1. Differentialformen   3 Seiten
2. Weiteres zur äußeren Ableitung
3. Transformation von Differentialformen (Rückführen, Pullback)
4. Beispiele
5. $\mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \varphi^*(\mathrm{d}\omega)$
6. $\displaystyle\int_{\partial A} \omega = \int_A \mathrm{d}\omega$ 2 Seiten
7. Hodge $*$-Operator
8. Tangentialraum
9. Gramsche Matrix
10. Differentialformen   alternativ

↑ Differentialformen

Differentialformen sind (noch zu interpretierende) Terme der Art: $\omega = xy^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

$$\xi = (x^2yz - yz)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

Das Dach-Produkt $\wedge$ ist die alternierende Verknüpfung der Grassmann-Algebra.
Bei einem Dach-Produkt von Summen können die Klammern daher distributiv aufgelöst werden, für Benachbartes gilt $\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_i = 0$ und $\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_i$. Die Addition wird hier jeweils nur für k-Formen benötigt. Eine typische Rechnung lautet (das Produkt von 1-Formen ergibt 2-Formen):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3)\wedge(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3)\\ &= a_1b_1(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2) + \ldots\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)\end{aligned}$$

Differentialformen im $\mathbb{R}^4$

Im $\mathbb{R}^4$ gibt es folgende k-Formen, auch jeweils deren Summen:

0-Formen: differenzierbare Funktionen

$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

1-Formen (Pfaffsche Formen, a_i differenzierbare Funktion $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$):

$a_1\mathrm{d}x_1,\ a_2\mathrm{d}x_2,\ a_3\mathrm{d}x_3,\ a_4\mathrm{d}x_4$

2-Formen:

$a_{12}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2,\ a_{13}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3,\ a_{14}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_4,\ a_{23}\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3,\ a_{24}\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_4,\ a_{34}\,\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$

3-Formen:

$a_{123}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3,\ a_{124}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_4,\ a_{134}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4,\ a_{234}\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$

4-Formen:

$a_{1234}\,\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$

Beachte: Es gilt zwar $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$, aber es gilt nicht für alle k-Formen $\omega \wedge \omega = 0$.

Für $\omega = a\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + b\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ gilt $\omega \wedge \omega = 2ab\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$.

Beispiele, siehe Grassmann-Algebra

$$(a\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3) \wedge b\,\mathrm{d}x_2 = -ab\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$$

$$(a\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) \wedge (b\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3) = 0$$ $\mathrm{d}x_2$ gemeinsames Element.

$$(a\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4) \wedge (b\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) = (-1)^{2\cdot 2} ab\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$$

Die Beziehung zur Analysis kann mit dem (äußeren) Differential $\mathrm{d}\omega$ einer Differentialform ω erahnt werden. Für eine Funktion f ist $\mathrm{d}f$ definitionsgemäß das totale Differential:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \qquad \text{äußere Ableitung}$$

Sei $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. P und Q sind Funktionen mit passenden Voraussetzungen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y \qquad \text{definitionsgemäß, es wird jeweils das totale Differential eingesetzt}\\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}y\\
&= \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \qquad \text{Dies ähnelt dem Satz von Green/Gauss im } \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Sei $\omega = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \ldots\\
&= \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \qquad \text{beachte: } \operatorname{div} \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}
\end{aligned}$$

Dies ähnelt dem Satz von Gauss im $\mathbb{R}^3$.

k-Formen werden in naheliegender Weise auf geeigneten
k-dimensionalen Teilmengen (Mannigfaltigkeiten) des $\mathbb{R}^n$ integriert.

$$\int\limits_A \omega := \int\limits_A f(x_1, \ldots, x_k)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_k$$

Sei $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}Q\wedge\mathrm{d}y + \mathrm{d}R\wedge\mathrm{d}z \\
&= \Big(\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}y + \Big(\frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y\Big)\wedge\mathrm{d}z \\
&= \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Dies ähnelt dem Satz von Stokes.

