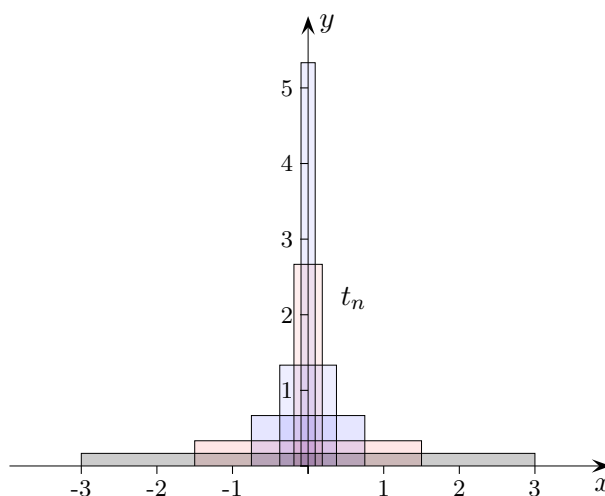


# Delta-Funktion

Dirac 1927



Phänomene wie Spannungsimpuls und Kraftstoß  $\uparrow$  wirken nur über sehr kurze Zeitintervalle und führen oftmals auf eine Differenzialgleichung der Form  $ay'' + by' + cy = \uparrow$ .

Zur mathematischen Beschreibung eignen sich Funktionsfolgen  $t_n$ , die bis auf  $x = 0$  gegen null konvergieren und den konstanten Flächeninhalt 1 (= Impuls) mit der  $x$ -Achse einschließen.

$t_n(0)$  muss dann gegen Unendlich streben, so dass es zwar keine Grenzfunktion gibt, wohl aber einen Grenzwert der Integral-Werte  $\int_{-\infty}^{\infty} t_n(x) dx$ .

Man macht sich leicht klar, dass für eine Funktion  $f$  gilt:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot t_n(x) dx \longrightarrow f(0)$

Für ein sehr schmales Rechteck mit  $t_n \cdot \Delta x = 1$  ist eine stetige Funktion  $f$  im Bereich  $\Delta x$  nahezu konstant, so dass das Integral durch  $f(0) \cdot t_n \cdot \Delta x = f(0)$  approximiert wird.

Für die Einheits-Impuls-Funktionenfolge  $t_n$  wird die Abkürzung  $\delta$  verwendet.

Damit wird auch die abkürzende Schreibweise  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x) dx = f(0)$  verständlich.

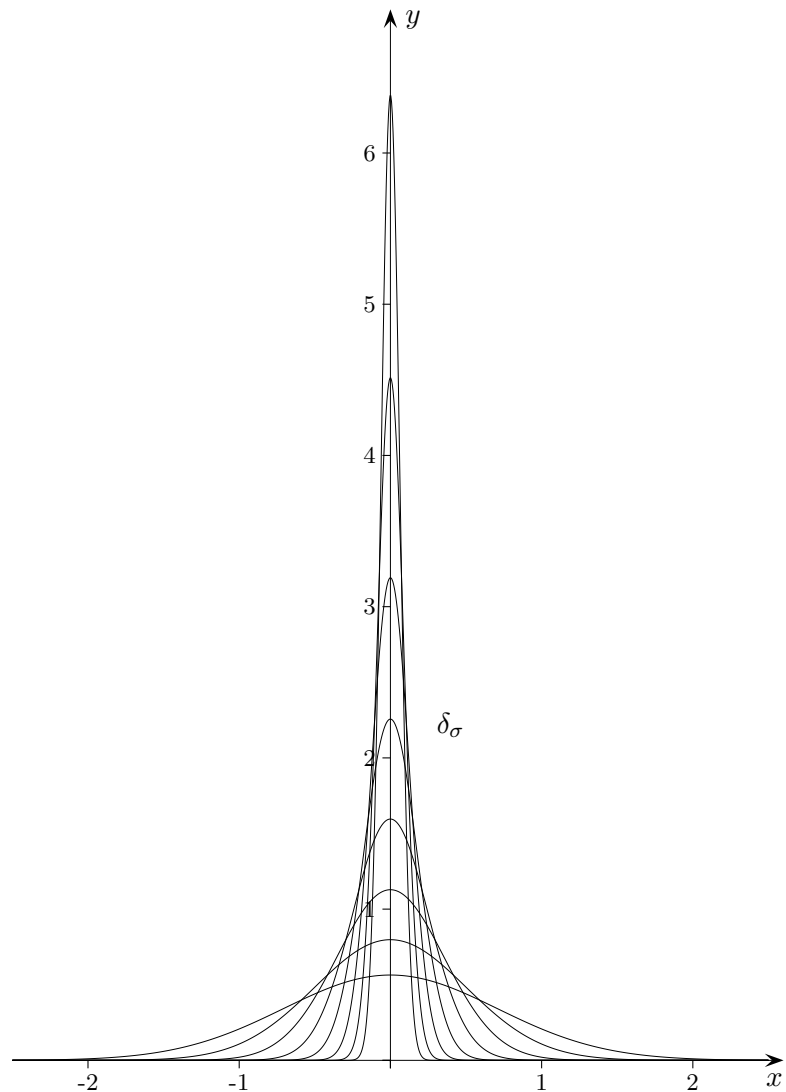
Die Funktionenfolge  $\delta$  und deren Verschiebung  $\delta(x - a)$  treten überwiegend in Verbindung mit der Integration auf, wobei Grenzwerte in einfacher Weise gebildet werden.

