

1. Differentialformen 3 Seiten
2. Transformation von Differentialformen (Rückführen, Pullback)
3. Beispiele
4. $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$
5. $\int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega$ 2 Seiten
6. Hodge *-Operator
7. Tangentialraum
8. Gramsche Matrix
9. Differentialformen alternativ

↑ Differentialformen

Differentialformen sind (noch zu interpretierende) Terme der Art: $\omega = xy^2 dx \wedge dy + z dy \wedge dz$
 $\xi = (x^2yz - yz) dx \wedge dy \wedge dz$

Das Dach-Produkt \wedge ist die alternierende Verknüpfung der **Grassmann-Algebra**.

Bei einem Dach-Produkt von Summen können die Klammern daher distributiv aufgelöst werden, für Benachbartes gilt $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$ und $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i$. Die Addition wird hier jeweils nur für k -Formen benötigt. Eine typische Rechnung lautet (das Produkt von 1-Formen ergibt 2-Formen):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 b_1 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + a_1 b_2 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + \dots \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Differentialformen im \mathbb{R}^4

Im \mathbb{R}^4 gibt es folgende k -Formen, auch jeweils deren Summen:

0-Formen: differenzierbare Funktionen

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

1-Formen (Pfaffsche Formen, a_i differenzierbare Funktion $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$):

$$a_1 dx_1, a_2 dx_2, a_3 dx_3, a_4 dx_4$$

2-Formen:

$$a_{12} dx_1 \wedge dx_2, a_{13} dx_1 \wedge dx_3, a_{14} dx_1 \wedge dx_4, a_{24} dx_2 \wedge dx_4, a_{34} dx_3 \wedge dx_4$$

3-Formen:

$$a_{123} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, a_{124} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4, a_{134} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4, a_{234} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

4-Formen:

$$a_{1234} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

Beachte: Es gilt zwar $dx_i \wedge dx_i = 0$, aber es gilt nicht für alle k -Formen $\omega \wedge \omega = 0$.

Für $\omega = a dx_1 \wedge dx_2 + b dx_3 \wedge dx_4$ gilt $\omega \wedge \omega = 2ab dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$.

Beispiele, siehe **Grassmann-Algebra**

$$(a dx_1 \wedge dx_3) \wedge b dx_2 = -ab dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$(a dx_1 \wedge dx_2) \wedge (b dx_2 \wedge dx_3) = 0 \quad dx_2 \text{ gemeinsames Element.}$$

$$(a dx_3 \wedge dx_4) \wedge (b dx_1 \wedge dx_2) = (-1)^{2 \cdot 2} ab dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

Die Beziehung zur Analysis kann mit dem (äußeren) Differential $d\omega$ einer Differentialform ω erahnt werden. Für eine Funktion f ist df definitionsgemäß das totale Differential:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Sei $\omega = P dx + Q dy$. P und Q sind Funktionen mit passenden Voraussetzungen. Dann ist

$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$ definitionsgemäß, es wird jeweils das totale Differential eingesetzt

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx \wedge dy \quad \text{Dies ähnelt dem Satz von Green/Gauss im } \mathbb{R}^2.$$

Sei $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$. Dann ist

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx + \dots$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{beachte: } \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Dies ähnelt dem Satz von Gauss im \mathbb{R}^3 .

k -Formen werden in naheliegender Weise auf geeigneten k -dimensionalen Teilmengen (Mannigfaltigkeiten) des \mathbb{R}^n integriert.

$$\int_A \omega := \int_A f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

↑

Sei $\omega = P dx + Q dy + R dz$. Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Dies ähnelt dem Satz von Stokes.

Beachte:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$df_1 \wedge df_2 \wedge df_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{siehe Grassmann-Algebra}$$

Die Integralsätze von Gauss

$$\iint_A \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dA = \iiint_V \underbrace{(P_x(x, y) + Q_y(x, y) + R_z(x, y))}_{\text{Divergenz } \operatorname{div}(\vec{F})} dx dy dz \quad \vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y), R(x, y))^T$$

und Green

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint (Q_x(x, y) - P_y(x, y)) dx dy$$

weisen den Weg, wie Differentialformen zu interpretieren sind, um z. B. eine Schreibweise wie

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

zu ermöglichen.

