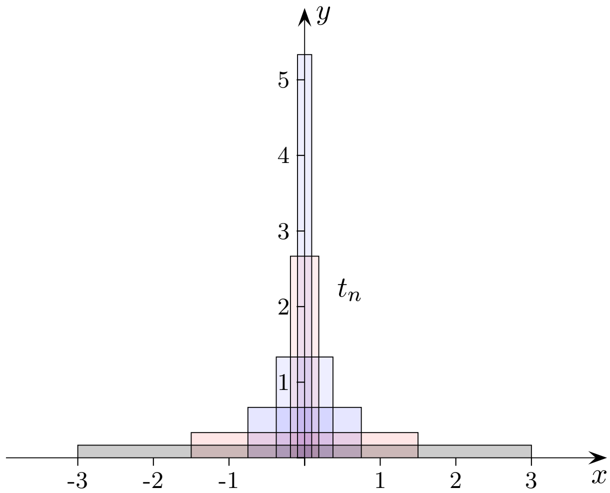
Delta-Funktion

Dirac 1927



Phänomene wie Spannungsimpuls und Kraftstoß ↑ wirken nur über sehr kurze Zeitintervalle und führen oftmals auf eine Differenzialgleichung der Form $ay'' + by' + cy = \uparrow$.
Zur mathematischen Beschreibung eignen sich Funktionsfolgen t_n, die bis auf $x = 0$ gegen null konvergieren und den konstanten Flächeninhalt 1 (= Impuls) mit der x-Achse einschließen.
$t_n(0)$ muss dann gegen Unendlich streben, so dass es zwar keine Grenzfunktion gibt, wohl aber einen Grenzwert der Integral-Werte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t_n(x)\,dx$.

Man macht sich leicht klar, dass für eine Funktion f gilt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot t_n(x)\,dx \;\longrightarrow\; f(0)$

Für ein sehr schmales Rechteck mit $t_n \cdot \Delta x = 1$ ist eine stetige Funktion f im Bereich Δx nahezu konstant, so dass das Integral durch $f(0)\cdot t_n \cdot \Delta x = f(0)$ approximiert wird.

Für die Einheits-Impuls-Funktionenfolge t_n wird die Abkürzung δ verwendet.

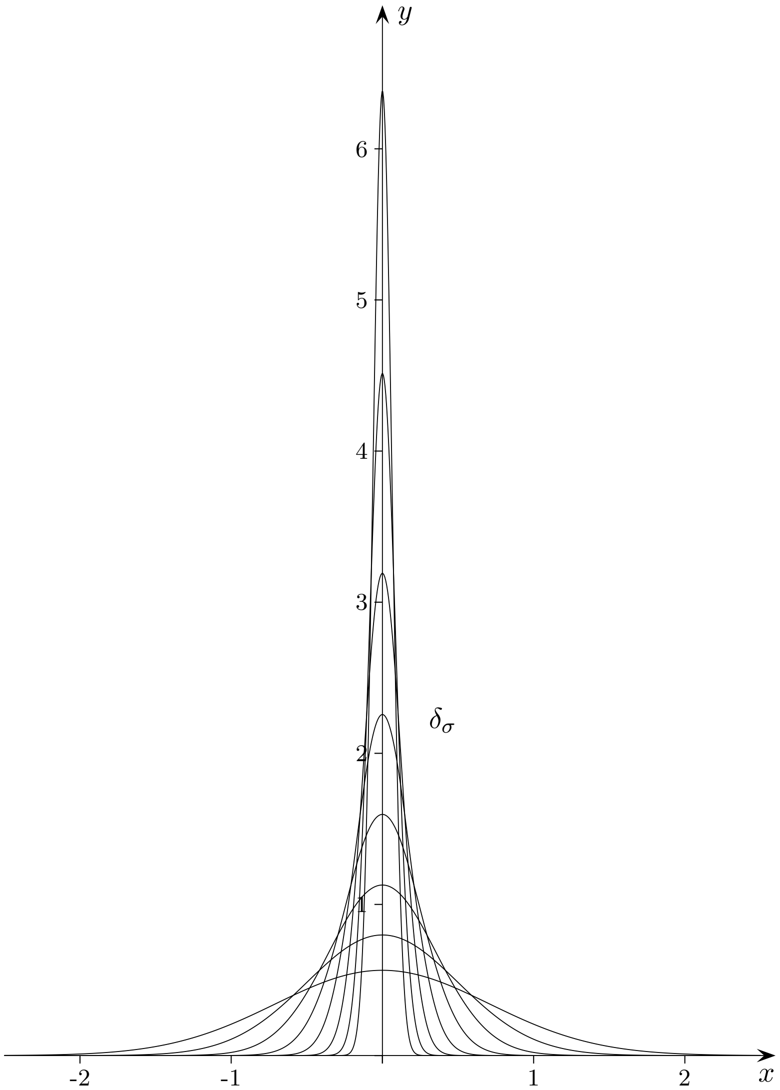
Damit wird auch die abkürzende Schreibweise $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \delta(x)\,dx = f(0)$ verständlich.

Die Funktionenfolge δ und deren Verschiebung $\delta(x-a)$ treten überwiegend in Verbindung mit der Integration auf, wobei Grenzwerte in einfacher Weise gebildet werden.
Luschigerweise wird $\lim\limits_{n\to\infty}$ eingespart und δ als Funktion bezeichnet.