Luschigerweise wird  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  eingespart und  $\delta$  als Funktion bezeichnet.

Green (1793-1841) befasste sich als Erster mit idealisierten Impulsen, die nicht mit normalen Funktionen erfasst werden können. Heaviside (1850-1925) entwickelte die Idee weiter und wandte sie effektiv zur Lösung physikalischer Probleme an. Die spöttische Haltung der Mathematiker änderte sich erst, als Dirac sogenannte verallgemeinerte Funktionen in der Quantenphysik verwendete.

# Dirac-Folge

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$



Eine stetig differenzierbare Funktionenfolge ist durch die Normalverteilungen gegeben,  $\sigma \rightarrow 0$ .

Es gibt viele andere geeignete Funktionenfolgen. Deren Funktionsterme treten in den Anwendungen jedoch nicht in Erscheinung.

Für die Ableitungen  $\delta'_\sigma$  gilt:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta'_\sigma(x) dx \rightarrow -f'(0)$ , unmittelbar mit partieller Integration einsehbar,

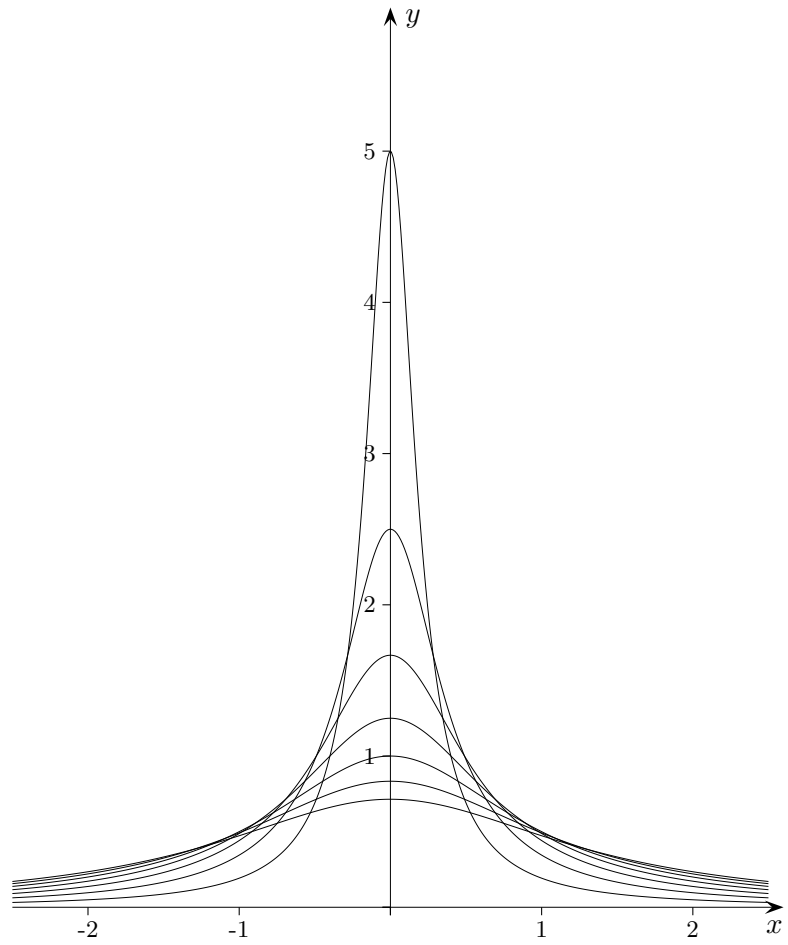
und allgemeiner für die  $n$ -te Ableitung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0), \quad \text{kurze Schreibweise: } \langle \delta^{(n)}, f \rangle = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

Lesart:  $\langle \delta^{(n)}, \cdot \rangle$  ordnet der Funktion  $f$  den Wert  $(-1)^n f^{(n)}(0)$  zu.

