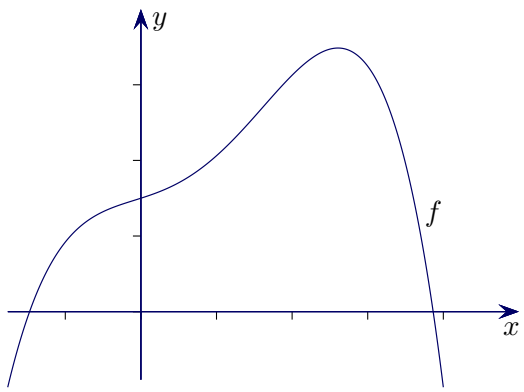
# Vorzeichenwechsel




Seien $a_i > 0$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_4 x^4 && \text{1 Vorzw, 1 pos. Nullst.} \\
& \phantom{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 && \text{1 Vorzw, 1 pos. Nullst.} \\
& \phantom{=} a_0 + a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 && \text{1 Vorzw, 1 pos. Nullst.}
\end{aligned}
$$

Es stellt sich die Frage, ob ein allgemeiner Zusammenhang besteht.

# Descartes Vorzeichenwechsel 1637

$f(x) = a_1 x + a_0$
Wenn $a_1$ und $a_0$ unterschiedliches Vorzeichen haben ($a_1 a_0$, 1 Vorzeichenwechsel),
dann liegt genau eine 1 positive Nullstelle vor, $x_N = -\frac{x_0}{x_1} > 0$.
Bei gleichem Vorzeichen (0 Vorzeichenwechsel) ist die Nullstelle negativ.

| | | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $= x^2 - 4x + 3$ | 2 Vorzeichenwechsel |
| | $= (x-1)(x-3)$ | 2 pos. Nullstellen |
| $(x-2)f(x)$ | $= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ | 3 Vorzeichenwechsel |
| | $= (x-2)(x-1)(x-3)$ | 3 pos. Nullstellen |
| $(x+2)f(x)$ | $= x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ | 2 Vorzeichenwechsel |
| | $= (x+2)(x-1)(x-3)$ | 2 pos. Nullstellen |
| $g(x)$ | $= x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ | 3 Vorzeichenwechsel |
| | $= (x-1)(x^2 - 2x + 2)$ | 1 pos. Nullstelle |
| $h(x)$ | $= x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8$ | 5 Vorzeichenwechsel |
| | $= (x-1)^2(x-2)^3$ | 1 doppelte pos. Nullstelle, 1 dreifache pos. Nullstelle |

Diese Beobachtungen lassen die Descartes-Regel vermuten:
Die Anzahl der pos. reellen Wurzeln eines Polynoms (gezählt mit ihrer Vielfachheit) ist entweder gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge der Koeffizienten oder um eine gerade Zahl geringer.

alternativ formuliert
Die Anzahl der pos. Nullstellen von $f(x)$ ist höchstens die Anzahl $k$ der Vorzeichenwechsel.
Die Anzahl pos. Nullstellen ist entweder $k$ oder $k-2$ oder $k-4$ oder $\ldots$

Nullen werden aus der Folge der Koeffizienten gestrichen.
Sind alle Nullstellen reell, gilt die Gleichheit.

Das Polynom $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ hat einen Vorzeichenwechsel zwischen dem zweiten und dritten Term. Daher hat es genau eine pos. Wurzel.

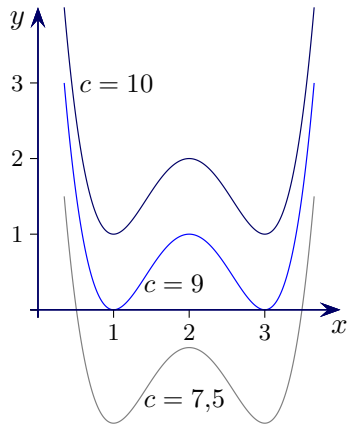
Bei einem dreimaligen Vorzeichenwechsel der Koeffizienten hat das Polynom entweder 3 pos. Nullstellen oder $3 - 2 = 1$ pos. Nullstelle.

Ein reelles Polynom ohne Vorzeichenwechsel hat keine pos. Wurzel.

Durch Betrachten von $f(-x)$ ergibt sich eine entsprechende Aussage
für die Anzahl negativer Nullstellen von $f(x)$.

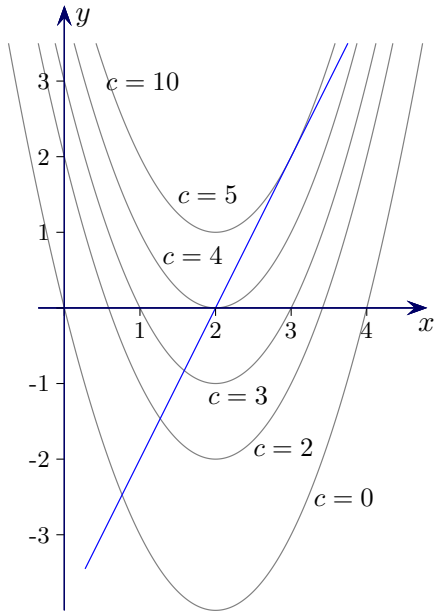
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + c$

| | |
|---|---|
| $c > 0$, | 4 Vorzeichenwechsel |
| $c > 9$, | 0 Nullst. |
| $c = 9$, | 2 doppelte pos. Nullst. |
| $8 < c < 9$, | 4 pos. Nullst. |
| $c = 8$, | 3 pos. Nullst., davon 1 doppelt |
| $0 < c < 8$, | 2 pos. Nullst. |




Budan 1807 und Fourier 1820 fanden eine obere Schranke
für die Anzahl $m$ reeller Nullstellen in einem Intervall.
Sturm gelang 1835 die exakte Bestimmung von $m$.

