Differenzialgleichungssysteme

Wir betrachten ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}\,y_1(t) + a_{21}\,y_2(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}\,y_1(t) + a_{22}\,y_2(t) \end{aligned}$$

in Matrizenschreibweise

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\,\vec{y}(t) = A \cdot y(t)$$

Eine Lösung lautet $\quad \vec{y}(t) = e^{\lambda t} \cdot \vec{v} \quad$ Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert λ

Zu überprüfen ist $\quad \dfrac{d}{dt}\,e^{\lambda t} \cdot \vec{v} = A \cdot e^{\lambda t} \cdot \vec{v}$

Auf der linken Seite erhalten wir mit der Kettenregel $\lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{v}$
und mit $A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$ auf der rechten Seite den gleichen Term $A \cdot e^{\lambda t} \cdot \vec{v} = e^{\lambda t}\lambda\vec{v}$.

Hat das charakteristische Polynom von A den Grad n und liegen n verschiedene Eigenwerte λ_i mit den (dann linear unabhängigen) Eigenvektoren $\vec{v}_i$ vor, dann bilden die n Funktionen $\vec{y}_i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot \vec{v}_i$ ein Fundamentalsystem, d. h. jede Lösungfunktion ergibt sich hieraus als Linearkombination. Die Konstanten werden den Anfangsbedingungen angepasst.

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 + 2\lambda$$

Eigenwerte $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0,\quad$ zugehörige Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

allgemeine Lösung $\quad \vec{y}(t) = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anfangswerte $\quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 2,\quad \vec{y}(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$c_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = \frac{3}{2}$$

Hauptvektoren

Sei λ doppelte Nullstelle und $\vec{v}_1$ zugehöriger Eigenvektor.
Mit Hilfe eines Hauptvektors $\vec{v}_2$ kann eine 2. Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\frac{d}{dt}\,\vec{y}(t) = A \cdot y(t)$$

angegeben werden. Für $\vec{v}_2 \neq 0$ gilt ($\vec{v}_2$ ist also Lösung eines Gleichungssystems):

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} A\vec{v}_2 - \lambda\vec{v}_2 &= \vec{v}_1 \\ A\vec{v}_2 &= \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 \quad * \end{aligned}$$

Die weitere Lösung lautet $\quad \vec{y}(t) = e^{\lambda t}\big[\,\vec{v}_2 + t\vec{v}_1\,\big]$, $\quad \vec{v}_2$ Hauptvektor der Stufe 2, $\vec{v}_1$ Eigenvektor.

Zu überprüfen ist $\qquad \dfrac{d}{dt}\,e^{\lambda t}\big[\vec{v}_2 + t\vec{v}_1\big] = A \cdot e^{\lambda t}\big[\vec{v}_2 + t\vec{v}_1\big]$.

Auf der linken Seite erhalten wir mit der Produkt- und Kettenregel

$$\lambda e^{\lambda t}\big[\,\vec{v}_2 + t\vec{v}_1\,\big] + e^{\lambda t}\vec{v}_1$$

und mit $*$ und $A\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_1$ auf der rechten Seite den gleichen Term.

$$\begin{aligned} A \cdot e^{\lambda t}\big[\,\vec{v}_2 + t\vec{v}_1\,\big] &= e^{\lambda t}\big[\,A\vec{v}_2 + tA\vec{v}_1\,\big] \\ &= e^{\lambda t}\big[\,\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2 + t\lambda\vec{v}_1\,\big] \end{aligned}$$

Sei λ dreifache Nullstelle und $\vec{v}_3 \neq 0$ ein Hauptvektor der Stufe 3.

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A\vec{v}_3 = \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_3$$

Die 3. Lösung lautet $\quad \vec{y}(t) = e^{\lambda t}\big[\,\vec{v}_3 + t\vec{v}_2 + \dfrac{t^2}{2}\,\vec{v}_1\,\big]$,

$\vec{v}_3$, $\vec{v}_2$ Hauptvektoren der Stufen 3 und 2, $\vec{v}_1$ Eigenvektor.