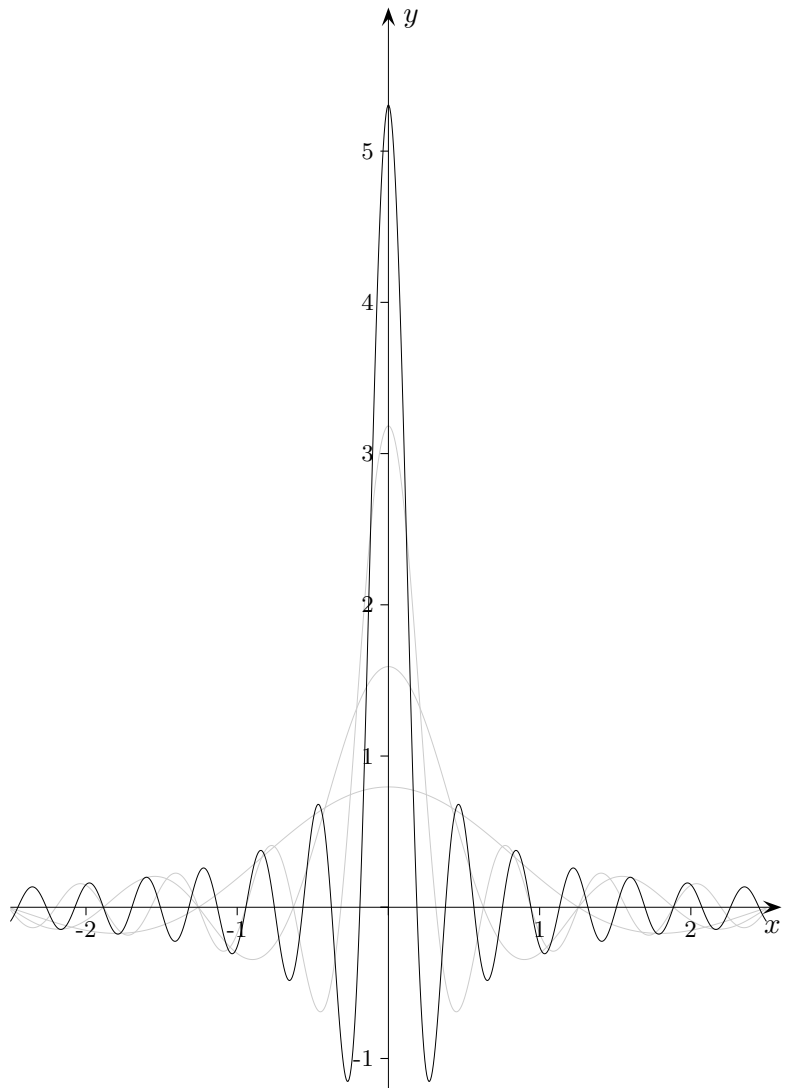
# Dirac-Folge

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{x^2 + \sigma^2}$$



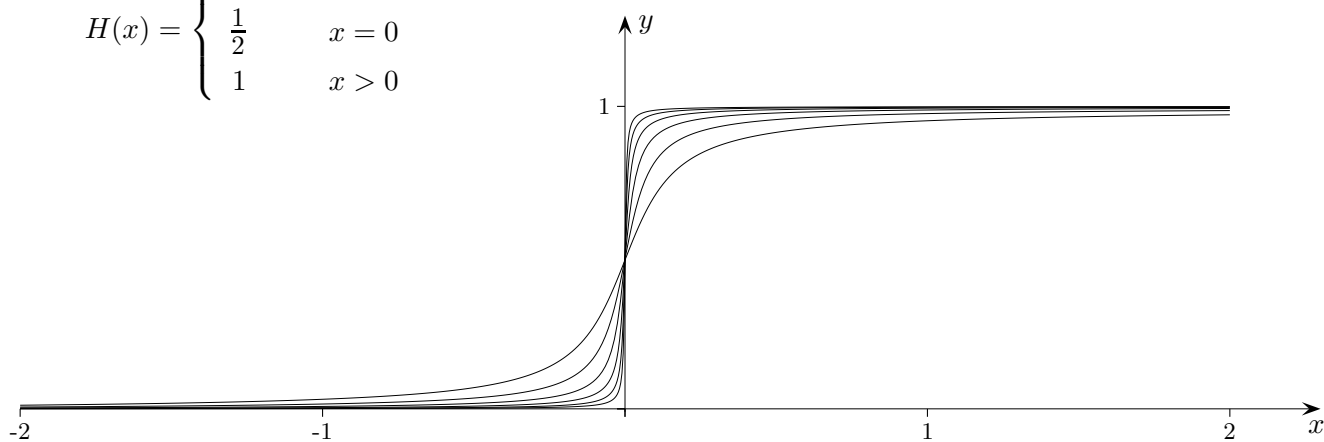
# Dirac-Folge

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\sigma}$$

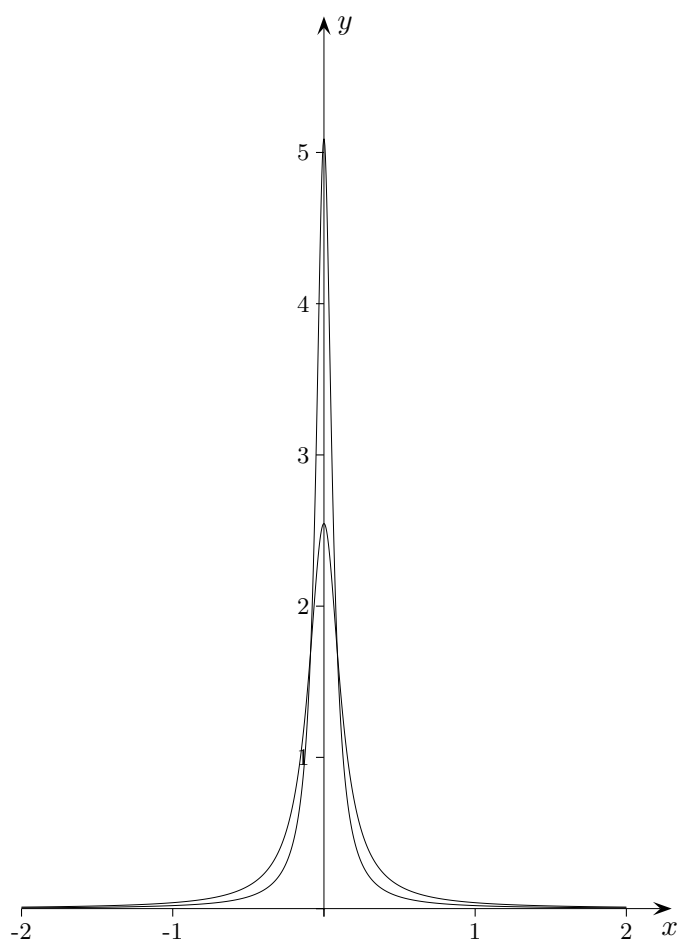


# Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



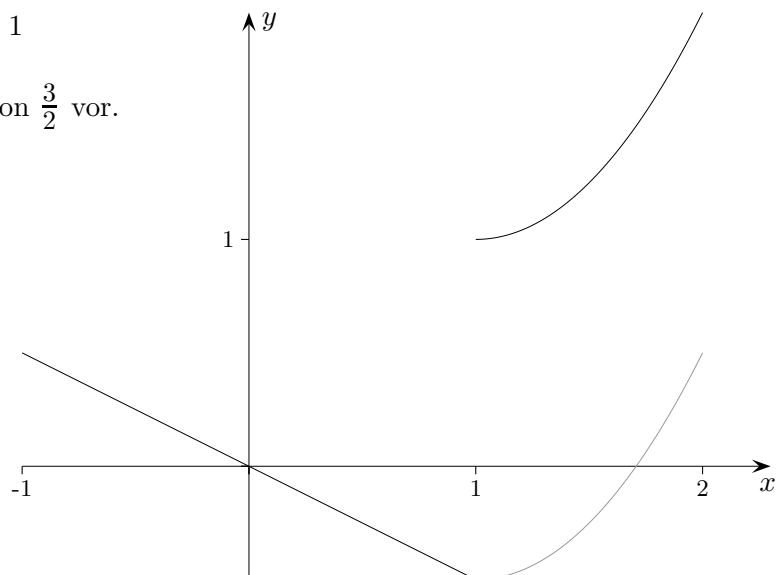
Die Heaviside-Funktion ist nicht differenzierbar.  
Im approximativen Sinn streben die Ableitungen gegen eine  $\delta$ -Funktion(enfolge).