# Descartes Vorzeichenregel Beweisidee




$f(x) = x^2 - 4x + c$ $\quad$ $c \leq 0$, 1 Vorzw, 1 pos. Nullst.

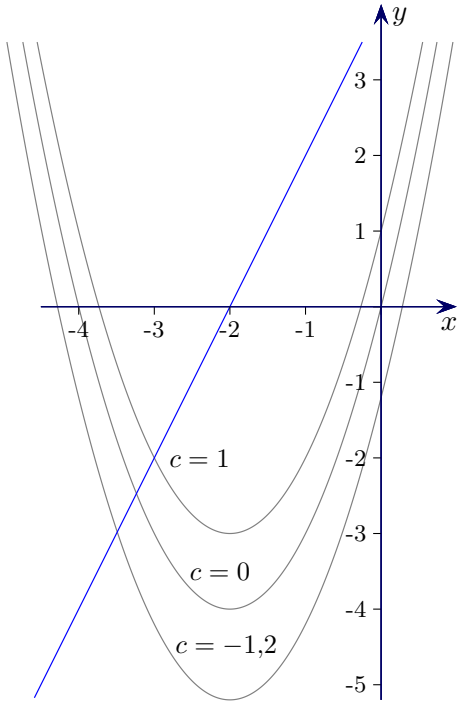
$0 < c < 4$, 2 Vorzw, 2 pos. Nullst.

$c = 4$, 1 doppelte pos. Nullst.

$c > 4$, 2 Vorzw, 0 pos. Nullst.

$f'(x) = 2x - 4$ $\quad$ 1 Vorzw, 1 pos. Nullst.

$f'$ und $f$ haben für $c \leq 0$ gleiche Anzahl der Vorzeichenwechsel und der pos. Nullstellen.
Für $c > 0$ nimmt die Anzahl $k$ der Vorzeichenwechsel gegenüber $f'$ um 1 zu.
Die Anzahl der pos. Nullstellen kann sich um 1 erhöhen, eventuell entsteht eine doppelte Nullstelle, bzw. $f$ hat keine Nullstelle, die Anzahl ist dann $k - 2 = 0$.



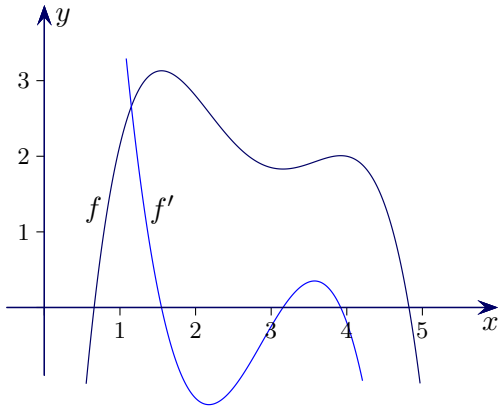

$f(x) = x^2 + 4x + c$ $\quad$ $c \geq 0$, 0 Vorzw, 0 pos. Nullst.

$c < 0$, 1 Vorzw, 1 pos. Nullst.

$f'(x) = 2x + 4$ $\quad$ 0 Vorzw, 0 pos. Nullst.

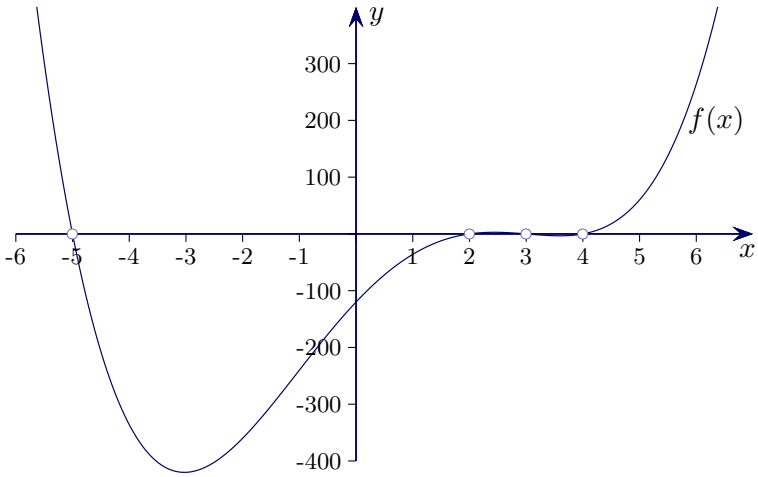
Letztlich erfolgt der Nachweis durch vollständige Induktion über $n$, $n$ ist der Grad von $f$ und $n - 1$ der Grad von $f'$.

