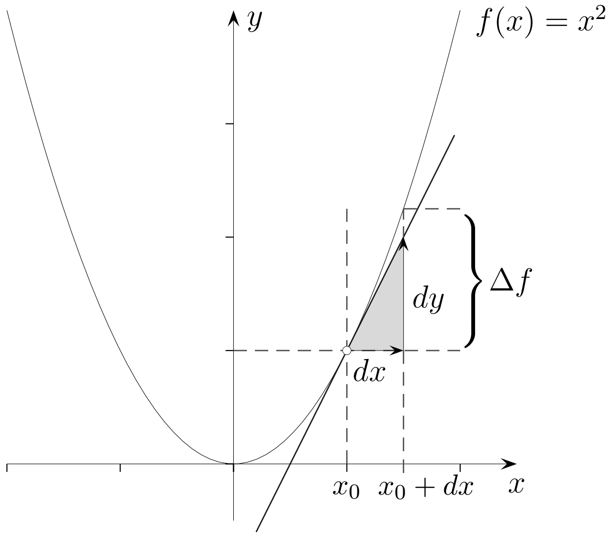
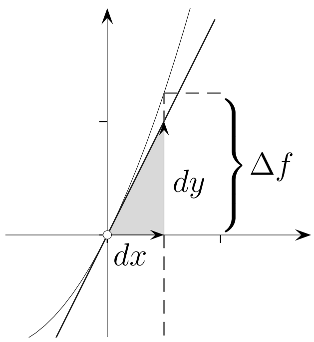
Totales Differential





Wir betrachten die Funktion an der Stelle x_0 und rechnen
den Funktionszuwachs Δf in Abhängigkeit von dx aus.

$$\begin{aligned}\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) &= (x_0 + dx)^2 - x_0^2 \\ &= \underbrace{2x_0\,dx}_{\text{linearer Anteil}} + dx^2 = f'(x_0)\,dx + dx^2\end{aligned}$$

Dies entspricht einer Verschiebung, so dass der Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ im Ursprung landet.
Der lineare Anteil von Δf beträgt $2x_0\,dx$, d.h. $dy = 2x_0\,dx$ oder allgemein $dy = f'(x_0)\,dx$.
dy wird als Differential bezeichnet und ist eine von dx abhängige Variable (lineare Funktion).
Die Differenz $\Delta f - dx$ ist hier dx^2 und wird für kleiner werdendes dx quadratisch kleiner.

<u>alternativer Zugang</u>

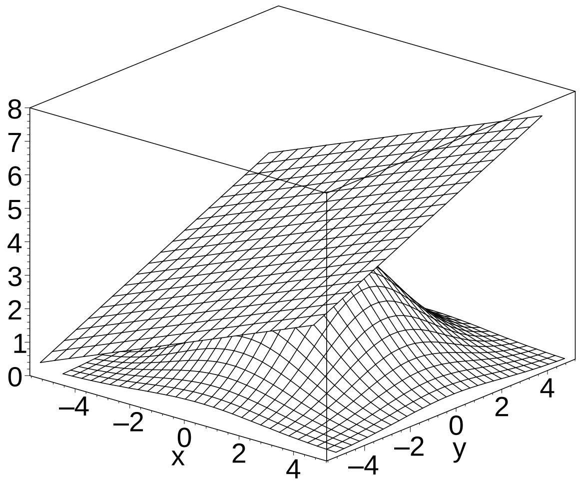
Die Gleichung der Tangente für eine Funktion f im Punkt $P\big(x_0 \mid f(x_0)\big)$ lautet:

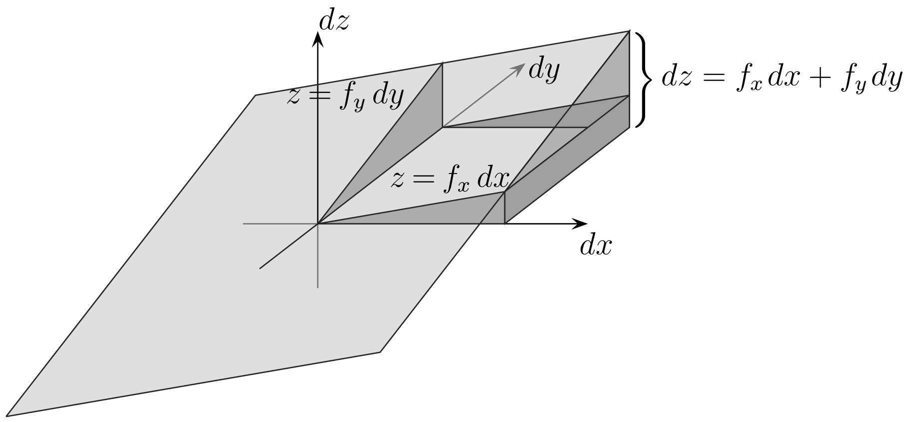
$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\underbrace{y - f(x_0)}_{dy} = f'(x_0) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{dx}$$

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

Totales Differential von $f(x, y)$





Die Gleichung der Tangentialebene für eine Funktion $f(x, y)$ im Punkt $P\big(x_0 \mid y_0\big)$ lautet:

$$z = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + f(x_0, y_0), \qquad f_x,\, f_y \text{ partielle Ableitungen an der Stelle } (x_0 \,|\, y_0)$$

$$\underbrace{z - f(x_0, y_0)}_{dz} = f_x \underbrace{(x - x_0)}_{dx} + f_y \underbrace{(y - y_0)}_{dy}$$

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$$

Das (totale, auch vollständige) Differential $dz = f_x dx + f_y dy$ enthält die gesamte Information über die Ableitung und kann direkt der Grafik entnommen werden. Ein Lesen von unten nach oben begründet die Gleichung der Tangentialebene.

Das totale Differential ist ein Näherung für die Veränderung der Funktion $z = f(x, y)$, wenn wir vom Punkt $P\big(x_0 \mid y_0\big)$ in x-Richtung dx und in y-Richtung dy gehen.