# Heaviside-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

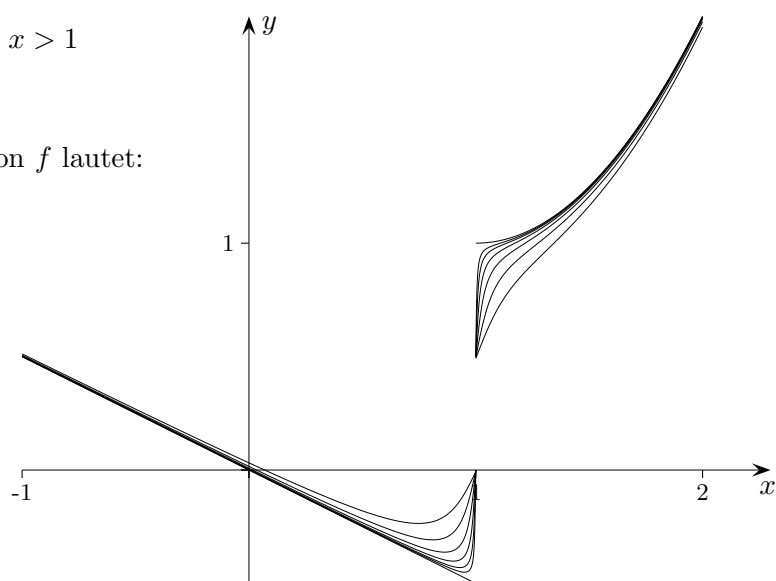
An der Stelle  $x = 1$  liegt ein Sprung von  $\frac{3}{2}$  vor.



$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 - \frac{3}{2} & x > 1 \end{cases}$$

Die stetige Variante (approximativ) von  $f$  lautet:

$$f(x) = g(x) + \frac{3}{2}H(x-1)$$



Für die Ableitung erhalten wir:

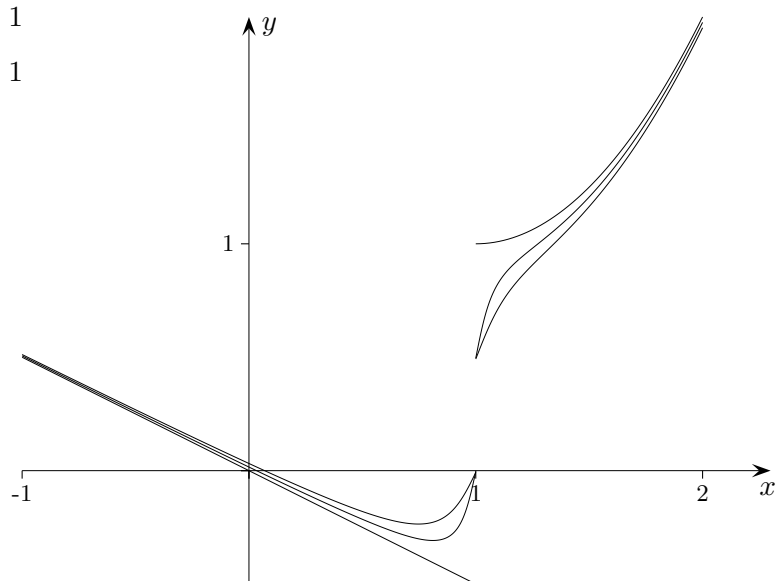
$$f'(x) = g'(x) + \frac{3}{2}\delta(x-1) \quad \text{mit} \quad g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

oder kürzer (beachte:  $f'(x) = g'(x)$ ):