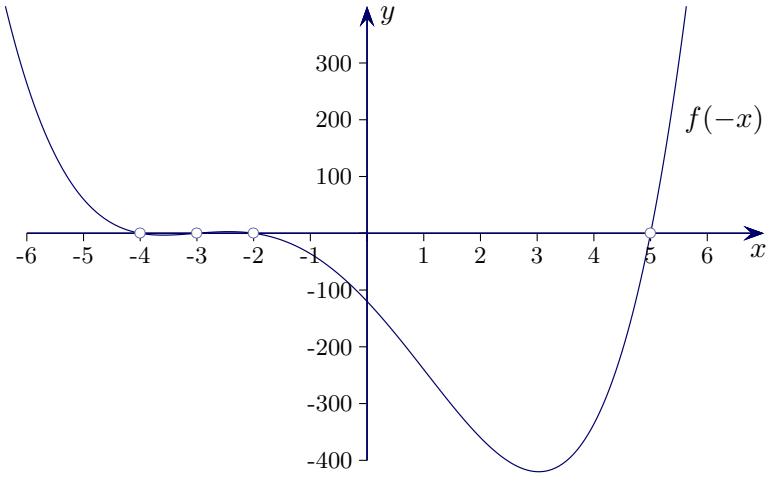
Berücksichtigt wird:
Eine $m$-fache Nullstelle von $f$ ist eine $(m - 1)$-fache Nullstelle von $f'$ (Produktregel). Die Anzahl der Nullstellen von $f'$ zwischen zwei benachbarten Nullstellen von $f$ ist mit Vielfachheiten gezählt ungerade.




$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 && \text{3 Vorzw, 3 pos. Nullst.} \\ &= (x-2)(x-3)(x-4)(x+5) && \text{Polynome aus Descartes La Géométrie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 && \text{1 Vorzw, 1 pos. Nullst.} \\ &= (x+2)(x+3)(x+4)(x-5) \end{aligned}$$



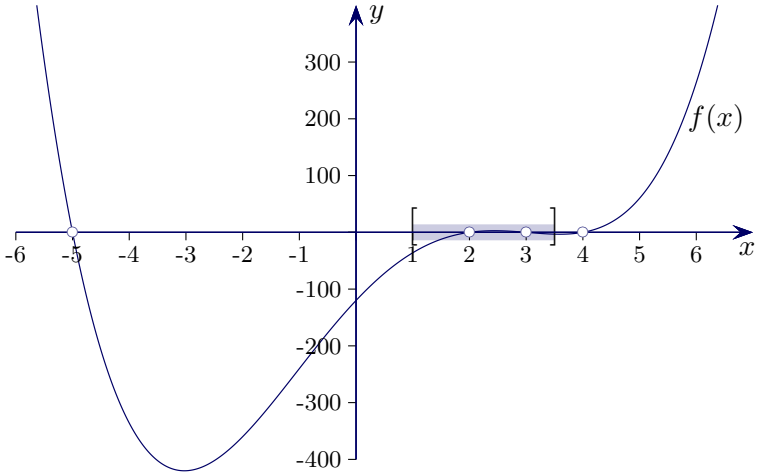




Descartes unterschied zwischen *vraies/fausses racines* (wahre/falsche also pos./neg. Wurzeln).
„À savoir il y en peut avoir autant de vraies, que les signes + & − s'y trouvent de fois estre changés; & autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes + ou deux signes − qui s'entresuivent.“

„Es kann nämlich so viele wahre Wurzeln geben, wie die Vorzeichen + und − in ihnen geändert werden können; und so viele falsche, wie in ihnen zwei + Zeichen oder zwei − Zeichen aufeinanderfolgen.“

# Budan Fourier

Sei $f(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $\boldsymbol{V}(f(x))$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Koeffizientenfolge von $f(x)$.




Satz Budan
Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms im Intervall $(a, b)$ ist entweder $\boldsymbol{V}(f(x+a)) - \boldsymbol{V}(f(x+b))$ oder um eine gerade Zahl kleiner.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 && \text{3 Vorzw, 3 pos. Nullst.}\\
f(x+1) &= x^4 - 25x^2 + 60x - 36 && \text{3 Vorzw}\\
f(x+3{,}5) &= x^4 + 10x^3 + 12{,}5x^2 - 2{,}5x - 3{,}1875 && \text{1 Vorzw}\\
\boldsymbol{V}(f(x+1)) - \boldsymbol{V}(f(x+5)) &= 3 - 1 = 2
\end{aligned}$$

Der Satz Budan folgt aus der Vorzeichenregel von Descartes, $f(x)$ wird lediglich verschoben.
$f(x)$ hat rechts von $a$, $a > 0$, genausoviele Nullstellen wie $f(x+a)$ für $x > 0$.

Sei $\boldsymbol{W}(x)$ für festes $x$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)$, $f$ vom Grad $n$.