Beachte:

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}f_1\wedge\mathrm{d}f_2\wedge\mathrm{d}f_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

siehe Grassmann-Algebra

Die Integralsätze von Gauss

$$\iint\limits_A \overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\mathrm{o}}\,dA = \iiint\limits_V \Big(\underbrace{P_x(x,y) + Q_y(x,y) + Q_y(x,y)}_{\text{Divergenz } div(\overrightarrow{F})}\Big)\,dx\,dy\,dz$$

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y), R(x,y)\big)^{\mathrm{T}}$$

und Green

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint \Big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\Big)\,dx\,dy$$

weisen den Weg, wie Differentialformen zu interpretieren sind, um z. B. eine Schreibweise wie

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_\Omega \mathrm{d}\omega$$

zu ermöglichen.

Mit $\omega = P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ sei $\int\omega$ ein Oberflächenintegral.
Für seine Berechnung gibt es mehrere Möglichkeiten, z. B. Satz von Gauss, linke Seite.

© Roolfs

↑ Weiteres zur äußeren Ableitung

a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(fg) &= \sum \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i \\
&= \sum \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big)\,\mathrm{d}x_i \\
&= g \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i + f \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i \\
\mathrm{d}(fg) &= \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\alpha &= f\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_n} = f\,\mathrm{dx}_\alpha \\
\beta &= g\,\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_m} = g\,\mathrm{dx}_\beta \\
\alpha \wedge \beta &= fg\,\mathrm{dx}_\alpha \wedge \mathrm{dx}_\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) &= (\mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g) \wedge \mathrm{dx}_\alpha \wedge \mathrm{dx}_\beta \\
&= \mathrm{d}f \cdot g \wedge \mathrm{dx}_\alpha \wedge \mathrm{dx}_\beta + f \cdot \mathrm{d}g \wedge \mathrm{dx}_\alpha \wedge \mathrm{dx}_\beta \\
&= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{dx}_\alpha \wedge g\,\mathrm{dx}_\beta + (-1)^n f\,\mathrm{dx}_\alpha \wedge \mathrm{d}g \wedge \mathrm{dx}_\beta && |\,\mathrm{d}g \text{ muss } n\text{-mal vertauscht werden.} \\
\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) &= \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^n \alpha \wedge \mathrm{d}\beta
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_3 && |\text{Indizierung o.B.d.A} \\
\mathrm{d}(\mathrm{d}f) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_2 + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_3}\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Big)\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= 1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 && |\,\text{Vorbemerkung} \\
\mathrm{d}(\mathrm{d}f) &= \mathrm{d}1 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 && |\,\text{allgemeiner Fall} \\
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \mathrm{d}(\mathrm{d}f \wedge (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)) \\
&= \underbrace{\mathrm{d}(\mathrm{d}f) \wedge (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)}_{=0,\ \mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0} - \underbrace{\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)}_{=0,\ \text{Vorbemerkung}} && |\,\text{mit b)} \\
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= 0
\end{aligned}$$

↑ Transformation von Differentialformen
(Rückführen, Pullback)

Mit Differentialformen wird der gemeinsame theoretische Hintergrund aller Integralsätze sichtbar. Diese lassen sind dann besonders kompakt formulieren, da die Rechenregeln so gestaltet wurden, dass sie das Ausrechnen der Funktionaldeterminante implizieren. In vielen Darstellungen ist der mathematische Aufwand aufgrund der koordinatenfreien Interpretation des Differentials als linearer Abbildung beträchtlich. Zudem wird hierdurch der Blick auf das Wesentliche verstellt. Betrachten wir zunächst die Transformationsformel in der Notation der Differentialformen.

$$\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_A f(x(u,v),y(u,v))\,\underbrace{\left|x_u y_v - x_v y_u\right|}_{\begin{vmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Gegeben sei eine 2-Form $\omega = f(x,y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ auf $\mathbb{R}^2$ und $G(u,v) = \begin{pmatrix} g_1(u,v) \\ g_2(u,v) \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Zu ω wird eine Differentialform $G^*\omega$ definiert, die diese Integral-Transformation leistet.
f wird mit G verkettet und $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ durch $\mathrm{d}g_1, \mathrm{d}g_2$ ersetzt.