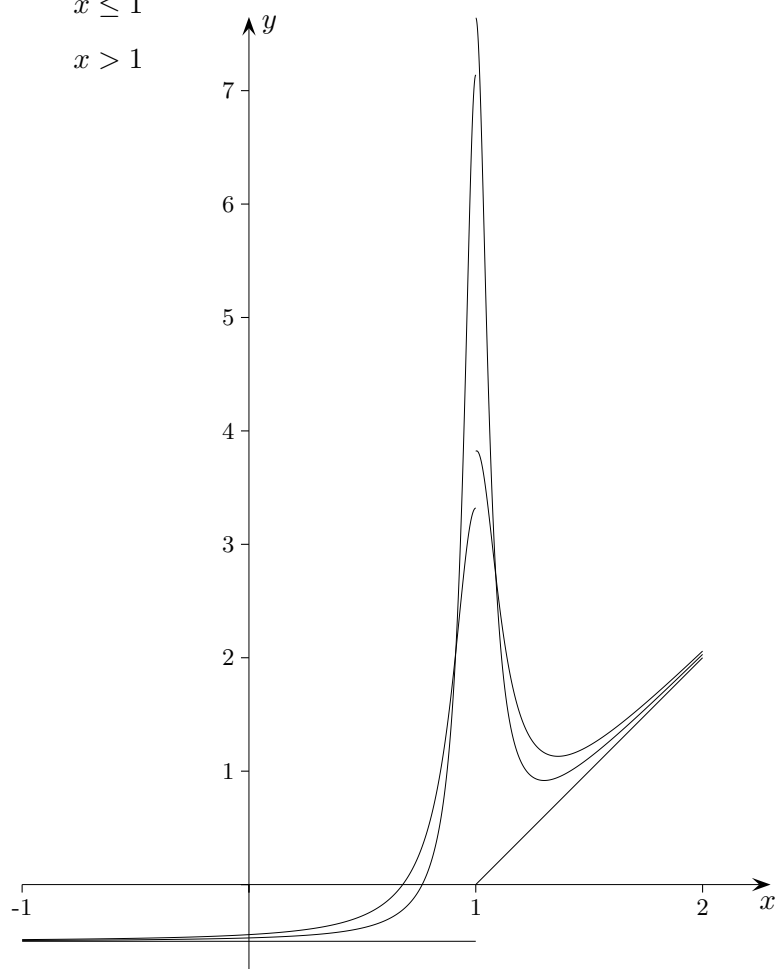
$$f'(x) = \frac{3}{2}\delta(x-1) + \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

# Heaviside-Funktion

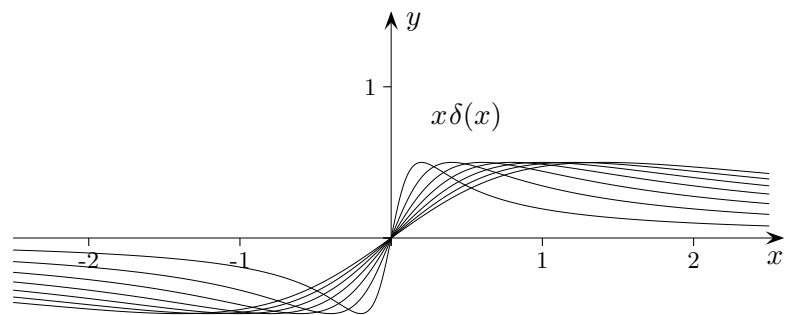
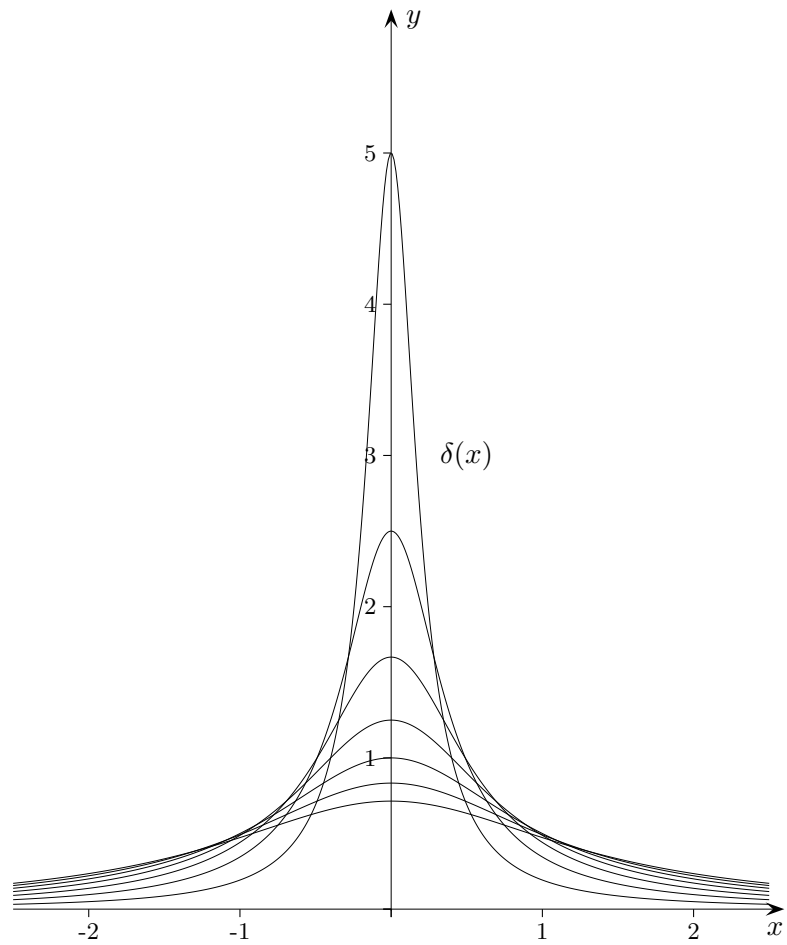
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$



$$f'(x) = \frac{3}{2}\delta(x-1) + \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq 1 \\ 2(x-1) & x > 1 \end{cases}$$