Satz von Budan-Fourier
Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms im Intervall $(a, b)$ ist entweder $\boldsymbol{W}(a) - \boldsymbol{W}(b)$ oder um eine gerade Zahl kleiner, Voraussetzung $a, b$ sind keine Nullstellen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 && \text{3 pos. Nullst.}\\
f(1),\, f'(1),\, f''(1),\, f'''(1),\, f^{(4)}(1) &= -36,\, 60,\, -50,\, 0,\, 24 && \text{3 Vorzw}\\
f(3{,}5),\, f'(3{,}5),\, f''(3{,}5),\, f'''(3{,}5),\, f^{(4)}(3{,}5) &= -3{,}19,\, -2{,}5,\, 25,\, 60,\, 24 && \text{1 Vorzw}\\
\boldsymbol{V}(1) - \boldsymbol{V}(2) &= 3 - 1 = 2
\end{aligned}$$

Für den Satz von Budan-Fourier wird die (abbrechende) Taylorentwicklung um $x = a$ benötigt.

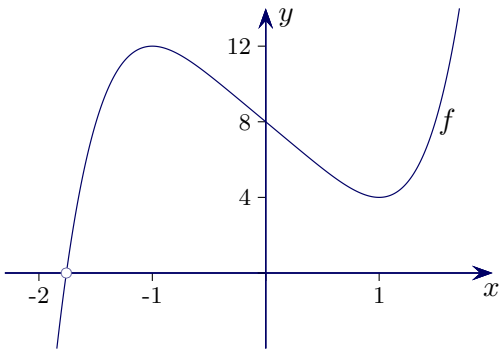
Mit $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ erhalten wir

die Koeffizientenfolge für $f(x+a) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}x + \dfrac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$

# Sturmsche Kette 1829

Wie viele reelle Nullstellen hat ein Polynom in $[a, b]$?

$$\begin{aligned} P_0(x) &= f(x) \\ P_1(x) &= f'(x) \\ P_i(x) &= -\text{Rest bei Division von } P_{i-2} \text{ durch } P_{i-1} \\ &\quad \text{d.h. } P_{i-2} = Q \cdot P_{i-1} + (-P_i) \\ &\quad \text{Iteration bis } P_k \text{ konstant} \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^5 - 5x + 8 \\ P_1(x) &= 5x^4 - 5 \qquad (x^5 - 5x + 8) : (5x^4 - 5) = \frac{1}{5}x + \frac{-4x+8}{5x^4-5} \\ P_2(x) &= 4x - 8 \qquad (5x^4 - 5) : (4x - 8) = \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 5x + 10 + \frac{75}{4x-8} \\ P_3(x) &= -75 \end{aligned}$$

Das Vorgehen ist im Wesentlichem der Divisionsalgorithmus zur Bestimmung des ggT von $f(x)$ und $f'(x)$, lediglich beim Rest wird das Vorzeichen gewechselt. Da der Polynomgrad in jedem Schritt verringert wird, endet das Verfahren mit einer Konstanten ungleich null. Es wird vorausgesetzt, dass $f(x)$ nur einfache Nullstellen hat. Andernfalls wird die Folge $P_0, \ldots, P_r$ durch $\frac{P_0}{P_r}, \ldots, \frac{P_r}{P_r}$ ersetzt, $P_r = \text{ggT}(f, f')$. Es gilt:

$f(x)$ hat eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ eine gemeinsame Nullstelle haben.

Sei $\boldsymbol{V}(x)$ für festes $x$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$.

Satz von Sturm
Ein Polynom hat auf dem Intervall $[a, b]$ genau $\boldsymbol{V}(a) - \boldsymbol{V}(b)$ reelle Nullstellen, vorausgesetzt, das Polynom ist an den Stellen $a$ und $b$ nicht null.

$x = -2 \qquad -14, 75, -16, -75$
$x = 2 \qquad 30, 75, 0, -75$

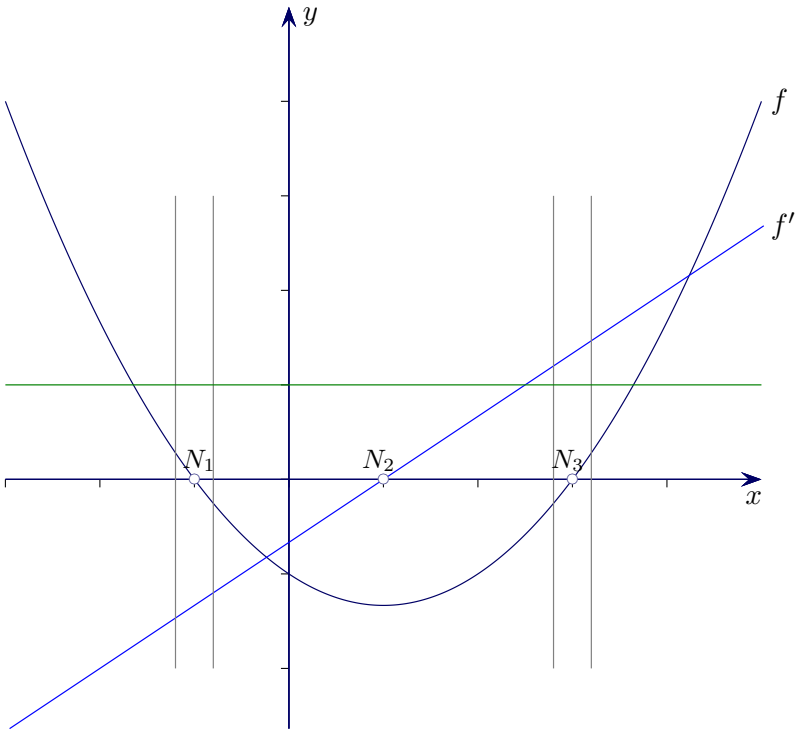
$$\text{Anzahl}_{\text{Nullstellen auf } [-2,2]} = \boldsymbol{V}(-2) - \boldsymbol{V}(2) = 2 - 1 = 1$$