Mit $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ sei $\int \omega$ ein Oberflächenintegral.

Für seine Berechnung gibt es mehrere Möglichkeiten, z. B. Satz von Gauss, linke Seite.

↑

↑ Transformation von Differentialformen (Rückführen, Pullback)

Mit Differentialformen wird der gemeinsame theoretische Hintergrund aller Integralsätze sichtbar. Diese lassen sich dann besonders kompakt formulieren, da die Rechenregeln so gestaltet wurden, dass sie das Ausrechnen der Funktionaldeterminante implizieren. In vielen Darstellungen ist der mathematische Aufwand aufgrund der koordinatenfreien Interpretation des Differentials als linearer Abbildung beträchtlich. Zudem wird hierdurch der Blick auf das Wesentliche verstellt. Betrachten wir zunächst die Transformationsformel in der Notation der Differentialformen.

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \iint_A f(x(u, v), y(u, v)) \underbrace{|x_u y_v - x_v y_u|}_{\begin{vmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix}} \, du \, dv$$

Gegeben sei eine 2-Form $\omega = f(x, y) \, dx \wedge dy$ auf \mathbb{R}^2 und $G(u, v) = \begin{pmatrix} g_1(u, v) \\ g_2(u, v) \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Zu ω wird eine Differentialform $G^*\omega$ definiert, die diese Integral-Transformation leistet. f wird mit G verkettet und dx, dy durch dg_1, dg_2 ersetzt.

$$\begin{aligned} G^*\omega &= f(g_1(u, v), g_2(u, v)) \, dg_1 \wedge dg_2 && \text{nach Definition} \\ &= f(g_1(u, v), g_2(u, v)) \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \, du + \frac{\partial g_1}{\partial y} \, dv \right) \wedge \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \, du + \frac{\partial g_2}{\partial y} \, dv \right) \\ &= f(g_1(u, v), g_2(u, v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} \, du \wedge dv \end{aligned}$$

$$\int_{G(A)} \omega = \int_A G^*\omega \quad \begin{array}{l} \text{falls } G \text{ orientierungserhaltend ist, d. h. die Determinante ist auf } A \text{ positiv,} \\ \text{falls } G \text{ orientierungsumkehrend ist, gilt: } \int_{G(A)} \omega = - \int_A G^*\omega \end{array}$$

↑ Beispiele für den Rücktransport

Gegeben sei die 2-Form $\omega = b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1$ auf \mathbb{R}^3 und

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u_1(u, v) \\ u_2(u, v) \\ u_1(u, v) - u_2(u, v) \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Dann ist $\Phi^*\omega = b_1(u_1, u_2, u_1 - u_2) \cdot [du_2 \wedge (du_1 - du_2)] +$ gemeint $u_i(u, v)$
 $b_2(u_1, u_2, u_1 - u_2) \cdot [(du_1 - du_2) \wedge du_1]$
 $= (-b_1(u_1, u_2, u_1 - u_2) + b_2(u_1, u_2, u_1 - u_2)) du_1 \wedge du_2$
 $= \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} du + \frac{\partial u_1}{\partial y} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} du + \frac{\partial u_2}{\partial y} dv \right)$
 $= \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial u_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial u_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial u_2(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv$

Gegeben sei die 2-Form $\omega = 3z dy \wedge dz + (x^2 + y^2) dz \wedge dx + xz dx \wedge dy$ auf \mathbb{R}^3 .

Berechne $\int_{\phi(A)} \omega$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$, $\phi(s, t) = \begin{pmatrix} s \\ t \\ st \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\phi(A)$ ist der Teilgraph von $f(x, y) = xy$ auf A .

