Determinante

Sarrussche Regel oder Jägerzaun-Regel:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \hline - & - & - & & \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Um die Regelmäßigkeit der Termbildung zu entdecken, ordnen wir um:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Die Faktoren je Summand sind aus unterschiedlichen Zeilen und Spalten.
Sie sind in der Matrix wie drei Türme auf dem Schachbrett platziert, die sich nicht gegenseitig bedrohen. Für den 1. Turm bestehen auf der 1. Spalte 3 Möglichkeiten, für den 2. auf der 2. Spalte noch 2 Möglichkeiten. Für den 3. Turm ist nur ein Platz übrig. Daher sind es $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ Summanden.

Für die Bestimmung des Vorzeichens eines Summanden betrachten wir die an 1. Stelle stehenden (schwarzen) Zeilenindizes. Also z. B. für $a_{11}a_{32}a_{23}$ (1,3,2). Diese Reihenfolge geht in (1,2,3) über, indem 2 Zahlen vertauscht werden (1 Transposition).
Für (2,3,1) werden 2 Transpositionen benötigt. Das Vorzeichen wird durch

$(-1)^{\text{Anzahl der benötigten Transpositionen}}$ bestimmt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun wird die math. Schreibweise

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \Big(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{3} a_{\sigma(i),i} \Big)$$

verständlich, die zudem auf $n \times n$-Matrizen erweitert werden kann.

Cramersche Regel

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & = & u_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & = & u_2 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & = & u_3 \end{array}$$

oder $\quad A\,\vec{x} = \vec{u}$

mit $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & u_1 & a_{13} \\ a_{21} & u_2 & a_{23} \\ a_{31} & u_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3 \end{vmatrix}}{\det A}$$

Die Unterdeterminanten ergeben sich durch Streichen von Zeilen und Spalten.
Die Determinante wurde hier durch Entwicklung nach der 1. Spalte definiert.
Für die Vorzeichen gilt:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Tipp: Verwende jeweils die Zeile oder Spalte mit den <u>meisten</u> Nullen.