Sturmsche Funktionen $(P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k)$

$$\begin{aligned} P_0 &= Q_0 P_1 - P_2 \\ P_1 &= Q_1 P_2 - P_3 \\ P_2 &= Q_2 P_3 - P_4 \\ &\ldots \\ P_k &= K \neq 0 \end{aligned}$$

Sei z.B. $P_3(a) = 0$, dann folgt $P_2(a) = -P_4(a)$ und aus dem Triple $P_2, P_3, P_4$ (z.B.) $+1, +1, -1$ wird beim Passieren von $a$ $+1, 0, -1$ und dann $+1, -1, -1$. Die Anzahl der Vorzeichenwechsel ändert sich hierdurch nicht.

# Sturmsche Idee




| | $f(x)$ | $f'(x)$ | |
|---|---|---|---|
| | | | Nur das Vorzeichen ist hier relevant. |
| $x < N_1$ | $+1$ | $-1$ | Die Vorzeichen können der Grafik entnommen werden. |
| $N_1 < x < N_2$ | $-1$ | $-1$ | |
| $N_2 < x < N_3$ | $-1$ | $+1$ | Zwischen benachbarten Nullstellen erfolgt kein Vorzeichenwechsel. |
| $x > N_3$ | $+1$ | $+1$ | |

Beim Überschreiten von links nach rechts der Nullstellen $N_1$ und $N_3$ von $f$ fällt der Vorzeichenwechsel weg, z. B. für $N_1 \quad +1 \quad -1 \quad \curvearrowright \quad -1 \quad -1$.

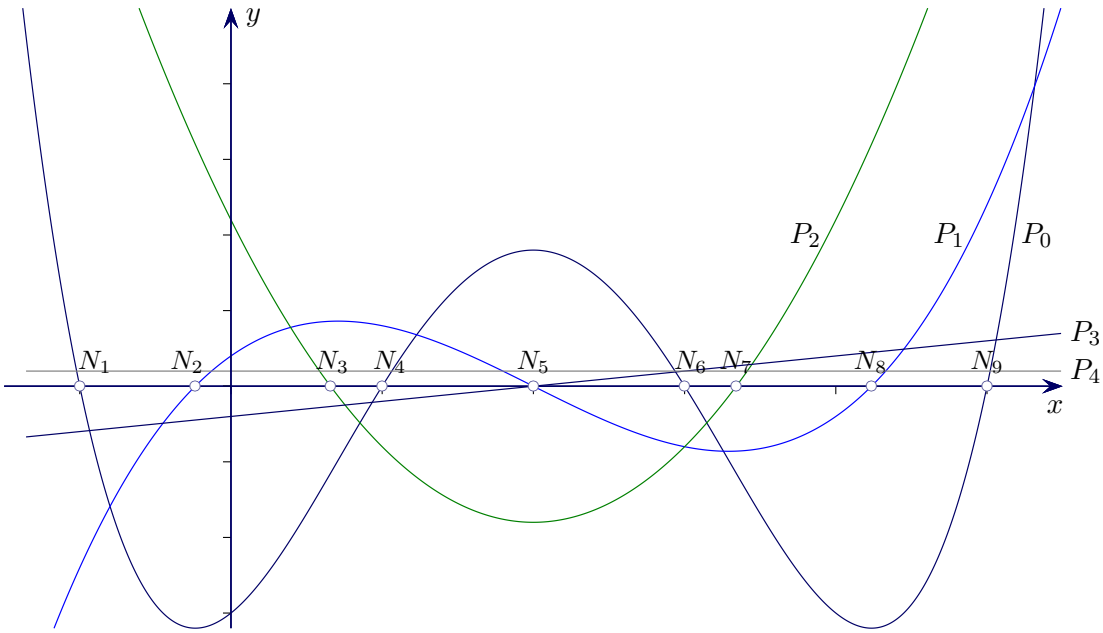
Um das Zählen der Nullstellen zu ermöglichen, wird eine weitere (konstante) Funktion hinzugenommen.

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $x < N_1$ | $+1$ | $-1$ | $+1$ |
| $N_1 < x < N_2$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ |
| $N_2 < x < N_3$ | $-1$ | $+1$ | $+1$ |
| $x > N_3$ | $+1$ | $+1$ | $+1$ |

Für $x < N_1$ haben wir 2 Vorzeichenwechsel, für $x > N_3$ keinen Vorzeichenwechsel.

Zu beachten ist, dass beim Überschreiten von $N_2$ und dem Wechsel von $f'$ von $-1$ zu $+1$ das Tripel $f$, $f'$, 1 unterschiedliche Randwerte hat und die Anzahl der Vorzeichenwechsel sich nicht ändert. Eine geignete Wahl für die weitere Funktion ist der negative Rest bei Division von $f(x)$ durch $f'(x)$. Da es nur auf die Vorzeichen ankommt, können die Funktionen zur Vereinfachung mit Konstanten multipliziert werden.

