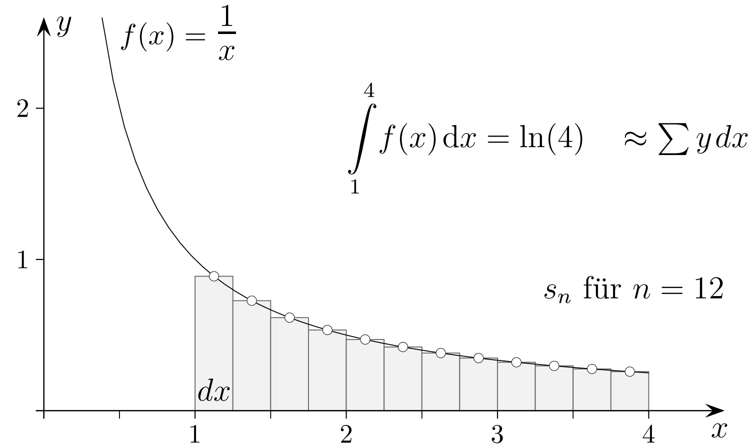
Differentiale

$s_8 = 1{,}380935451\ldots$
$s_{16} = 1{,}384929886\ldots$
$s_{32} = 1{,}385951596\ldots$
$s_{64} = 1{,}386208565\ldots$
$s_{128} = 1{,}386272905\ldots$
$s_{256} = 1{,}386288996\ldots$
$s_{512} = 1{,}386293020\ldots$
$s_{1024} = 1{,}386294025\ldots$
$s_{2048} = 1{,}386294277\ldots$
$s_{4096} = 1{,}386294340\ldots$
$s_{8192} = 1{,}386294355\ldots$

$\longrightarrow \quad 1{,}3862943611\ldots = \ln(4)$



s_n ist Inhaltssumme der Rechtecksflächen für n Unterteilungen des Intervalls $[1;4]$.
Die Folge erzeugt in eindeutiger Weise den Grenzwert (Inhalt der Fläche unter dem Graphen im Bereich $[1;4]$).

Ein Differential wird heutzutage als

- bloßer Notationsbestandteil ohne eigenständige Bedeutung,
- linearer Anteil $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ des Zuwachses einer Funktion, siehe Ende Seite 3,
- unendlich kleine Größe angesehen (geht auf die Brüder Bernoulli und l'Hospital zurück).

Das Letztere wird häufig mit dem Hinweis auf die Nichtstandardanalysis verbunden, in der es Elemente ungleich null, jedoch kleiner als jede pos. reelle Zahl, gibt. Zuvor muss der Körper der reellen Zahlen aufwändig erweitert werden. Die Behauptung, der Leibniz-Kalkül ist nicht begründet, stellt sich bei näherer Betrachtung als nicht richtig heraus.
Leibniz zeigt in der unveröffentlichten Schrift *De Quadratura arithmetica*, erschien erst 1993 zum ersten Mal vollständig im Druck, dass eine krummlinig begrenzte Fläche durch eine Summe von Rechtecken beliebig genau angenähert werden kann. Beliebig genau heißt: Der Fehler kann kleiner als jede vorgegebene positive Zahl gemacht werden (bei Leibniz Z statt ε). Zusammen mit dem Begriff der Kontinuität[1], hier veranschaulicht durch die Folge s_n, wird sichtbar, dass die Leibnizsche Grundlegung der Integralrechnung auf dem Begriff des Grenzwerts beruht.