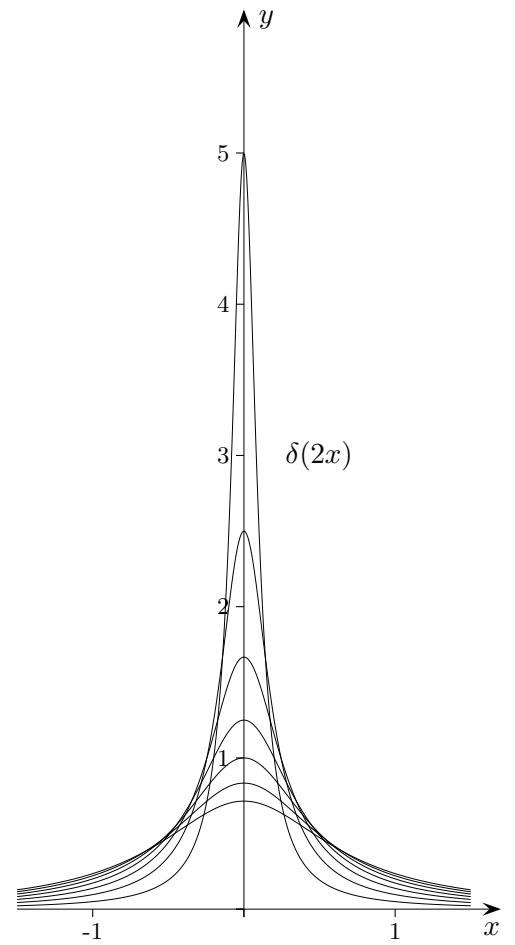
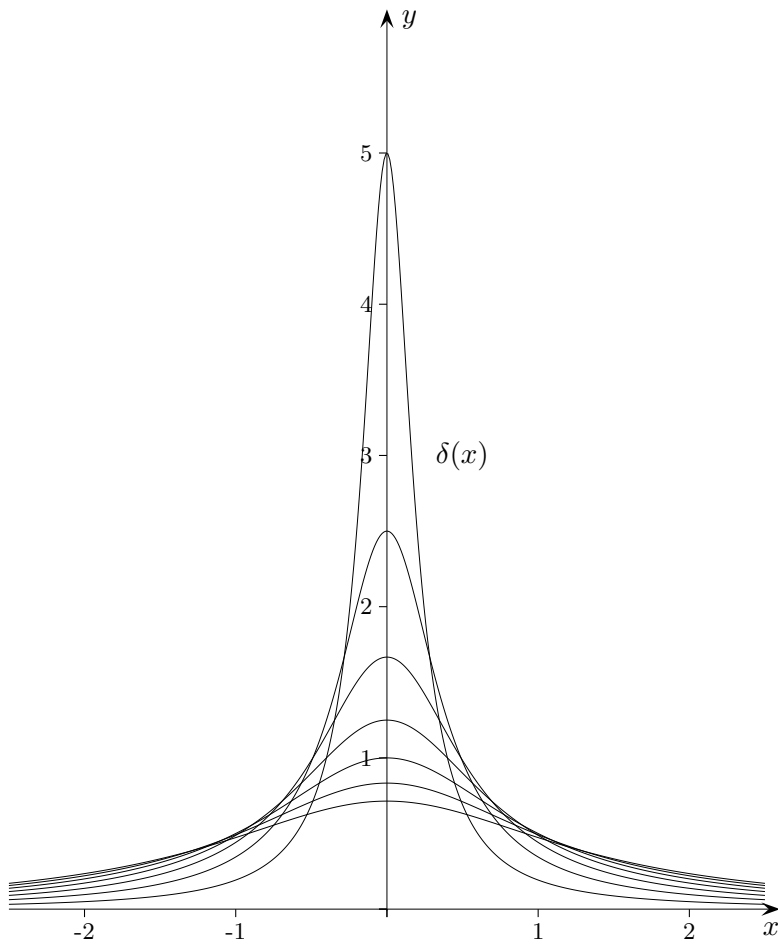
# Auf einen Blick $x\delta(x)$



$$\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x) dx = 0 \quad \text{offensichtlich aufgrund der Punktsymmetrie}$$



