Differentialformen

Differentialformen sind (noch zu interpretierende) Terme der Art:

$$\omega = xy^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$
$$\xi = (x^2yz - yz)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

Das Produkt $\wedge$ ist die alternierende multilineare Verknüpfung der Grassmann-Algebra $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$.
Die Addition wird jeweils nur für die Teilräume $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ benötigt, also nur für k-Formen.
Mit den Rechenregeln der Grassmann-Algebra mache man sich vertraut.
Eine typische Rechnung (das Produkt von 1-Formen ergibt 2-Formen) lautet:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3)\wedge(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3)\\ &= a_1b_1(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2) + \ldots\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)\\ &\quad \text{beachte } \boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_i = 0 \text{ und } \boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

Die Beziehung zur Analysis kann mit dem (äußeren) Differential $\mathrm{d}\omega$ einer Differentialform ω erahnt werden. Für eine Funktion f ist $\mathrm{d}f$ definitionsgemäß das totale Differential:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

Sei $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. P und Q sind Funktionen mit passenden Voraussetzungen. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y \qquad \text{definitionsgemäß}\\ &= \Big(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\Big)\wedge\mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y\Big)\wedge\mathrm{d}y\\ &= \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &= \Big(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Sei $\omega = P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &= \Big(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \ldots\\ &= \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ &= \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \qquad \text{beachte: } \operatorname{div}\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\end{aligned}$$

Sei $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y + \mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\wedge\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Beachte:

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}f_1\wedge\mathrm{d}f_2\wedge\mathrm{d}f_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

siehe Grassmann-Algebra

Die Integralsätze von Gauss

$$\iint\limits_A \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\mathrm{o}}\,dA = \iiint\limits_V \Big(\underbrace{P_x(x,y) + Q_y(x,y) + Q_y(x,y)}_{\text{Divergenz }\; div(\overrightarrow{F})}\Big)\,dx\,dy\,dz \qquad \overrightarrow{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y), R(x,y)\big)^{\mathrm{T}}$$

und Green

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\Big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\Big)\,dx\,dy$$

weisen den Weg, wie Differentialformen zu interpretieren sind, um z. B. eine Schreibweise wie

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$$

zu ermöglichen.

Mit $\omega = P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ sei $\displaystyle\int\omega$ ein Oberflächenintegral.
Für seine Berechnung gibt es mehrere Möglichkeiten, z. B. Satz von Gauss, linke Seite.

Differentialformen alternativ, siehe H. Heuser Lehrbuch der Analysis Teil 2

Differentialformen können als alternierende Multilinearformen gesehen werden.
Betrachten wir hierzu einige Beispiele.

Grad 2 (2-Formen)

$\omega \;=\; P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}\right] & \longrightarrow \begin{vmatrix}x_{21} & x_{22}\\ x_{31} & x_{32}\end{vmatrix}\end{cases}$$

$\psi \;=\; Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}\right] & \longrightarrow \begin{vmatrix}x_{31} & x_{32}\\ x_{11} & x_{12}\end{vmatrix}\end{cases}$$

$\omega \;=\; Q\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}\right] & \longrightarrow \begin{vmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{11} & x_{12}\end{vmatrix}\end{cases}$$

Grad 3

$\xi \;=\; R\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{pmatrix}\right] & \longrightarrow \begin{vmatrix}x_{31} & x_{32} & x_{33}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{11} & x_{12} & x_{13}\end{vmatrix}\end{cases}$$

Grad 1

$\varphi \;=\; \mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & \longrightarrow x_1\end{cases}$$

Grad 1

$\chi \;=\; \mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}z = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & \longrightarrow x_3\end{cases}$$

Aus den Rechenregeln für Determinanten folgen Beziehungen wie:

$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x = 0 \quad$ und $\quad \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = -\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y \quad$ und $\quad \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

Grad r, R ist auf B mit $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert.

$$\omega \;=\; R\,\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_r}$$

$$\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_r} = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{r\text{-fach}} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ \vdots \\ x_{nr} \end{pmatrix}\right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{j_1 1} & x_{j_1 2} & \ldots & x_{j_1 r} \\ x_{j_2 1} & x_{j_2 2} & \ldots & x_{j_2 r} \\ \vdots & & & \\ x_{j_r 1} & x_{j_r 2} & \ldots & x_{j_r r} \end{vmatrix} \end{cases}$$

$(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ ist ein r-Tupel mit $1 \leq j_i \leq n$.
Wiederholungen sind möglich. Für $r > n$ müssen mindestens zwei Zahlen gleich sein.
Das Produkt ist dann null.

Für zwei Tupel $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ und $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ mit $1 \leq j_i, k_m \leq n$ sei mit dem $(s+t)$-Tupel $(j_1, j_2, \ldots, j_s, k_1, k_2, \ldots, k_t)$ das äußere Produkt auf $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{(s+t)\text{-fach}}$ definiert:

$$(\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_s}) \wedge (\mathrm{d}x_{k_1} \wedge \mathrm{d}x_{k_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}k_{j_t}) = \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_s} \wedge \mathrm{d}x_{k_1} \wedge \mathrm{d}x_{k_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}k_{j_t}$$

Wenn das $(s+t)$-Tupel zwei gleiche Zahlen enthält, und dies liegt sicher mit $s+t > n$ vor, so ist das Produkt null.
Die Definition wird noch durch Funktionen als Koeffizienten und deren Produkt ergänzt.
Funktionen werden punktweise betrachtet, so dass die Funktionswerte nur als Zahlen in die Rechnung eingehen.