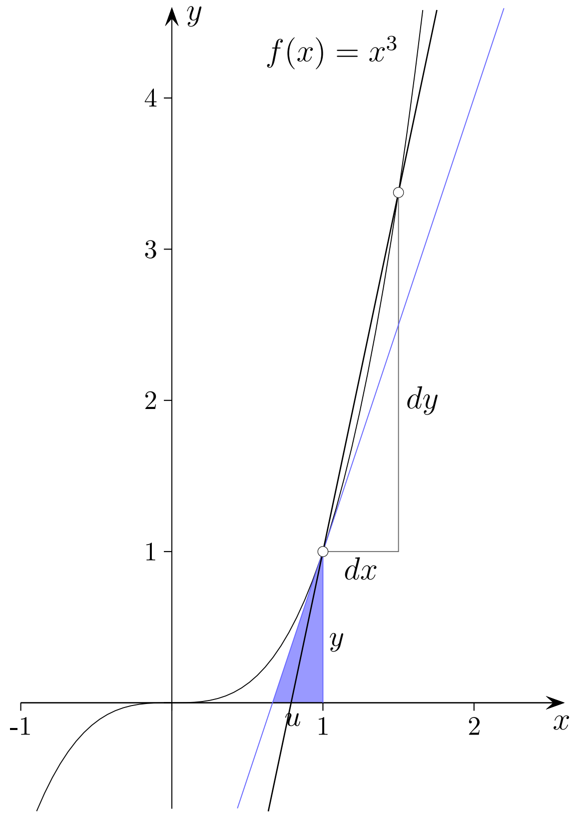
In einem Fragment geht Leibniz auf die Summe einer Reihe ein (engl. Übersetzung):
„Whenever it is said that a certain infinite series of numbers has a sum, I am of the opinion that all that is being said is that any finite series with the same rule has a sum [Partialsumme], and that the error always diminishes as the series increases, so that it becomes as small as we would like.“

[1] Leibniz: „Wenn die Fälle sich kontinuierlich nähern, so dass letzten Endes der eine in den anderen übergeht, so muss das auch für die entsprechenden abhängigen Größen der Fall sein.“

Differentiale

Tangentensteigung für $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
m_2 &= 4{,}75 \\
m_4 &= 3{,}8125 \\
m_8 &= 3{,}390625 \\
m_{16} &= 3{,}191406\ldots \\
m_{32} &= 3{,}094726\ldots \\
m_{64} &= 3{,}047119\ldots \\
m_{128} &= 3{,}023498\ldots \\
m_{256} &= 3{,}011734\ldots \\
m_{512} &= 3{,}005863\ldots \\
m_{1024} &= 3{,}002930\ldots \\
m_{2048} &= 3{,}001465\ldots \\
m_{4096} &= 3{,}000732\ldots \\
m_{8192} &= 3{,}000366\ldots \\
m_{16384} &= 3{,}000183\ldots \\
m_{32768} &= 3{,}000091\ldots \\
\longrightarrow &\quad 3{,}000000\ldots
\end{aligned}$$



m_n ist der Differenzenquotient $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ für $dx = \dfrac{1}{n}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} = \frac{(x^3+3x^2dx+3x(dx)^2+(dx)^3) - x^3}{dx} = 3x^2 + 3x\,dx + (dx)^2 = 3x^2$$

Das Rechnen mit infinitesimalen Größen (Differentiale) dx, dy, d von lat. differentia, stellt eine Kurzschreibweise in der Analysis dar. Hierbei sind verschiedene Interpretationen je nach Kontext zu unterscheiden.
Beim Aufstellen von Differentialgleichungen ist die Vorstellung hilfreich, dass die „unvergleichbar kleinen“ Größen (Leibniz inassignabilis lat., unassignable engl. unangebbar, ability Vermögen) eines Steigungsdreiecks so klein gewählt werden, dass die längste Seite mit dem Kurvenverlauf bis auf einen zu vernachlässigenden Fehler übereinstimmt. Der Grenzwertprozess erfolgt, indem Potenzen der Differentiale, also Fehlerterme, die bei fortschreitender Approximation vernachlässigbar sind, entfallen. $\frac{dy}{dx}$ ist schlussendlich als Tangentensteigung $f'(x_0)$ zu lesen, veranschaulicht als Bruch y/u (y-Wert/Subtangente, siehe blau gefärbtes Steigungsdreieck der Tangente). In den unveröffentlichten Manuskripten *Defense du calcul des Differences, Justification du Calcul des infinitésimales par celuy de l'Algèbre ordinaire* und *Cum prodiisset* >1702 begründet Leibniz die Differenzialrechnung.
Erst als man neben glatten, d. h. lokal linear approximierbaren Kurven Weiteres betrachtete, wurde eine exaktere Grenzwert-Definition erforderlich, also ein hinreichendes und notwendiges Kriterium, mit dem überprüft werden kann, ob z. B. eine Folge von Sekantensteigungen (auch in einer unanschaulichen Situation) konvergiert (eine Zahl erzeugt).