# Sturmsche Kette  Beispiel




$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 \\
P_1(x) &= x^3 - 6x^2 + 7x + 2 && \text{vereinfacht, } P_1(x) = \frac{1}{4} f'(x) \\
P_2(x) &= 5x^2 - 20x + 11 && \text{Polynomdivision} \\
P_3(x) &= x - 2 && \text{vereinfacht, Rest} = -\frac{16}{5}x + \frac{32}{5} \\
P_4(x) &= 1 && \text{vereinfacht, Rest} = -9
\end{aligned}
$$

| $x = -1{,}1$ | $5{,}3$ | $-14{,}3$ | $39{,}1$ | $-3{,}1$ | $1$ | Nur das Vorzeichen ist hier relevant. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x < N_1$ | $+1$ | $-1$ | $+1$ | $-1$ | $+1$ | Die Vorzeichen können der Grafik |
| $N_1 < x < N_2$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | $-1$ | $+1$ | entnommen werden. |
| $N_2 < x < N_3$ | $-1$ | $+1$ | $+1$ | $-1$ | $+1$ | |
| $N_3 < x < N_4$ | $-1$ | $+1$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | |
| $N_4 < x < N_5$ | $+1$ | $+1$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | |
| $N_5 < x < N_6$ | $+1$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | $+1$ | |
| $N_6 < x < N_7$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | $+1$ | |
| $N_7 < x < N_8$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ | $+1$ | $+1$ | |
| $N_8 < x < N_9$ | $-1$ | $+1$ | $+1$ | $+1$ | $+1$ | Zwischen benachbarten Nullstellen |
| $x > N_9$ | $+1$ | $+1$ | $+1$ | $+1$ | $+1$ | erfolgt kein Vorzeichenwechsel. |

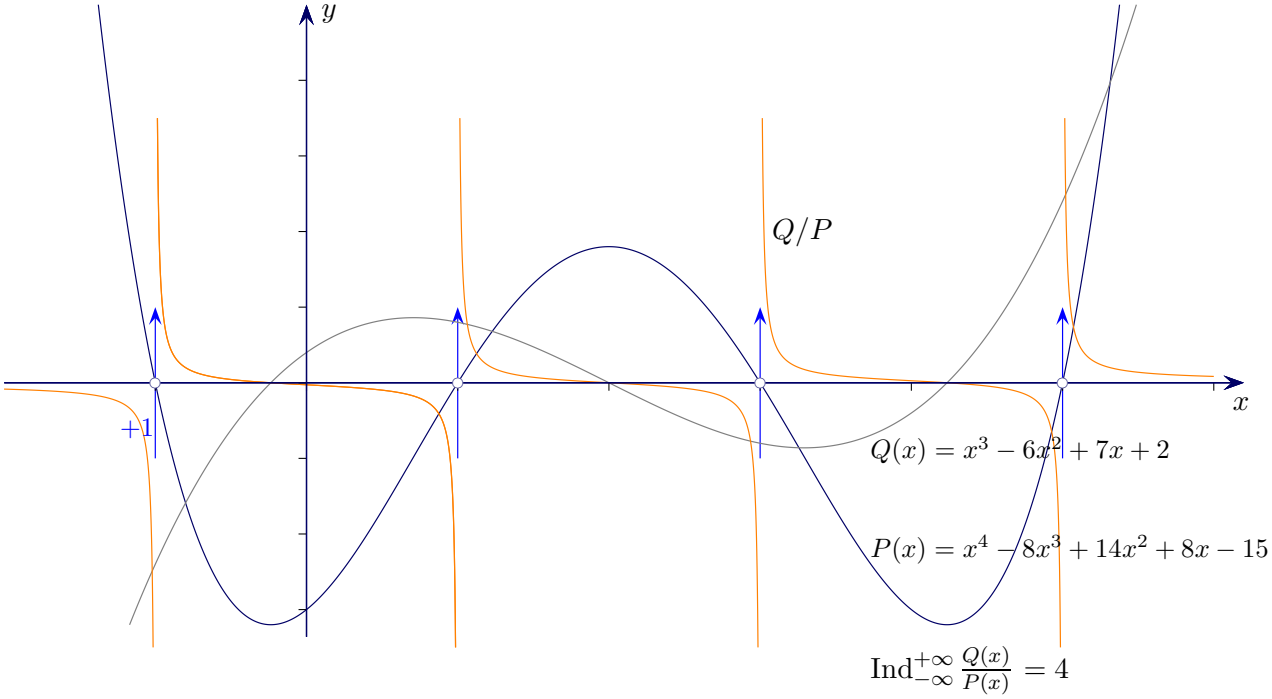
Beim Überschreiten von links nach rechts (farbig hervorgehoben) der Nullstellen $N_1$, $N_4$, $N_6$, $N_9$ von $f_0$ verringert sich die Anzahl der Vorzeichenwechsel jeweils um 1, z. B. für $N_1$ $\quad +1 \quad -1 \quad \curvearrowright \quad -1 \quad -1$.