Der Nachweis erfolgt durch Einsetzen.

Zusammenfassung, Beispiel

$$\frac{d}{dt}\,\vec{y}(t) = A \cdot y(t)$$

Sei λ vierfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

$$\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \lambda\vec{v}_1 \\ (A-\lambda E)\cdot\vec{v}_2 &= \ \vec{v}_1 \\ (A-\lambda E)\cdot\vec{v}_3 &= \ \vec{v}_2 \\ (A-\lambda E)\cdot\vec{v}_4 &= \ \vec{v}_3 \end{aligned}$$

Das Fundamentalsystem lautet:

$$\begin{aligned} \vec{y}_1(t) &= e^{\lambda t}\cdot\vec{v}_1 \\ \vec{y}_2(t) &= e^{\lambda t}\big[\,\vec{v}_2 + t\vec{v}_1\big] \\ \vec{y}_3(t) &= e^{\lambda t}\big[\,\vec{v}_3 + t\vec{v}_2 + \tfrac{t^2}{2}\,\vec{v}_1\big] \\ \vec{y}_4(t) &= e^{\lambda t}\big[\,\vec{v}_4 + t\vec{v}_3 + \tfrac{t^2}{2}\,\vec{v}_2 + \tfrac{t^3}{3!}\,\vec{v}_1\big] \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^3 - (-1-\lambda) + (-1-\lambda) = (-1-\lambda)^3$$

dreifacher Eigenwert $\lambda = -1$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem:

$$\left\{ e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix},\ e^{-t}\begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ \frac{t^2}{2}+1 \end{pmatrix} \right\}$$

Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

Ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem 2. Ordnung
mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \qquad \frac{d^2}{dt^2}\,\vec{y}(t) = Ay(t)$$

kann durch Substitution in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung
überführt werden.

Setze

$$\begin{aligned} y_3(t) &= y_1'(t) \\ y_4(t) &= y_2'(t) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix}$$

Komplexe Eigenwerte

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\,\vec{y}(t) = A \cdot y(t)$$

Lösung $\quad \vec{y}(t) = e^{\lambda t} \cdot \vec{v} \quad$ Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert λ

$$\det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 \qquad \text{Eigenwerte } \lambda_1 = 1+i,\ \lambda_2 = 1-i$$

Verkürzter Ansatz zur Berechnung des Eigenvektors zu λ_1.

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit i, erkennt man,
dass zwei identische Gleichungen vorliegen.

Zugehörige Eigenvektoren sind $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte und Eigenvektoren treten immer paarweise konjugiert komplex auf.

Der Real- und der Imaginärteil von

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{v}_1 = e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t e^{it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} -\sin t + i\cos t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix}$$

sind die reellen Lösungen.
Es wird nur ein komplexer Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor benötigt.