Differentielle Zusammenhänge in der Physik

$$dx = v \cdot dt$$

Ort x, Zeit t, Annahme, dt kann so klein gewählt werden, dass ein linearer Zusammenhang vorliegt

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Geschwindigkeit v

$$x = \int v(t)\,dt = \int \frac{dx}{dt}\,dt = \int dx$$

$$dt = \frac{1}{v} \cdot dx$$

$$t = \int dt = \int \frac{1}{v}\,dx$$

$$v(t) = at + v_0$$

v ändert sich linear mit der Zeit

$$x(t) = \int (at + v_0)\,dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + c$$

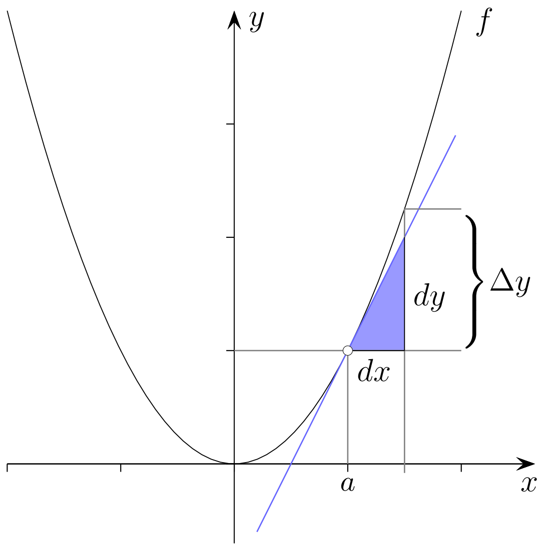
$x(0) = c$

Für Funktionsänderungen an einer vorgegebenen Stelle a gilt:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(a + \Delta x) - f(a) \\ dy &= f'(a) \cdot dx \\ \Delta y &\approx dy \qquad \text{für} \quad \Delta x = dx \end{aligned}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mittlere Änderungsrate

$\frac{dy}{dx} = f'(a)$ lokale Änderungsrate



$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ Bei dieser linearen Beziehung wird die Steigung an der Stelle $x = a$ vorausgesetzt. Leibniz verwendete Differentiale, um die Steigung $f'(a)$ zu ermitteln. Man denke sich die Intervalllänge $\mathrm{d}x$ so klein, dass $|\Delta y - \mathrm{d}x|$ vernachlässigbar klein ist, bzw. $(\mathrm{d}x)^2$ praktisch null ist.

Zitate

Leibniz[1] 1701

„Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man so große oder so kleine Größen, wie nötig ist, damit der Fehler geringer sei, als der gegebene Fehler, [...].“

Berkeley 1734

„And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the ghosts of departed quantities?“

Cauchy[2] 1821

„Wenn die ein und derselben Veränderlichen zugewiesenen numerischen Werte beliebig so abnehmen, dass sie kleiner als jede gegebene Zahl werden, so sagt man, diese Veränderliche wird unendlich klein. Eine Veränderliche dieser Art hat null als Grenzwert.“

Weierstraß 1861

„Wenn nun eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleine Änderungen des Arguments unendlich kleinen Änderungen der Funktion entsprechen, so sagt man, dass dieselbe eine continuierliche Funktion sei.“

Weierstraß präzisierte diese Vorstellung mit der noch heute gebräuchlichen ε-δ-Definition.

Robinson 1961

In der Nonstandard-Analysis wird $\mathbb{R}$ auf den Bereich der hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbb{R}$ erweitert. Eine Größe α ist unendlich klein oder infinitesimal, wenn sie kleiner als alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist, z.B. $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, d.h. wenn sie kleiner als jede reelle Zahl ist.

[1] Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée.

[2] Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variablé de cette espèce a zéro pour limite.

Leibniz' Kalkül, insbesondere 23. Differential 2. Ordnung,
30. Zur Begründung des Infinitesimalkalküls durch Leibniz

Reelle Zahlen

Hyperreelle Zahlen

Startseite