Bei den übrigen Nullstellen liegen Übergänge der Art

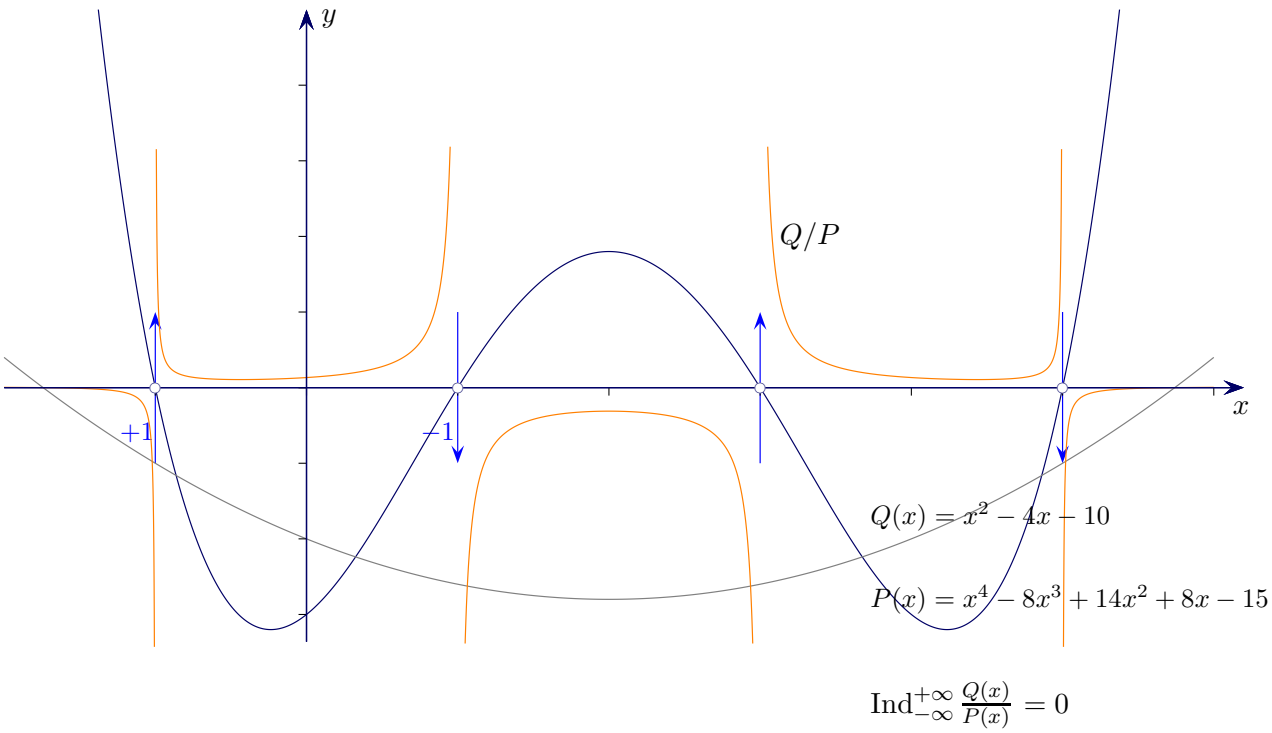
$-1 \quad -1 \quad +1 \quad \curvearrowright \quad -1 \quad +1 \quad +1$ für $N_2$,

$+1 \quad +1 \quad -1 \quad \curvearrowright \quad +1 \quad -1 \quad -1$ für $N_3$ vor, die Anzahl der Vorzeichenwechsel ändert sich nicht.