Green (1793-1841) befasste sich als Erster mit idealisierten Impulsen, die nicht mit normalen Funktionen erfasst werden können. Heaviside (1850-1925) entwickelte die Idee weiter und wandte sie effektiv zur Lösung physikalischer Probleme an. Die spöttische Haltung der Mathematiker änderte sich erst, als Dirac sogenannte verallgemeinerte Funktionen in der Quantenphysik verwendete.

Dirac-Folge

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$



Eine stetig differenzierbare Funktionenfolge ist durch die Normalverteilungen gegeben, $\sigma \to 0$.
Es gibt viele andere geeignete Funktionenfolgen. Deren Funktionsterme treten in den Anwendungen jedoch nicht in Erscheinung.

Für die Ableitungen δ'_σ gilt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta'_\sigma(x)\, dx \;\longrightarrow\; -f'(0)$, unmittelbar mit partieller Integration einsehbar,

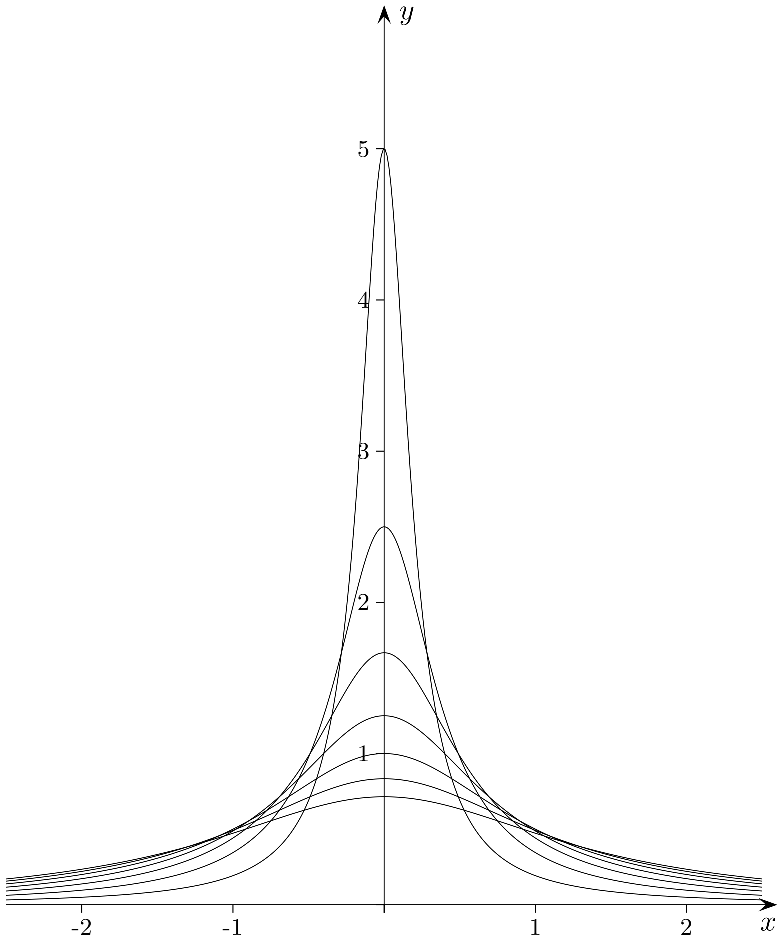
und allgemeiner für die n-te Ableitung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n f^{(n)}(0), \qquad \text{kurze Schreibweise:} \quad \langle \delta^{(n)}, f \rangle = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

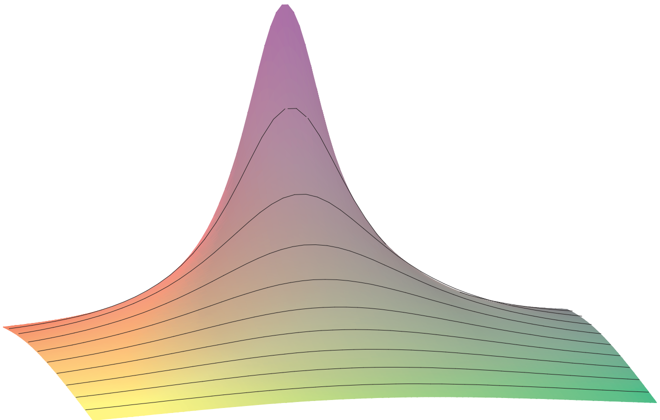
Lesart: $\langle \delta^{(n)}, \cdot \rangle$ ordnet der Funktion f den Wert $(-1)^n f^{(n)}(0)$ zu.