Mit $dx = ds$ erhalten wir
 $dy = dt$
 $dz = tds + sdt$

$$\begin{aligned} \phi^*\omega &= 3stdt \wedge (tds + sdt) + (s^2 + t^2)(tds + sdt) \wedge ds + s^2t ds \wedge dt \\ &= (-s^3 - 4st^2 + s^2t) ds \wedge dt \end{aligned}$$

$$\int_{\phi(A)} \omega = \int_A \phi^*\omega = \int_0^1 \int_0^1 (-s^3 - 4st^2 + s^2t) ds dt = \dots = -\frac{3}{4}$$

$$\uparrow \quad d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$$

d ist mit φ^* vertauschbar.

Zuerst wird für 1-Formen nachgewiesen, dass die rechte Seite mit der linken übereinstimmt. Der Nachweis für 2-Formen kann auf k -Formen übertragen werden.

Gegeben sei eine 1-Form $\omega = f(x, y), \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ und $\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, v) \\ \varphi_2(u, v) \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$\varphi^*f = f \circ \varphi \quad \text{Verkettung } f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$$

$$d(\varphi^*f) = \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial v} dv \quad \text{nach Definition von } d$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right] du \quad \text{Kettenregel}$$

$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right] dv \quad \text{linke Seite}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\varphi^*(df) = \frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi d\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi d\varphi_2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv \right) \quad \text{rechte Seite}$$

Gegeben sei eine 2-Form $\omega = f(x, y) dx \wedge dy$ und $\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, v) \\ \varphi_2(u, v) \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$\varphi^*\omega = f \circ \varphi d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \quad \text{nach Definition von } \varphi^*$$

$$d(\varphi^*\omega) = d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \quad \text{nach Definition von } d$$

$$= \varphi^*(df) \wedge \varphi^*dx \wedge \varphi^*dy \quad d(f \circ \varphi) = d(\varphi^*f) = \varphi^*(df), \quad d\varphi_1 = \varphi^*dx, \quad d\varphi_2 = \varphi^*dy$$

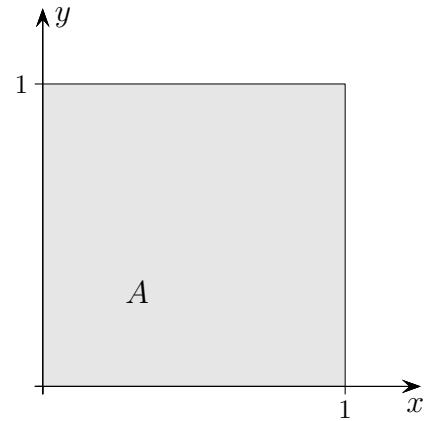
$$= \varphi^*(df \wedge dx \wedge dy) \quad \varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta \text{ ist leicht zu verifizieren}$$

$$= \varphi^*(d\omega)$$

$$\uparrow \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega$$

Dieser Zusammenhang soll an einem einfachen Beispiel aufgezeigt werden.

Gegeben sei die 1-Form $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ auf A , f und g stetig differenzierbar.



rechte Seite

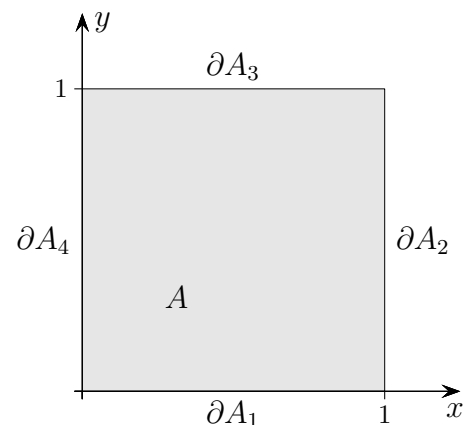
$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx \wedge dy \quad \text{wurde schon ermittelt, dann gilt:}$$

$$\begin{aligned} \int_A d\omega &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x} dx \right] dy - \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 [g(1, y) - g(0, y)] dy - \int_0^1 [f(x, 1) - f(x, 0)] dx \\ &= \int_0^1 g(1, y) dy - \int_0^1 g(0, y) dy - \int_0^1 f(x, 1) dx + \int_0^1 f(x, 0) dx \end{aligned}$$

linke Seite

Hierzu ist für die vier Randabschnitte ∂A_i eine Parametrisierung φ_i anzugeben, um durch Zurückholen von ω mit φ_i^* das Integral auszuwerten.