# Cauchy-Index



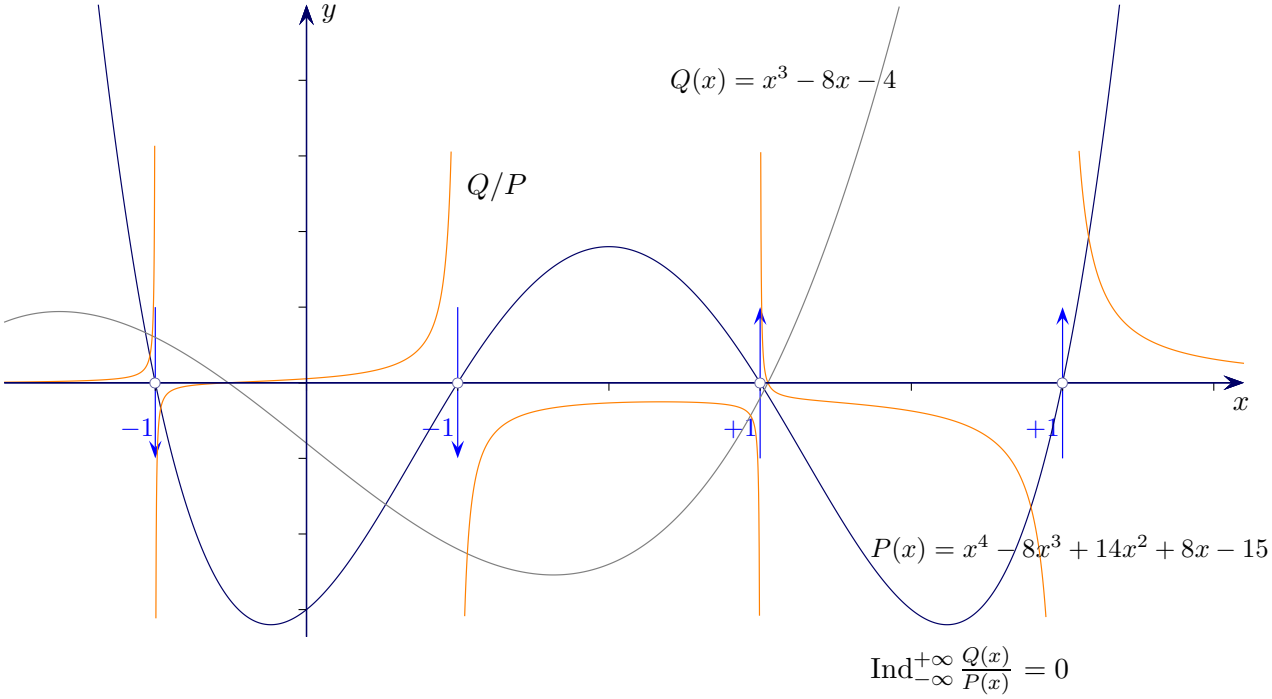

Der Cauchy-Index $\mathrm{Ind}_a^b \frac{Q(x)}{P(x)}$ auf einem Intervall $[a, b]$ einer rationalen Funktion ist die Anzahl der Sprünge von $-\infty$ nach $+\infty$ vermindert um die Anzahl der Sprünge von $+\infty$ nach $-\infty$.




Mit der Partialbruchzerlegung $\frac{x^2-4x-10}{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)} = \frac{5}{48(x+1)} + \frac{-13}{16(x-1)} + \frac{13}{16(x-3)} + \frac{-5}{48(x-5)}$

kann der Cauchy-Index als Summe der Zählervorzeichen berechnet werden.

# Cauchy-Index




$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 \\
P_1(x) &= x^3 - 8x - 4 \\
P_2(x) &= -22x^2 + 52x + 47 && \text{Polynomdivision} \\
P_3(x) &= 67x - 254 && \text{vereinfacht, Rest} = -67/242\,x + 127/121 \\
P_4(x) &= 1 && \text{vereinfacht, Rest} = -323433/4489
\end{aligned}
$$

Der Cauchy-Index $\mathrm{Ind}_a^b \frac{Q(x)}{P(x)}$ auf einem Intervall $[a, b]$ einer rationalen Funktion ist die Anzahl der Sprünge von $-\infty$ nach $+\infty$ vermindert um die Anzahl der Sprünge von $+\infty$ nach $-\infty$.

Der Cauchy-Index einer rationalen Funktion $\frac{Q(x)}{P(x)}$ kann mit der modifizierten Sturm-Kette $P(x)$, $Q(x)$, … ($Q(x)$ statt $f'(x)$) berechnet werden: $\mathrm{Ind}_a^b \frac{Q(x)}{P(x)} = \boldsymbol{V}(a) - \boldsymbol{V}(b)$.

$x = 0$ $\quad -1, -1, +1, -1, +1$

$x = 6$ $\quad +1, +1, -1, +1, +1$ $\qquad \mathrm{Ind}_0^6 \frac{Q(x)}{P(x)} = \boldsymbol{V}(0) - \boldsymbol{V}(6) = 3 - 2 = 1$

$x = -2$ $\quad +1, +1, -1, -1, +1$

$x = 2$ $\quad +1, -1, +1, -1, +1$ $\qquad \mathrm{Ind}_{-2}^2 \frac{Q(x)}{P(x)} = \boldsymbol{V}(-2) - \boldsymbol{V}(2) = 2 - 4 = -2$

$x = -\infty$ $\quad +1, -1, -1, -1, +1$

$x = +\infty$ $\quad +1, +1, -1, +1, +1$ $\qquad \mathrm{Ind}_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} = \boldsymbol{V}(-3) - \boldsymbol{V}(6) = 2 - 2 = 0$

$x = -1{,}1$ $\quad +1, +1, -1, -1, +1$ $\qquad$ Überschreiten von Nullstellen

$x = -0{,}9$ $\quad -1, +1, -1, -1, +1$ $\qquad \Delta\boldsymbol{V} = 2 - 3 = -1$

$x = 0{,}9$ $\quad -1, -1, +1, -1, +1$

$x = 1{,}1$ $\quad +1, -1, +1, -1, +1$ $\qquad \Delta\boldsymbol{V} = 3 - 4 = -1$

$x = 2{,}9 \qquad +1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1$

$x = 3{,}05 \qquad -1,\ -1,\ +1,\ -1,\ +1 \qquad \Delta \boldsymbol{V} = 4 - 3 = 1$

$x = 4{,}9 \qquad -1,\ +1,\ -1,\ +1,\ +1$

$x = 5{,}1 \qquad +1,\ +1,\ -1,\ +1,\ +1 \qquad \Delta \boldsymbol{V} = 3 - 2 = 1$

Beim Überschreiten (von links) einer Nullstelle von $P(x)$ geht ein Vorzeichenwechsel verloren oder kommt neu hinzu, je nachdem $\frac{Q(x)}{P(x)}$ von $-\infty$ zu $+\infty$ wechselt oder von $+\infty$ zu $-\infty$.

Startseite