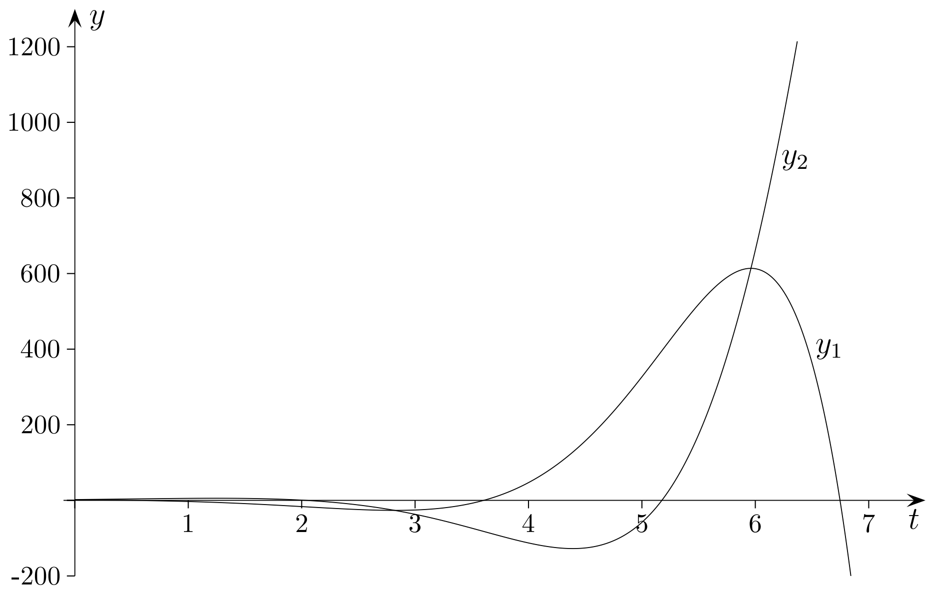
Fundamentalsystem: $\quad \left\{ e^t\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},\ e^t\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right\}$

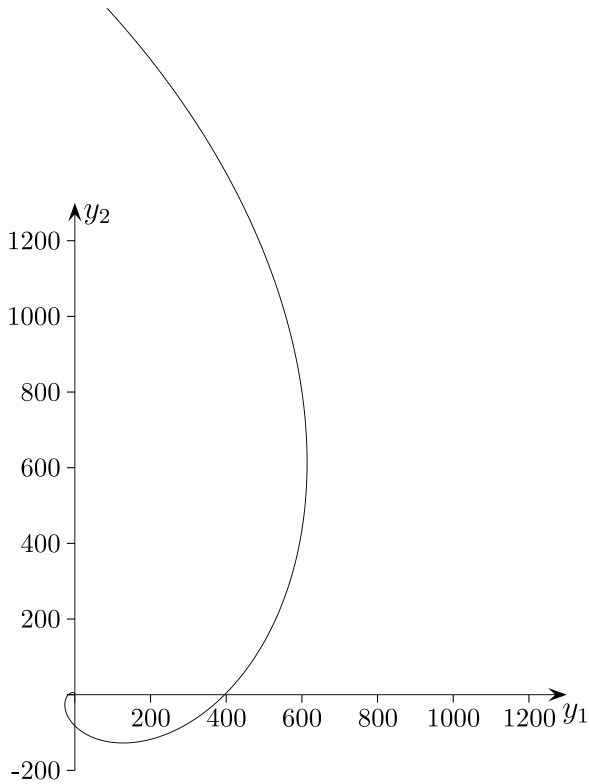
Anfangswerte $\quad y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 2$

$$\vec{y}(t) = c_1\vec{y}_1(t) + c_2\vec{y}_2(t)$$

$$\vec{y}(0) = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad c_1 = 2,\ c_2 = 1$$

Komplexe Eigenwerte





Differentialgleichungssystem 3. Ordnung

Eine Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = f(x, y, y', y'')$$

mit den Anfangsbedingungen $y(x_0) = a,\ y'(x_0) = b$ und $y''(x_0) = c$

lässt sich durch Einführung von Zwischenfunktionen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückführen.

Es ergibt sich durch Umbenennung der unbekannten Funktion

$y(x)$ in $y_1(x)$, $y'(x)$ in $y_2(x)$ und $y''(x)$ in $y_3(x)$

das System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ y_3'(x) &= f(x, y_1(x), y_2(x), y_3(x)) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(x_0) = a,\ y_2(x_0) = b$ und $y_3(x_0) = c$.

$$y''' + 5y'' + 8y' + 4y = e^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad y''' = e^x - 5y'' - 8y' - 4y$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) \\ y_2(x) &= y'(x) \\ y_3(x) &= y''(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ y_3'(x) &= e^x - 5y_3(x) - 8y_2(x) - 4y_1(x) \end{aligned}$$

in Matrizenschreibweise

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}$$