$$\begin{aligned} G^*\omega &= f(g_1(u,v), g_2(u,v))\,\mathrm{d}g_1\wedge\mathrm{d}g_2 \qquad \text{nach Definition} \\ &= f(g_1(u,v), g_2(u,v))\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial g_1}{\partial y}\,\mathrm{d}v\right)\wedge\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial g_2}{\partial y}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= f(g_1(u,v), g_2(u,v))\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial g_2(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v \end{aligned}$$

$$\int_{G(A)} \omega = \int_A G^*\omega$$

falls G orientierungserhaltend ist, d. h. die Determinante ist auf A positiv,

falls G orientierungsumkehrend ist, gilt: $\displaystyle\int_{G(A)} \omega = -\int_A G^*\omega$

$\uparrow$ Beispiele für den Rücktransport

Gegeben sei die 2-Form $\omega = b_1\,\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3 + b_2\,\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1$ auf $\mathbb{R}^3$ und

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u_1(u,v) \\ u_2(u,v) \\ u_1(u,v)-u_2(u,v) \end{pmatrix},\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Dann ist
$$\begin{aligned}
\Phi^*\omega &= b_1(u_1,u_2,u_1-u_2)\cdot[\mathrm{d}u_2\wedge(\mathrm{d}u_1-\mathrm{d}u_2)] + \qquad \text{gemeint } u_i(u,v) \\
&\qquad b_2(u_1,u_2,u_1-u_2)\cdot[(\mathrm{d}u_1-\mathrm{d}u_2)\wedge\mathrm{d}u_1] \\
&= \big(-b_1(u_1,u_2,u_1-u_2)+b_2(u_1,u_2,u_1-u_2)\big)\,\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}u_2 \\
&= \big(\quad \ldots \quad\big)\big(\frac{\partial u_1}{\partial x}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial u_1}{\partial y}\,\mathrm{d}v\big)\wedge\big(\frac{\partial u_2}{\partial x}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial u_2}{\partial y}\,\mathrm{d}v\big) \\
&= \big(\quad \ldots \quad\big)\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial u_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial u_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial u_2(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Gegeben sei die 2-Form $\omega = 3z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ auf $\mathbb{R}^3$.

Berechne $\displaystyle\int_{\phi(A)}\omega$, $\quad A=[0,1]\times[0,1]$, $\qquad \phi(s,t)=\begin{pmatrix} s\\ t\\ st\end{pmatrix},\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$\phi(A)$ ist der Teilgraph von $f(x,y)=xy$ auf A.

Mit
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \mathrm{d}s \\
\mathrm{d}y &= \mathrm{d}t \\
\mathrm{d}z &= t\mathrm{d}s + s\mathrm{d}t
\end{aligned}$$
erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi^*\omega &= 3st\,\mathrm{d}t\wedge(t\mathrm{d}s+s\mathrm{d}t) + (s^2+t^2)\,(t\mathrm{d}s+s\mathrm{d}t)\wedge\mathrm{d}s + s^2t\,\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t \\
&= (-s^3-4st^2+s^2t)\,\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\int_{\phi(A)}\omega = \int_A\phi^*\omega = \int_0^1\!\!\int_0^1(-s^3-4st^2+s^2t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \ldots = -\frac{3}{4}$$

↑ $$\mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \varphi^*(\mathrm{d}\omega)$$

d ist mit φ^* vertauschbar.
Zuerst wird für 1-Formen nachgewiesen, dass die rechte Seite mit der linken übereinstimmt.
Der Nachweis für 2-Formen kann auf k-Formen übertragen werden.

Gegeben sei eine 1-Form $\omega = f(x,y)$, $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ und $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

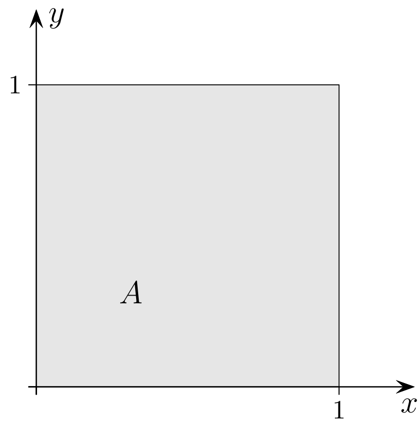
$$\begin{aligned}
\varphi^* f &= f\circ\varphi && \text{Verkettung } f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)) \\
\mathrm{d}(\varphi^* f) &= \frac{\partial f\circ\varphi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial f\circ\varphi}{\partial v}\,\mathrm{d}v && \text{nach Definition von d} \\
&= \Big[\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\Big]\mathrm{d}u && \text{Kettenregel} \\
&\qquad + \Big[\frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\Big]\mathrm{d}v && \text{linke Seite}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \\
\varphi^*(\mathrm{d}f) &= \frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\,\mathrm{d}\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\,\mathrm{d}\varphi_2 \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\circ\varphi\,\big(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\mathrm{d}v\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\circ\varphi\,\big(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\mathrm{d}v\big) && \text{rechte Seite}
\end{aligned}$$