$$\begin{array}{l} \partial A_1 \left| \begin{array}{l} \varphi_1(t) \rightarrow (t, 0), \\ \varphi_2(t) \rightarrow (1, t) \\ \varphi_3(t) \rightarrow (t, 1) \\ \varphi_4(t) \rightarrow (0, t) \end{array} \right. \quad [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \end{array}$$



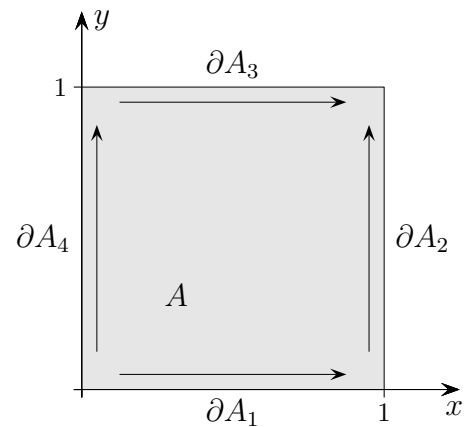
$$\int_{\partial A_1} \omega = \int_{[0,1]} \varphi_1^* \omega = \int_{[0,1]} f(t, 0) dt = \int_0^1 f(x, 0) dx$$

beachte: $dx = dt, dy = 0$

...

↑

© Roelfs



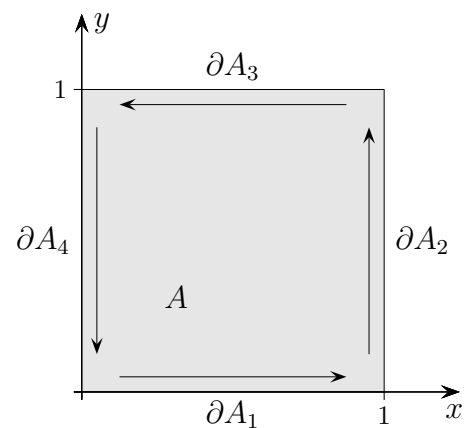
Zusammengefasst:

$$\int_A d\omega = \underbrace{\int_0^1 g(1, y) dy}_{\int_{\partial A_2} \omega} - \underbrace{\int_0^1 g(0, y) dy}_{\int_{\partial A_4} \omega} - \underbrace{\int_0^1 f(x, 1) dx}_{\int_{\partial A_3} \omega} + \underbrace{\int_0^1 f(x, 0) dx}_{\int_{\partial A_1} \omega} \stackrel{?}{=} \int_{\partial A} \omega$$

Durchläuft t das Intervall $[0, 1]$ von links nach rechts, so werden die Randabschnitte in den Pfeilrichtungen der oberen Grafik durchlaufen.

Nun gilt $\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$, wenn die Parametrisierung φ_i so gewählt wird, dass die Rand-

abschnitte in den Pfeilrichtungen der unteren Grafik durchlaufen werden, denn dann liegen die erforderlichen Minus-Zeichen vor. Diese können anhand der oberen Grafik auch nachträglich hinzugefügt werden. Der Durchlaufsinne des Randes (*die Orientierung*) ist also so zu wählen, dass beim Umlauf der Bereich A links von der Bewegungsrichtung liegt.



↑ Hodge *-Operator

Um z.B. das Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^3 mit

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 b_1 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + a_1 b_2 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + \dots \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \quad \text{oder} \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) - (a_3 b_1 - a_1 b_3) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

zu erhalten, wird ein linearer Operator mit den Zuordnungen

$$\begin{aligned} *(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 \\ *(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_2 \\ *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) &= -\mathbf{e}_2 \\ *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad \text{benötigt. Rechts steht jeweils das fehlende Element, bzw.}$$

das Dachprodukt der fehlenden Basiselemente, $*\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$, $*1 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$.