Dirac-Folge

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{x^2 + \sigma^2}$$



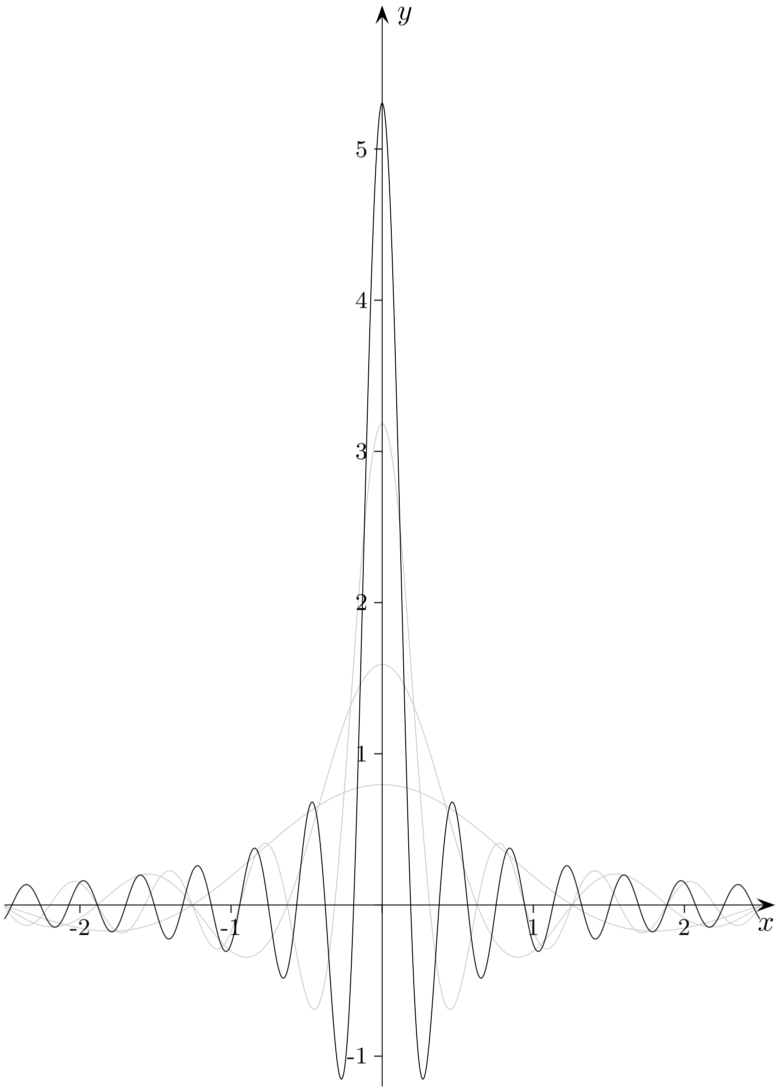
3D-Darstellung



$f_\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{x^2+\sigma^2}$

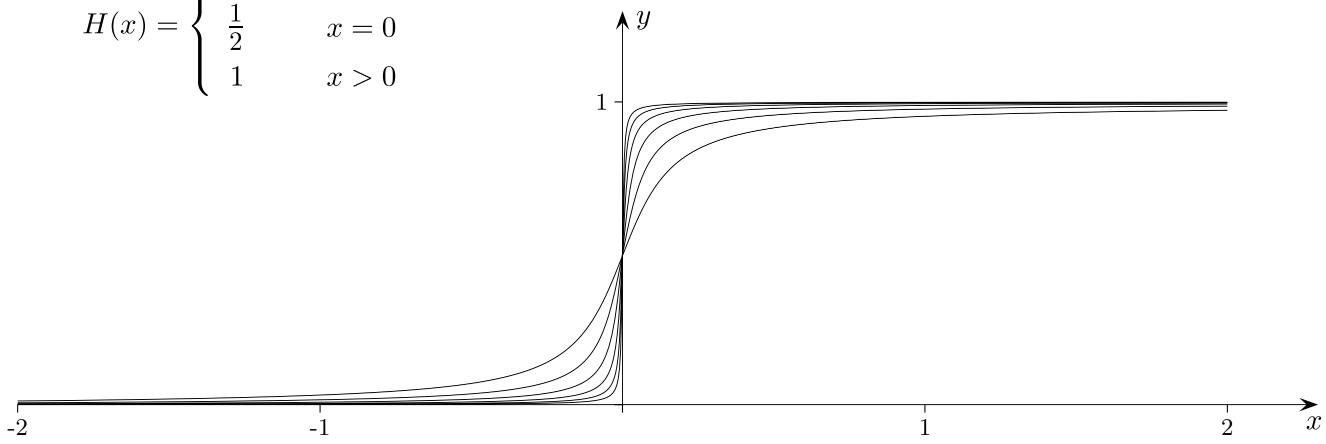
Dirac-Folge

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\sigma}$$

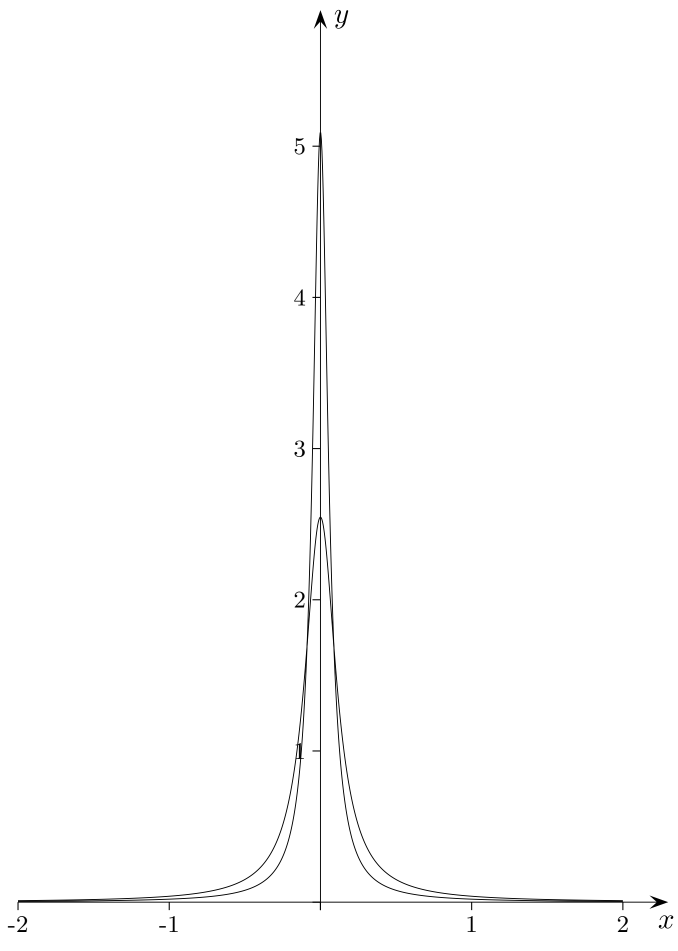


Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



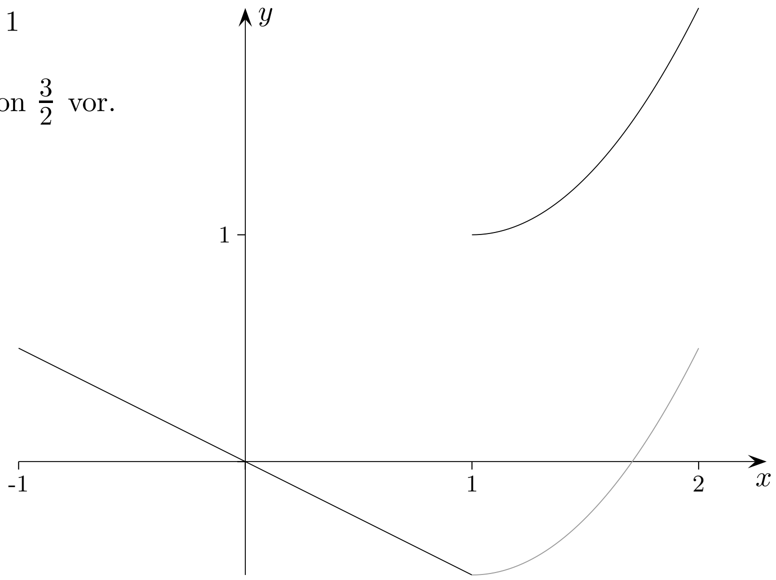
Die Heaviside-Funktion ist nicht differenzierbar.
Im approximativen Sinn streben die Ableitungen gegen eine δ-Funktion(enfolge).



