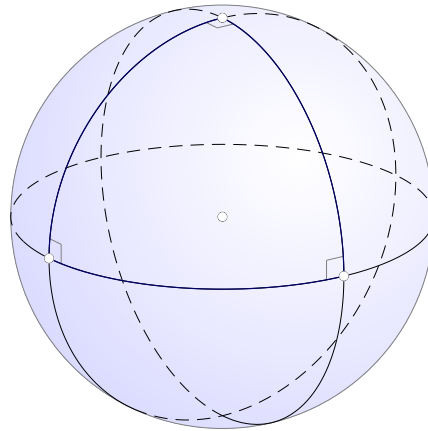
$$\int_{\gamma_1} \kappa ds = 2\pi - \delta$$



$$\int_{\gamma_2} \kappa ds = 2\pi + \delta$$



# Gauss-Bonnet



$$K = \frac{1}{r^2}$$

$K$  Gaußsche Krümmung der Sphäre mit dem Radius  $r$

$$A_{\Delta} = \frac{4\pi r^2}{8}$$

$A_{\Delta}$  achter Teil der Oberfläche

$$\int_{\Delta} K dA = \frac{1}{r^2} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \int_{\Delta} K dA = 2\pi$$

Gauss-Bonnet

$$\int_M K dA + \sum \int_{\gamma_i} \kappa_g ds + \sum \delta_i = 2\pi$$

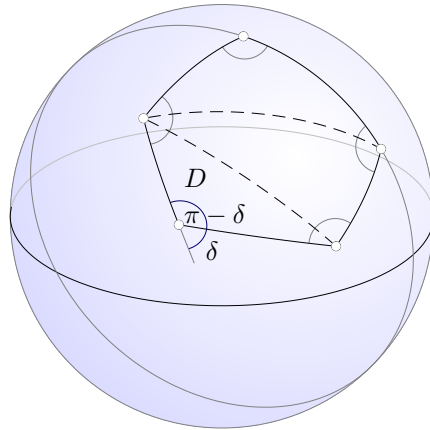
Gauss-Bonnet

$M$  Fläche mit stückweise glattem Rand  $\gamma_i$

$\kappa_g$  geodätische Krümmung

$\delta_i$  Außenwinkel

## Geodätisches Polygon



Für ein geodätisches Dreieck (siehe Winkelabweichung eines sphärischen Dreiecks) auf einer Kugel mit dem Radius  $R$  gilt:

$$D = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

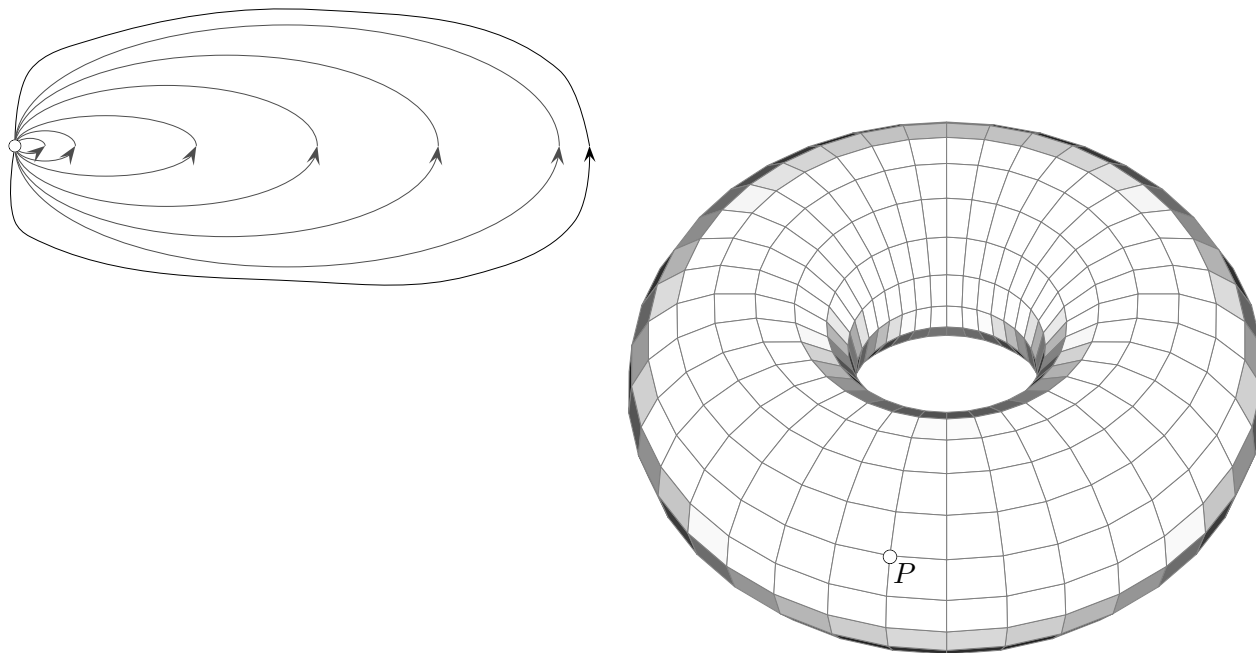
Dann folgt für ein geodätisches Polygon mit  $n$  Ecken für eine Unterteilung in  $n - 2$  Dreiecke:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{n-2} D_i = R^2 \left[ \sum_{i=1}^{n-2} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) - (n-2) \cdot \pi \right] \\ &= R^2 \left[ \sum_{j=1}^n (\pi - \delta_j) - (n-2) \cdot \pi \right] && \text{|Innenwinkel } \pi - \delta_j \\ &= R^2 \left[ 2\pi - \sum_{j=1}^n \delta_j \right] && \text{|Außenwinkel } \delta_j \end{aligned}$$