Das Vorzeichen ist $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{Anzahl der Vertauschungen}}$, z.B. ist $*(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_2$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Hier ist die Vertauschung 3 mit 2 erforderlich.}$$

$$*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \text{Vol}_{\text{Spat}}$$

Für den \mathbb{R}^4 mit der 4-Form $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$ der Basiselemente gilt entsprechend:

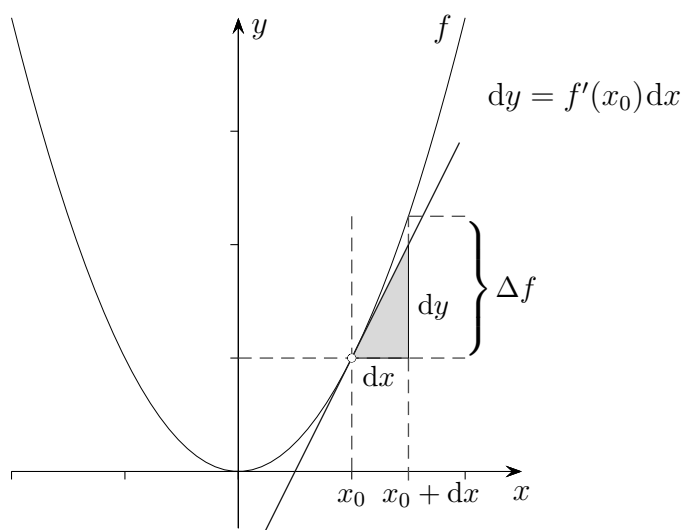
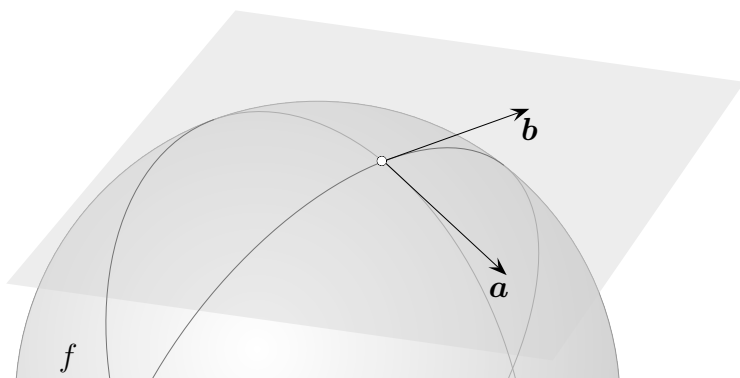
$$\begin{aligned} *(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 && 2 \text{ Vertauschungen für die Reihenfolge } \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \\ *(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4) &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 && 3 \\ *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) &= \mathbf{e}_2 && 2 \\ * \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 && 1 \text{ Vertauschung} \\ \\ *(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ *(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \end{aligned}$$

Allgemein gilt für den \mathbb{R}^n $*(\mathbf{e}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{\sigma(n)}$

Auf der rechten Seite ist die Reihenfolge beliebig, sie wird in $\text{sgn}(\sigma)$ berücksichtigt.

↑

↑ Tangentialraum



Die Elemente dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 einer Grassmann-Algebra können wie $dy = f'(x_0)dx$ mit dx als identische Funktion $h \rightarrow h$ als lineare Abbildungen betrachtet werden.

Die obige Tangentialebene wird von den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} (z. B.) aufgespannt.

Jeder Vektor dieses Tangentialraums V ist eine Linearkombination $\mathbf{x} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$. Damit ergeben sich die linearen Koordinaten-Abbildungen $dx_1: \mathbf{x} \rightarrow r$ und $dx_2: \mathbf{x} \rightarrow s$.

Diese stellen eine Basis für den Vektorraum V^* (Dualraum) aller linearen Abbildungen des Tangentialraums nach \mathbb{R} dar. Von V^* ausgehend erhalten wir die Grassmann-Algebra $\bigwedge V^*$.

Für die 1-Form $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ ist dann

$$df(\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)(\mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2$$

die Richtungsableitung von f in Richtung \mathbf{v} , wenn \mathbf{v} die Länge 1 hat.