Heaviside-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

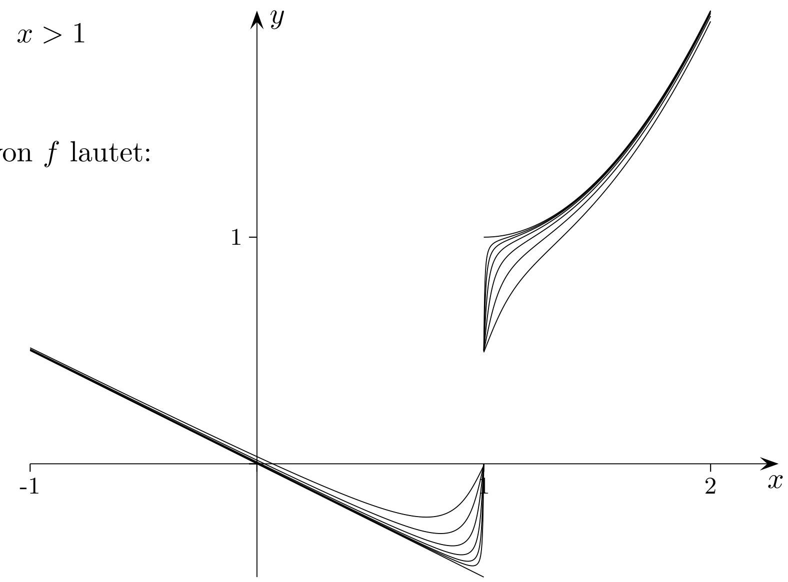
An der Stelle $x = 1$ liegt ein Sprung von $\frac{3}{2}$ vor.



$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 - \frac{3}{2} & x > 1 \end{cases}$$

Die stetige Variante (approximativ) von f lautet:

$$f(x) = g(x) + \frac{3}{2}H(x-1)$$



Für die Ableitung erhalten wir:

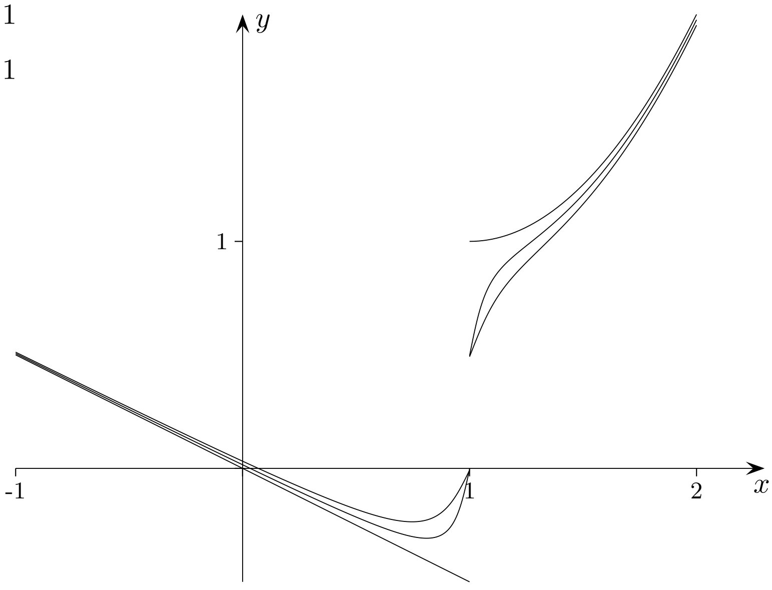
$$f'(x) = g'(x) + \frac{3}{2}\delta(x-1) \quad \text{mit} \quad g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

oder kürzer (beachte: $f'(x) = g'(x)$):