Gegeben sei eine 2-Form $\omega = f(x,y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ und $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega &= f\circ\varphi\,\mathrm{d}\varphi_1\wedge\mathrm{d}\varphi_2 && \text{nach Definition von } \varphi^* \\
\mathrm{d}(\varphi^*\omega) &= \mathrm{d}(f\circ\varphi)\wedge\mathrm{d}\varphi_1\wedge\mathrm{d}\varphi_2 && \text{nach Definition von d} \\
&= \varphi^*(\mathrm{d}f)\wedge\varphi^*\mathrm{d}x\wedge\varphi^*\mathrm{d}y && \mathrm{d}(f\circ\varphi) = \mathrm{d}(\varphi^* f) = \varphi^*(\mathrm{d}f),\ \mathrm{d}\varphi_1 = \varphi^*\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}\varphi_2 = \varphi^*\mathrm{d}y \\
&= \varphi^*\big(\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\big) && \varphi^*(\alpha\wedge\beta) = \varphi^*\alpha\wedge\varphi^*\beta \ \text{ ist leicht zu verifizieren} \\
&= \varphi^*(\mathrm{d}\omega)
\end{aligned}$$

$\uparrow \qquad \displaystyle\int_{\partial A} \omega = \int_A \mathrm{d}\omega$



Dieser Zusammenhang soll an einem einfachen Beispiel aufgezeigt werden.

Gegeben sei die 1-Form $\omega = f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y$ auf A, f und g stetig differenzierbar.

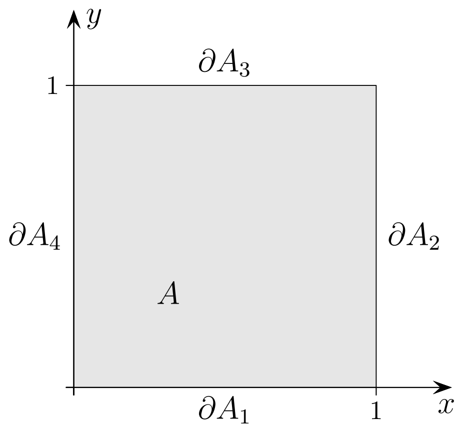
rechte Seite

$$\mathrm{d}\omega \;=\; \Big(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \qquad \text{wurde schon ermittelt, dann gilt:}$$

$$\begin{aligned}
\int_A \mathrm{d}\omega &= \int_0^1\!\!\int_0^1 \Big(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1\Big[\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y - \int_0^1\Big[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \big[g(1,y) - g(0,y)\big]\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \big[f(x,1) - f(x,0)\big]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 g(1,y)\,\mathrm{d}y \;-\; \int_0^1 g(0,y)\,\mathrm{d}y \;-\; \int_0^1 f(x,1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x,0)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

linke Seite

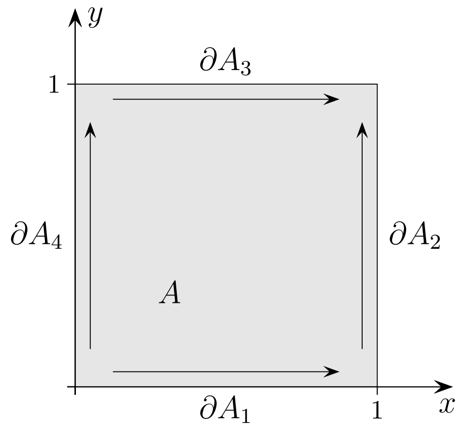
Hierzu ist für die vier Randabschnitte ∂A_i eine Parametrisierung φ_i anzugeben, um durch Zurückholen von ω mit φ_i^* das Integral auszuwerten.