↑ Gramsche Matrix G

Über das Volumen eines von $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aufgespannten Spats wissen wir bereits:

$$\text{Vol}_{\text{Spat}} = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{aa} & \mathbf{ab} & \mathbf{ac} \\ \mathbf{ba} & \mathbf{bb} & \mathbf{bc} \\ \mathbf{ca} & \mathbf{cb} & \mathbf{cc} \end{pmatrix}} = G$$

Diese Matrix enthält die Skalarprodukte \mathbf{ab} usw.

Für die Determinanten gilt dann: $\det(G) = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = (\det(A))^2$

Zusammengefasst ergibt das: $\text{Vol}_{\text{Spat}} = \sqrt{\det(G)}$

```
with(linalg):                # in Maple
a:=vector([1,2,0]):
b:=vector([0,2,1]):
c:=vector([0,0,3]):

sk:=(x,y)->evalm(x&*y):     # Skalarprodukt

A:=matrix([a,                # genauer: Transponierte von A
           b,
           c ]);

G:=matrix([[sk(a,a),sk(a,b),sk(a,c)],
           [sk(b,a),sk(b,b),sk(b,c)],
           [sk(c,a),sk(c,b),sk(c,c)] ]);

det(A); det(G);
```

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad G = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 6 \qquad \det(G) = 36$$

↑

↑ Differentialformen alternativ, siehe H. Heuser Lehrbuch der Analysis Teil 2

Differentialformen können als alternierende Multilinearformen gesehen werden. Betrachten wir hierzu einige Beispiele.

Grad 2 (2-Formen)

$$\omega = P dy \wedge dz$$

$$dy \wedge dz = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} \right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\psi = Q dz \wedge dx$$

$$\omega = Q dx \wedge dx$$

$$dz \wedge dx = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} \right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{11} & x_{12} \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$dx \wedge dx = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} \right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{11} & x_{12} \end{vmatrix} \end{cases}$$

Grad 3

$$\xi = R dz \wedge dy \wedge dx$$

$$dz \wedge dy \wedge dx = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} \right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{vmatrix} \end{cases}$$

Grad 1

$$\varphi = dx$$

$$dx = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longrightarrow x_1 \end{cases}$$

Grad 1

$$\chi = dz$$

$$dz = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longrightarrow x_3 \end{cases}$$

Aus den Rechenregeln für Determinanten folgen Beziehungen wie:

$$dx \wedge dx = 0 \quad \text{und} \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy \quad \text{und} \quad dy \wedge dz \wedge dx = dx \wedge dy \wedge dz$$

Grad r , R ist auf B mit $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert.

$$\omega = R dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_r}$$

$$dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} = \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{r\text{-fach}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ \vdots \\ x_{nr} \end{pmatrix} \end{array} \right] \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{j_1 1} & x_{j_1 2} & \dots & x_{j_1 r} \\ x_{j_2 1} & x_{j_2 2} & \dots & x_{j_2 r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j_r 1} & x_{j_r 2} & \dots & x_{j_r r} \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

(j_1, j_2, \dots, j_r) ist ein r -Tupel mit $1 \leq j_i \leq n$.

Wiederholungen sind möglich. Für $r > n$ müssen mindestens zwei Zahlen gleich sein.

Das Produkt ist dann null.

Für zwei Tupel (j_1, j_2, \dots, j_s) und (k_1, k_2, \dots, k_t) mit $1 \leq j_i, k_m \leq n$ sei mit dem $(s+t)$ -Tupel $(j_1, j_2, \dots, j_s, k_1, k_2, \dots, k_t)$ das äußere Produkt auf $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(s+t)\text{-fach}}$ definiert:

$$(dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}) \wedge (dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \wedge \dots \wedge dx_{k_t}) = dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \wedge \dots \wedge dx_{k_t}$$

Wenn das $(s+t)$ -Tupel zwei gleiche Zahlen enthält, und dies liegt sicher mit $s+t > n$ vor, so ist das Produkt null.

Die Definition wird noch durch Funktionen als Koeffizienten und deren Produkt ergänzt. Funktionen werden punktweise betrachtet, so dass die Funktionswerte nur als Zahlen in die Rechnung eingehen.