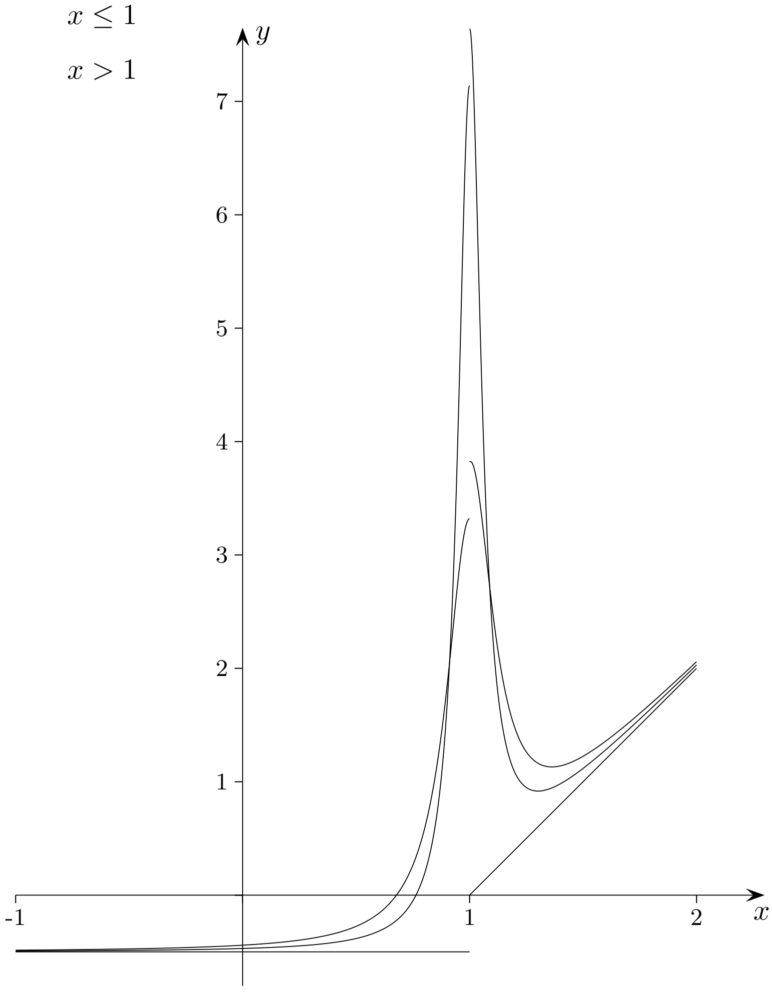
$$f'(x) = \frac{3}{2}\delta(x-1) + \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

Heaviside-Funktion

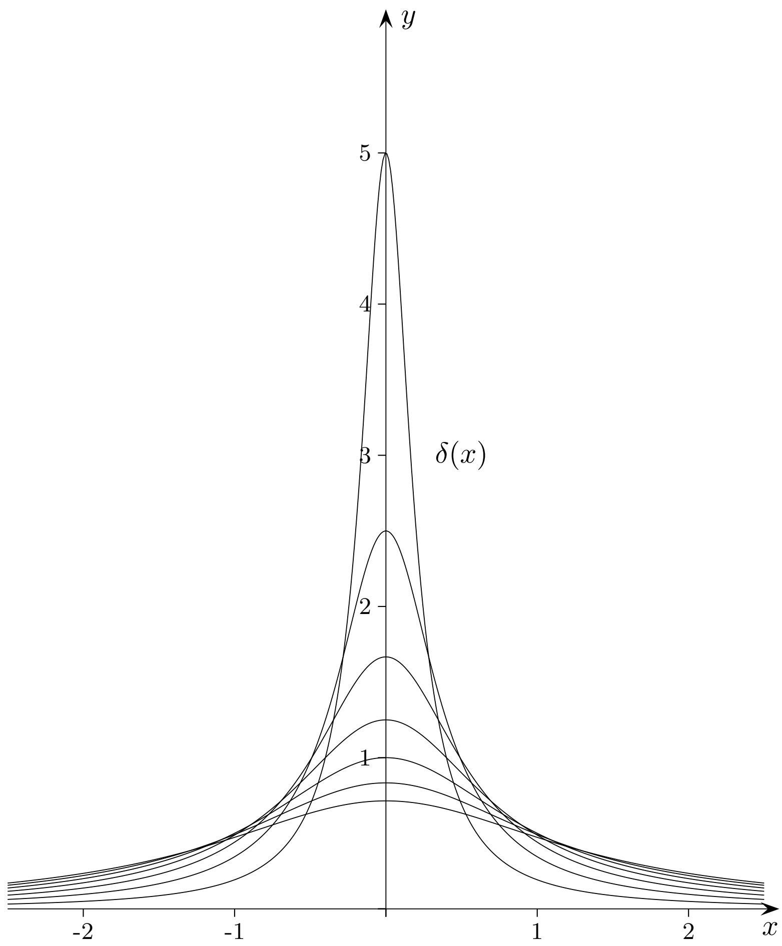
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