$$\begin{array}{l|lll}
\partial A_1 & \varphi_1(t) & \to & (t,0), \qquad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
\partial A_2 & \varphi_2(t) & \to & (1,t) \\
\partial A_3 & \varphi_3(t) & \to & (t,1) \\
\partial A_4 & \varphi_4(t) & \to & (0,t)
\end{array}$$

$$\int_{\partial A_1} \omega \;=\; \int_{[0,1]} \varphi_1^*\omega \;=\; \int_{[0,1]} f(t,0)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 f(x,0)\,\mathrm{d}x \qquad \text{beachte: } \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = 0$$

$\dots$

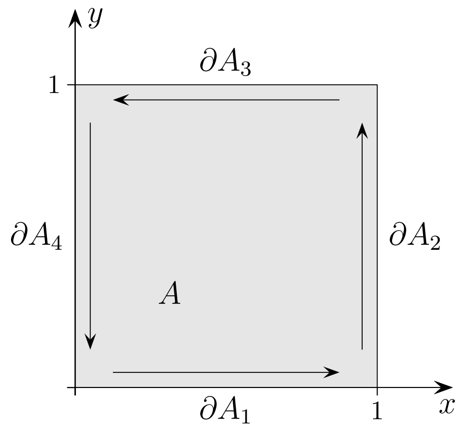


Zusammengefasst:

$$\int_A \mathrm{d}\omega \;=\; \underbrace{\int_0^1 g(1,y)\,\mathrm{d}y}_{\displaystyle\int_{\partial A_2}\omega} - \underbrace{\int_0^1 g(0,y)\,\mathrm{d}y}_{\displaystyle\int_{\partial A_4}\omega} - \underbrace{\int_0^1 f(x,1)\,\mathrm{d}x}_{\displaystyle\int_{\partial A_3}\omega} + \underbrace{\int_0^1 f(x,0)\,\mathrm{d}x}_{\displaystyle\int_{\partial A_1}\omega} \stackrel{?}{=} \int_{\partial A}\omega$$

Durchläuft t das Intervall $[0,1]$ von links nach rechts, so werden die Randabschnitte in den Pfeilrichtungen der oberen Grafik durchlaufen.

Nun gilt $\displaystyle\int_A \mathrm{d}\omega = \int_{\partial A}\omega,$ wenn die Parametrisierung φ_i so gewählt wird, dass die Randabschnitte in den Pfeilrichtungen der unteren Grafik durchlaufen werden, denn dann liegen die erforderlichen Minus-Zeichen vor. Diese können anhand der oberen Grafik auch nachträglich hinzugefügt werden. Der Durchlaufsinn des Randes (*die Orientierung*) ist also so zu wählen, dass beim Umlauf der Bereich A links von der Bewegungsrichtung liegt.



↑ Hodge ∗-Operator

Um z. B. das Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3)\wedge(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= a_1b_1(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2) + \ldots \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2) \quad \text{oder} \\
\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3) - (a_3b_1 - a_1b_3)(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}$$

zu erhalten, wird ein linearer Operator mit den Zuordnungen

$$\begin{aligned}
*(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_1 \\
*(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1) &= \boldsymbol{e}_2 \\
*(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3) &= -\boldsymbol{e}_2 \\
*(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

benötigt. Rechts steht jeweils das fehlende Element, bzw.

das Dachprodukt der fehlenden Basiselemente, $*\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$, $\quad *1 = \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$.