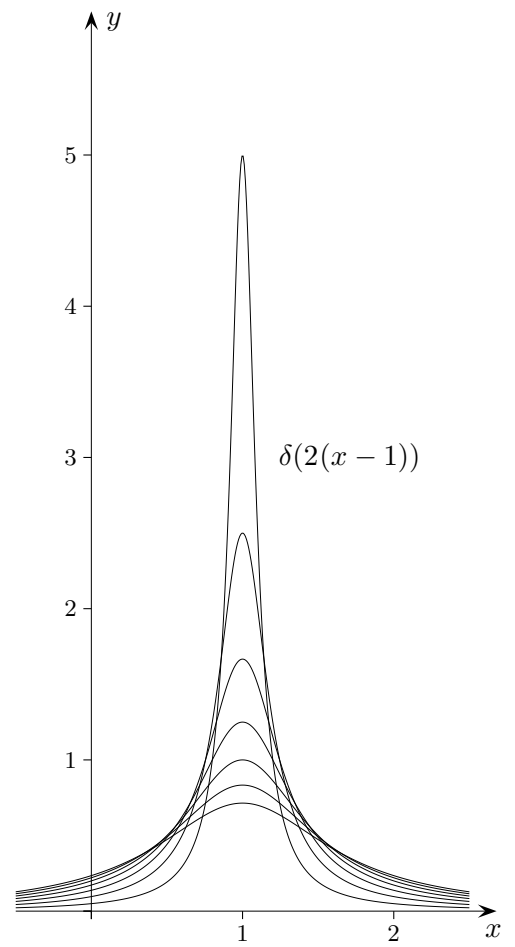
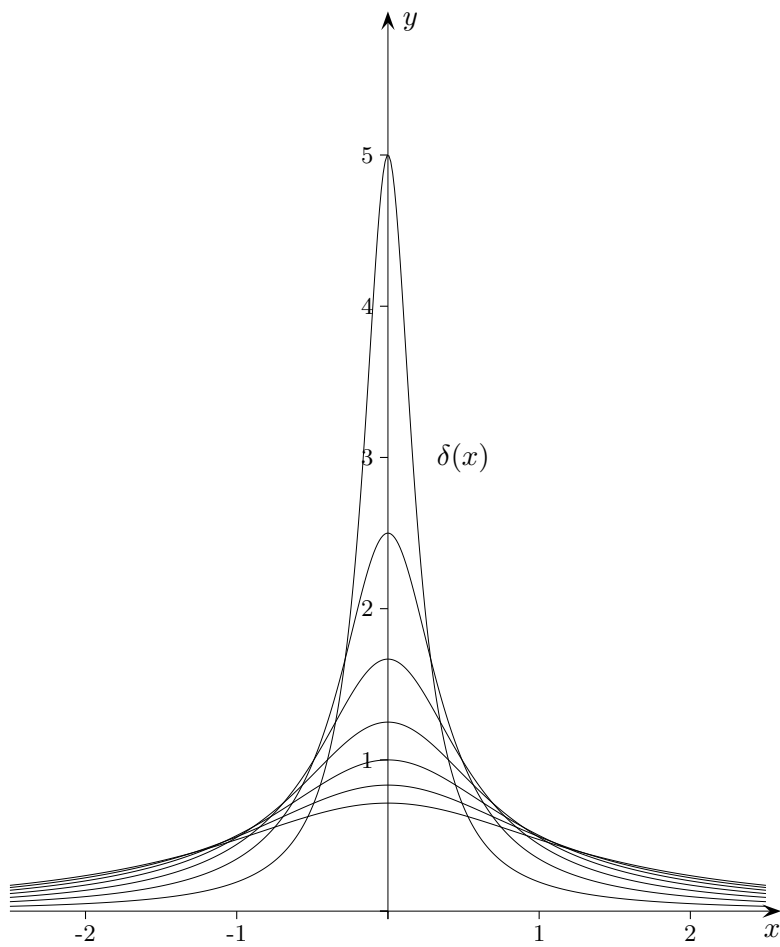
$$\delta(ax)$$



Zur Stauchung in  $x$ -Richtung mit dem Faktor  $a$  ( $a > 0$ ) ist eine Streckung in  $y$ -Richtung mit dem Faktor  $a$  erforderlich, damit Flächeninhalte gleich bleiben und wieder eine Dirac-Folge entsteht.

$$a\delta(ax) = \delta(x) \quad \Longrightarrow \quad \delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x)$$

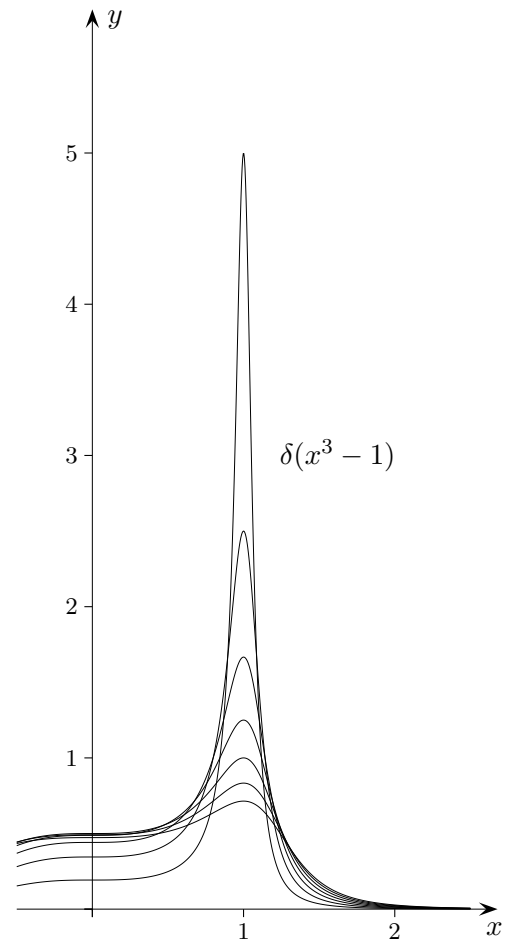
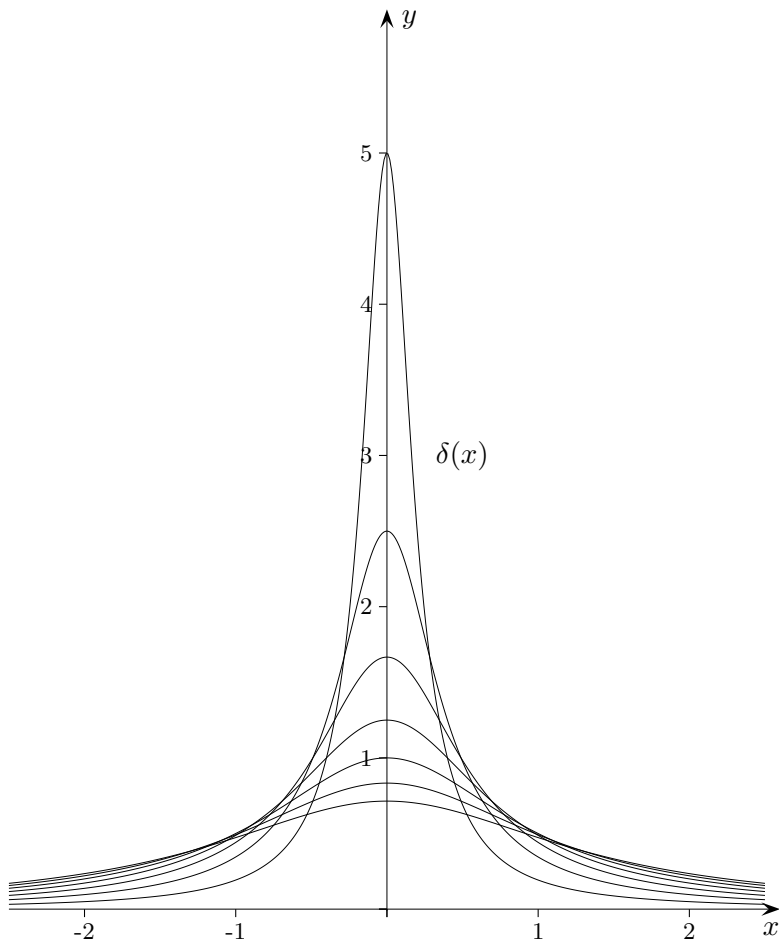
$$\delta(a(x - x_0))$$