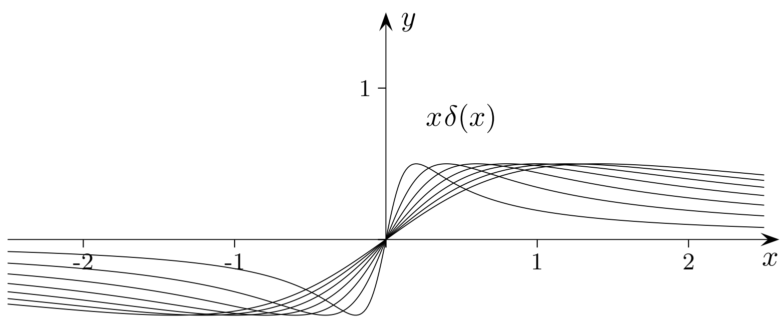


$$f'(x) = \frac{3}{2}\delta(x-1) + \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases}$$



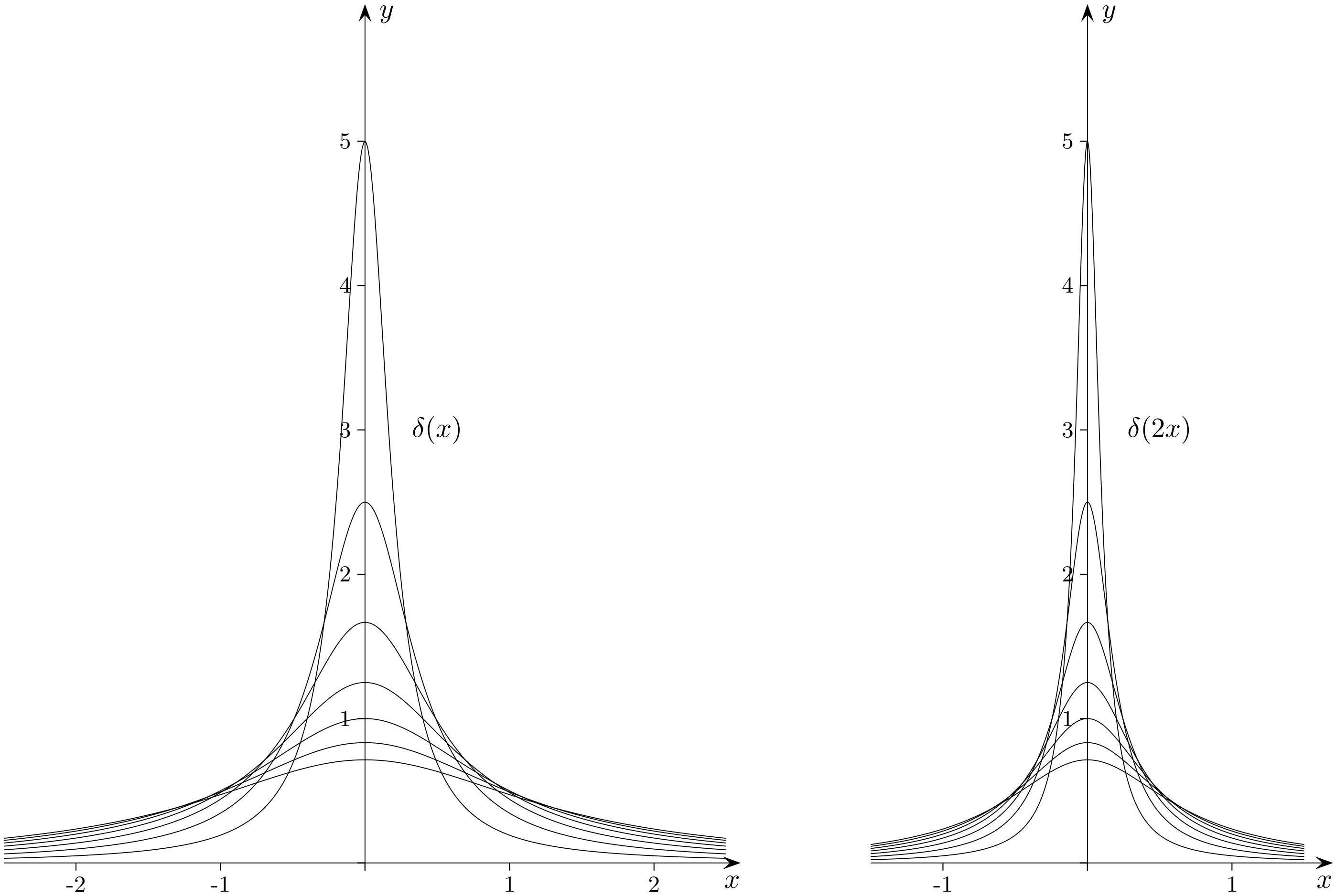
Auf einen Blick $x\delta(x)$





$$\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x)\,dx = 0$$ offensichtlich aufgrund der Punktsymmetrie