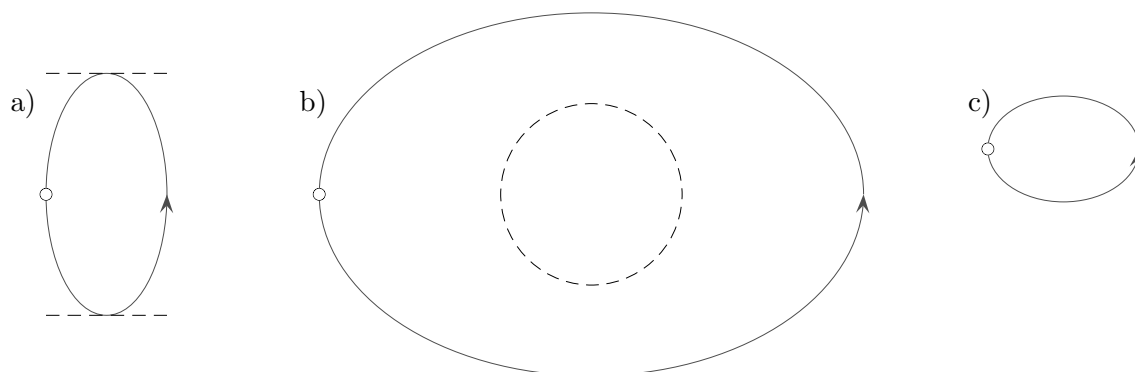
Ein geodätisches Polygon auf einer Kugel ist ein Polygon, dessen Seiten durch Großkreise (Geodäten) gebildet werden.

# Fundamentalgruppe

Einem Torus (z. B.) kann eine Gruppe zugeordnet werden, die mit seiner Topologie verknüpft ist (Henri Poincaré 1895). Die untere Abbildung zeigt eine geschlossene *nullhomotope* Kurve, sie lässt sich zu einem Punkt zusammenziehen. Dies ist nicht für alle geschlossenen Kurven auf dem Torus möglich.



Wir betrachten Kurven auf dem Torus, die alle einen gewählten Punkt  $P$  als Anfang- und Endpunkt haben. Dadurch wird ein Aneinanderhängen (Konkatenation) von Schleifen möglich. Das  $n$ -malige Durchlaufen einer Schleife stellt eine neue Schleife dar. Bis auf stetige Verformbarkeit gibt es auf dem Torus 3 Arten von geschlossenen Kurven. Diese Homotopieklassen bilden die Elemente der Fundamentalgruppe. Sie ist abelsch und wird von den Schleifen a) und b) erzeugt, c) ist das neutrale Element. Eine Umkehrung der Orientierung ergibt das inverse Element.



Nur c) lässt sich zu einem Punkt zusammenziehen.

Der Torus besitzt offensichtlich die Fundamentalgruppe  $\pi(\text{Torus}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

$\pi(\text{Torus}) = \pi(S^1 \times S^1) = \pi(S^1) \times \pi(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $S^1$  Rand des Einheitskreises,  $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$   
 Da der Torus *wegzusammenhängend* ist, hängt die Fundamentalgruppe nicht vom Basispunkt  $P$  ab.  
 Die Fundamentalgruppe der Sphäre ist trivial.

# Überlagerungen



# Anwendungen der Fundamentalgruppe

Startseite