Das Vorzeichen ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{Anzahl der Vertauschungen}}$, z. B. ist $*(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{e}_2$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hier ist die Vertauschung 3 mit 2 erforderlich.

$$*(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = \mathrm{Vol}_{\mathrm{Spat}}$$

Für den $\mathbb{R}^4$ mit der 4-Form $\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4$ der Basiselemente gilt entsprechend:

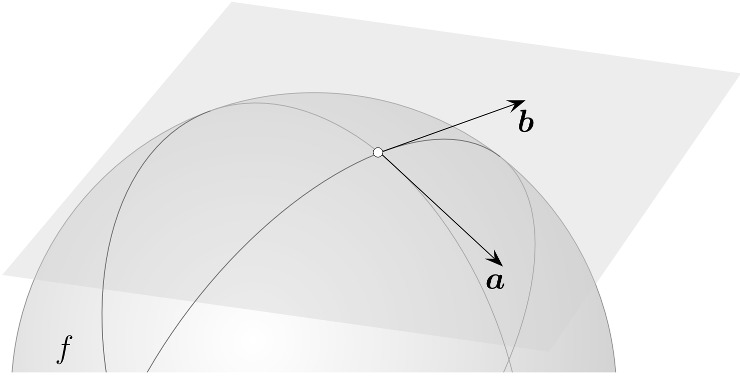
$$\begin{aligned}
*(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_4 && \text{2 Vertauschungen für die Reihenfolge } \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4 \\
*(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_4) &= -\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 && 3 \\
*(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4) &= \boldsymbol{e}_2 && 2 \\
*\boldsymbol{e}_2 &= -\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4 && \text{1 Vertauschung}
\end{aligned}$$

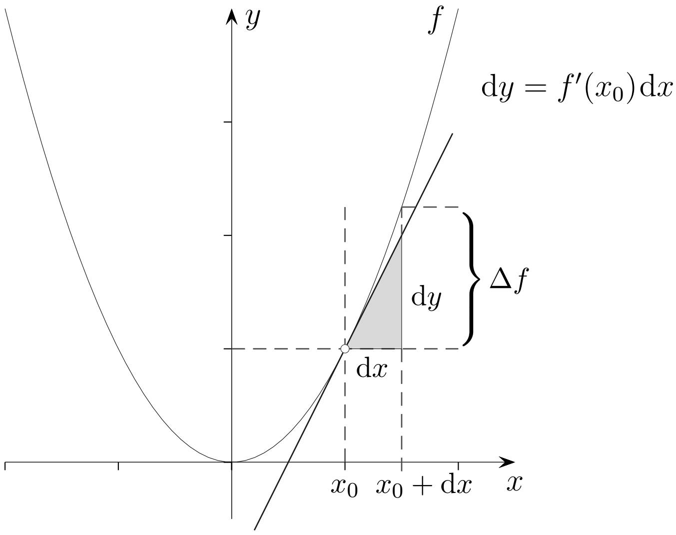
$$\begin{aligned}
*(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \\
*(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

Allgemein gilt für den $\mathbb{R}^n$ $\quad *(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{e}_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\boldsymbol{e}_{\sigma(k+1)}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{e}_{\sigma(n)}$

Auf der rechten Seite ist die Reihenfolge beliebig, sie wird in $\operatorname{sgn}(\sigma)$ berücksichtigt.

↑ Tangentialraum





Die Elemente $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_4$ einer Grassmann-Algebra können wie $\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$ mit $\mathrm{d}x$ als identische Funktion $h \longrightarrow h$ als lineare Abbildungen betrachtet werden.
Die obige Tangentialebene wird von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ (z. B.) aufgespannt.
Jeder Vektor dieses Tangentialraums V ist eine Linearkombination $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$. Damit ergeben sich die linearen Koordinaten-Abbildungen $\mathrm{d}x_1$: $\boldsymbol{x} \longrightarrow r$ und $\mathrm{d}x_2$: $\boldsymbol{x} \longrightarrow s$.
Diese stellen eine Basis für den Vektorraum V^* (Dualraum) aller linearen Abbildungen des Tangentialraums nach $\mathbb{R}$ dar. Von V^* ausgehend erhalten wir die Grassmann-Algebra $\bigwedge V^*$.
Für die 1-Form $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ ist dann

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{v}) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y\big)(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial f}{\partial x}\,v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\,v_2$$

die Richtungsableitung von f in Richtung $\boldsymbol{v}$, wenn $\boldsymbol{v}$ die Länge 1 hat.