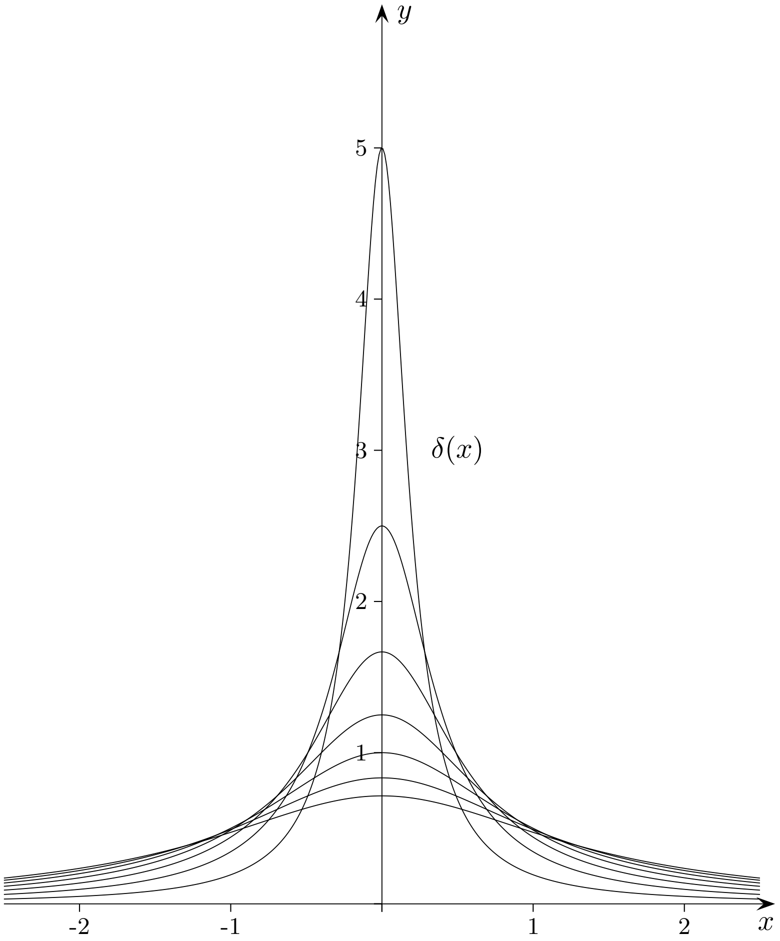
$\delta(ax)$

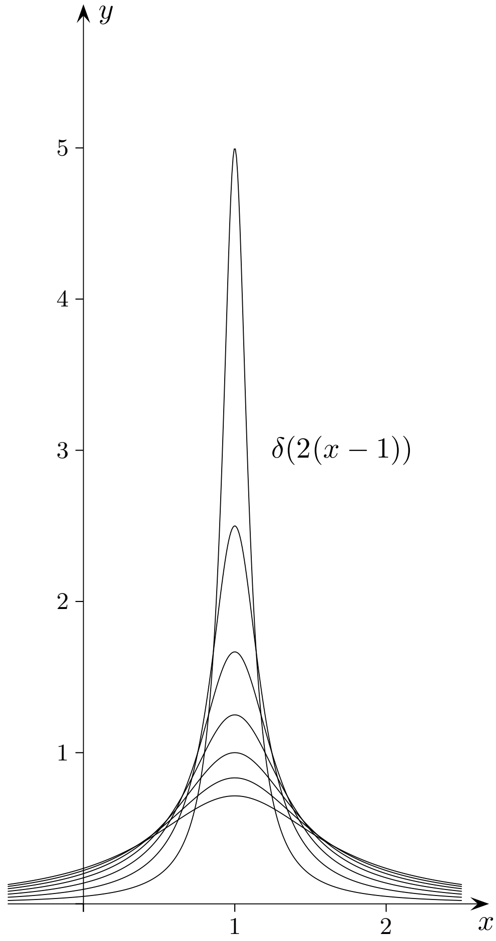


Zur Stauchung in x-Richtung mit dem Faktor a $(a > 0)$ ist eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a erforderlich, damit Flächeninhalte gleich bleiben und wieder eine Dirac-Folge entsteht.

$$a\delta(ax) = \delta(x) \quad \Longrightarrow \quad \delta(ax) = \frac{1}{a}\,\delta(x)$$