Zur Stauchung in  $x$ -Richtung mit dem Faktor  $a$  ( $a > 0$ ) ist eine Streckung in  $y$ -Richtung mit dem Faktor  $a$  erforderlich, damit Flächeninhalte gleich bleiben und wieder eine Dirac-Folge entsteht.

$$a\delta(a(x - x_0)) = \delta(x - x_0) \quad \implies \quad \delta(a(x - x_0)) = \frac{1}{a}\delta(x - x_0)$$

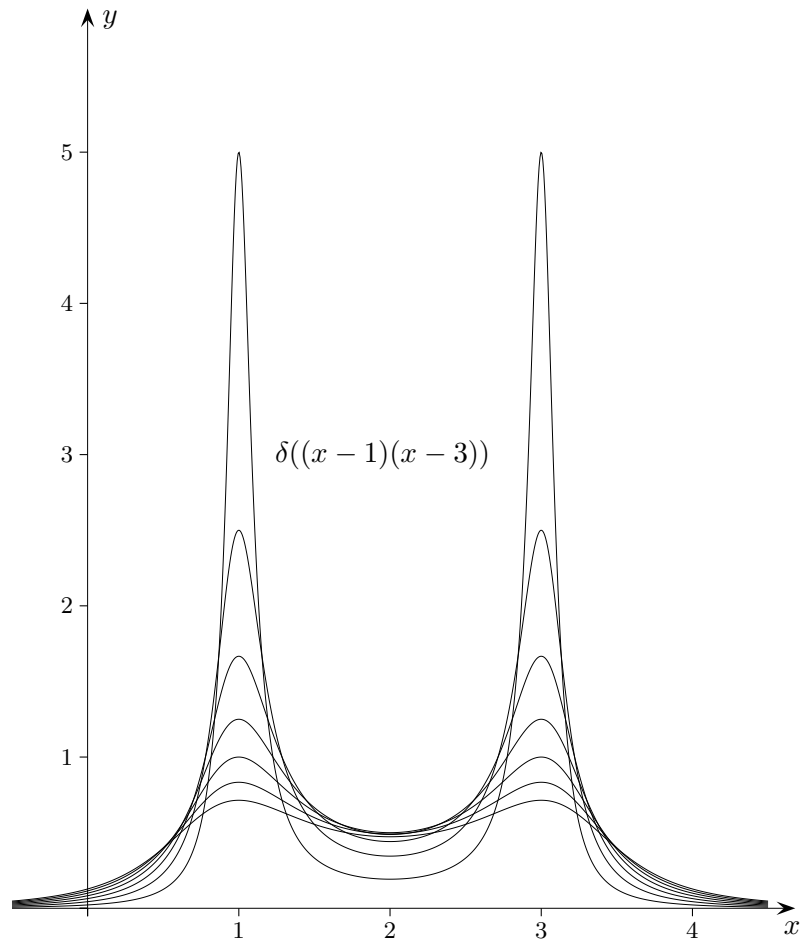
$\delta(g(x))$ ,  $g$  hat eine Nullstelle



Die Funktion  $g$  habe die (einzige) Nullstelle  $x_0$ ,  $g'(x_0) > 0$ . Da es nur auf eine (beliebig kleine) Umgebung von  $x_0$  ankommt, unterscheidet sich dieser Fall vom Vorigen (Steigung  $a$  an der Nullstelle) nur geringfügig.

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{g'(x_0)} \delta(x - x_0)$$

$\delta(g(x))$ ,  $g$  hat zwei Nullstellen



Die Funktion  $g$  habe die beiden (einzigen) Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$ .

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_1)|} \delta(x - x_1) + \frac{1}{|g'(x_2)|} \delta(x - x_2)$$