↑ Gramsche Matrix G

Über das Volumen eines von $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ aufgespannten Spats wissen wir bereits:

$$\mathrm{Vol}_{\mathrm{Spat}} = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$AA^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{aa} & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ba} & \boldsymbol{bb} & \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{ca} & \boldsymbol{cb} & \boldsymbol{cc} \end{pmatrix}}_{\text{Diese Matrix enthält die Skalarprodukte } \boldsymbol{ab} \text{ usw.}} = G$$

Für die Determinanten gilt dann: $\det(G) = \det(AA^\top) = \det(A)\det(A^\top) = \big(\det(A)\big)^2$

Zusammengefasst ergibt das: $\mathrm{Vol}_{\mathrm{Spat}} = \sqrt{\det(G)}$

```
with(linalg):                # in Maple
a:=vector([1,2,0]):
b:=vector([0,2,1]):
c:=vector([0,0,3]):

sk:=(x,y)->evalm(x&*y):      # Skalarprodukt

A:=matrix([a,                # genauer: Transponierte von A
           b,
           c ]);

G:=matrix([[sk(a,a),sk(a,b),sk(a,c)],
           [sk(b,a),sk(b,b),sk(b,c)],
           [sk(c,a),sk(c,b),sk(c,c)] ]);

det(A); det(G);
```

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad G = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$\det(A) = 6$ $\qquad$ $\det(G) = 36$

↑ Differentialformen alternativ, siehe H. Heuser Lehrbuch der Analysis Teil 2

Differentialformen können als alternierende Multilinearformen gesehen werden.
Betrachten wir hierzu einige Beispiele.

Grad 2 (2-Formen)

$\omega \;=\; P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\end{pmatrix}\right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22}\\ x_{31} & x_{32}\end{vmatrix}\end{cases}$$

$\psi \;=\; Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\end{pmatrix}\right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32}\\ x_{11} & x_{12}\end{vmatrix}\end{cases}$$

$\omega \;=\; Q\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\end{pmatrix}\right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{11} & x_{12}\end{vmatrix}\end{cases}$$

Grad 3

$\xi \;=\; R\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{13}\\ x_{23}\\ x_{33}\end{pmatrix}\right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{11} & x_{12} & x_{13}\end{vmatrix}\end{cases}$$

Grad 1

$\varphi \;=\; \mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} & \longrightarrow x_1\end{cases}$$

Grad 1

$\chi \;=\; \mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}z = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} & \longrightarrow x_3\end{cases}$$

Aus den Rechenregeln für Determinanten folgen Beziehungen wie:

$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x = 0 \quad$ und $\quad \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = -\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y \quad$ und $\quad \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

↑ © Roolfs

Grad r, R ist auf B mit $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert.

$$\omega = R\,\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_r}$$

$$\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_r} = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{r\text{-fach}} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ \vdots \\ x_{nr} \end{pmatrix} \right] & \longrightarrow \begin{vmatrix} x_{j_1 1} & x_{j_1 2} & \ldots & x_{j_1 r} \\ x_{j_2 1} & x_{j_2 2} & \ldots & x_{j_2 r} \\ \vdots & & & \\ x_{j_r 1} & x_{j_r 2} & \ldots & x_{j_r r} \end{vmatrix} \end{cases}$$

$(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ ist ein r-Tupel mit $1 \leq j_i \leq n$.
Wiederholungen sind möglich. Für $r > n$ müssen mindestens zwei Zahlen gleich sein.
Das Produkt ist dann null.

Für zwei Tupel $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ und $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$ mit $1 \leq j_i, k_m \leq n$ sei mit dem $(s+t)$-Tupel $(j_1, j_2, \ldots, j_s, k_1, k_2, \ldots, k_t)$ das äußere Produkt auf $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{(s+t)\text{-fach}}$ definiert:

$$(\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_s}) \wedge (\mathrm{d}x_{k_1} \wedge \mathrm{d}x_{k_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}k_{j_t}) = \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_s} \wedge \mathrm{d}x_{k_1} \wedge \mathrm{d}x_{k_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}k_{j_t}$$

Wenn das $(s+t)$-Tupel zwei gleiche Zahlen enthält, und dies liegt sicher mit $s+t > n$ vor, so ist das Produkt null.
Die Definition wird noch durch Funktionen als Koeffizienten und deren Produkt ergänzt.
Funktionen werden punktweise betrachtet, so dass die Funktionswerte nur als Zahlen in die Rechnung eingehen.