$$\delta(a(x - x_0))$$

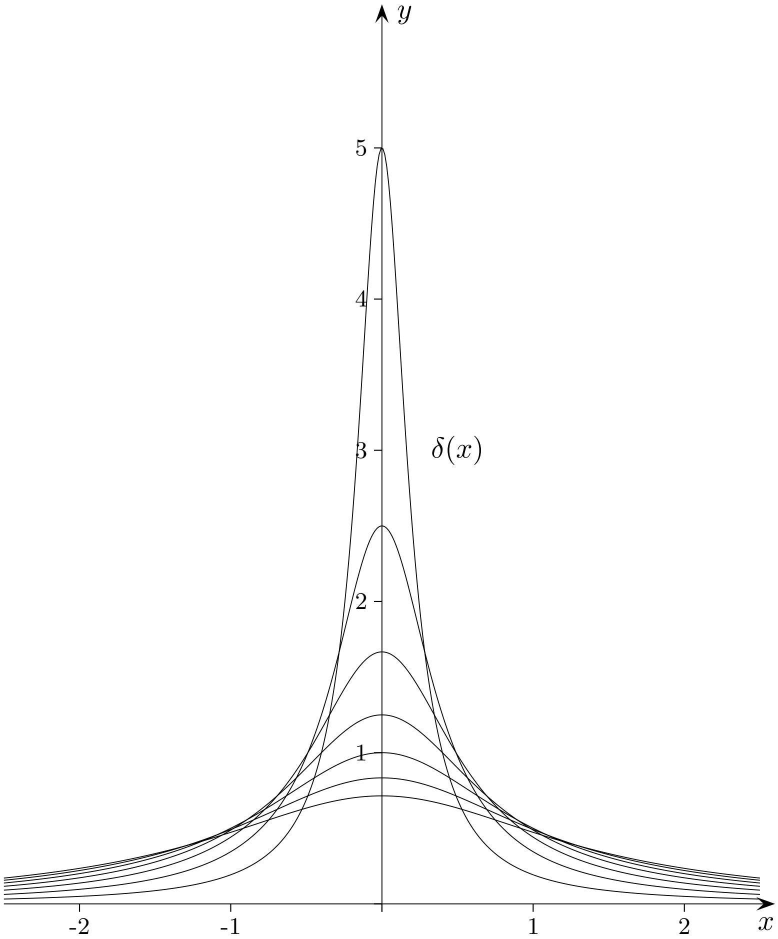


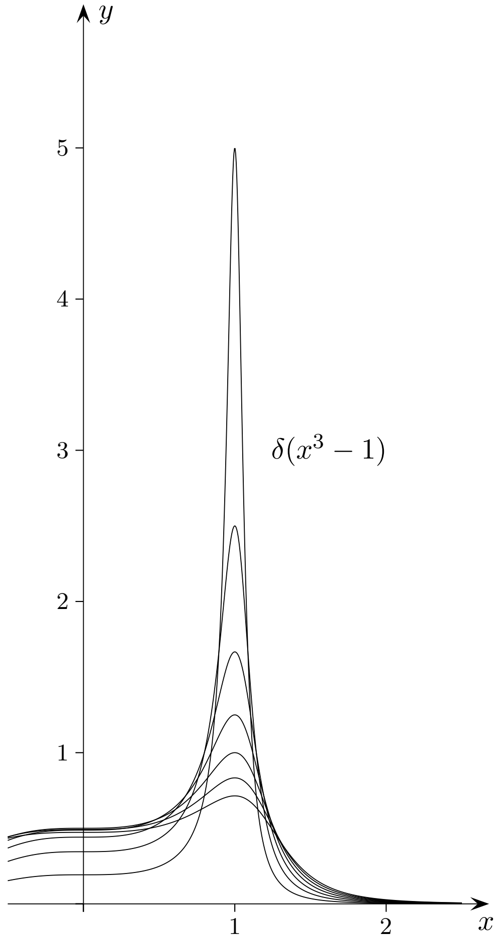


Zur Stauchung in x-Richtung mit dem Faktor a $(a > 0)$ ist eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a erforderlich, damit Flächeninhalte gleich bleiben und wieder eine Dirac-Folge entsteht.

$$a\delta(a(x - x_0)) = \delta(x - x_0) \quad\Longrightarrow\quad \delta(a(x - x_0)) = \frac{1}{a}\,\delta(x - x_0)$$

$\delta(g(x))$, g hat eine Nullstelle

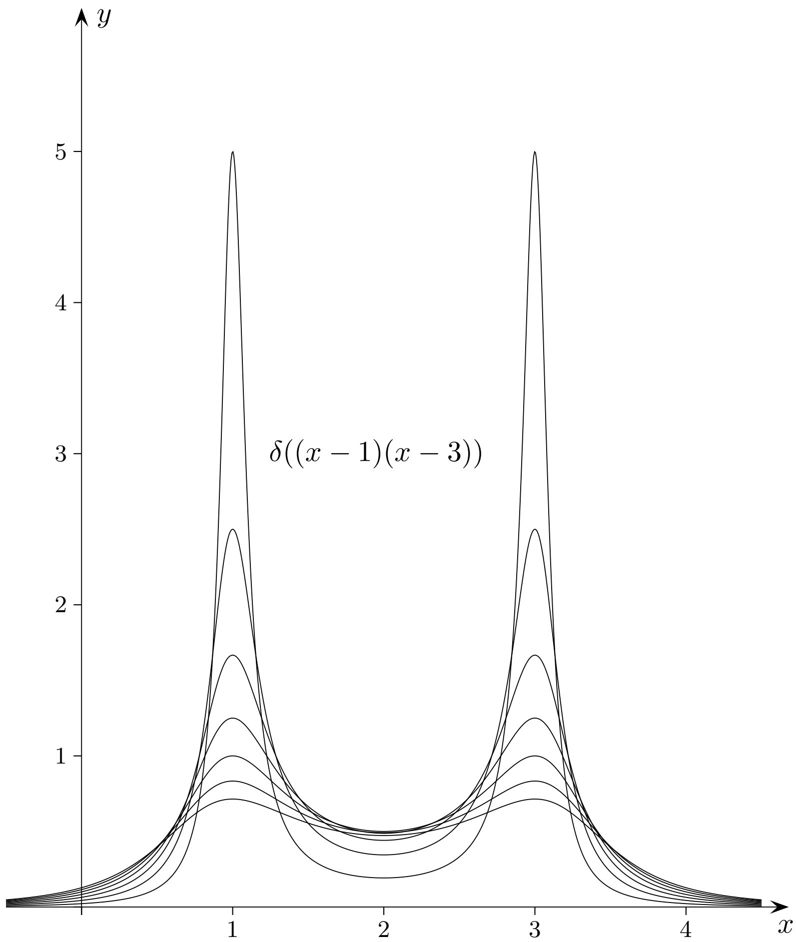




Die Funktion g habe die (einzige) Nullstelle x_0, $g'(x_0) > 0$. Da es nur auf eine (beliebig kleine) Umgebung von x_0 ankommt, unterscheidet sich dieser Fall vom Vorigen (Steigung a an der Nullstelle) nur geringfügig.

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{g'(x_0)}\,\delta(x - x_0)$$

$\delta(g(x))$, g hat zwei Nullstellen



Die Funktion g habe die beiden (einzigen) Nullstellen x_1 und x_2.

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_1)|}\,\delta(x - x_1) + \frac{1}{|g'(x_2)|}\,\delta(x - x_2)$$