Substitutionen in Differentialgleichungen

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{y}{x}$$ Substitution

$$\iff \quad y = u \cdot x$$

$$\implies \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$$ Ableitung mit der Produktregel

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u)$$ DGL kann separiert werden.

$$\iff \quad \frac{du}{dx}x = f(u) - u$$

$$\iff \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

Anschließend muss rücksubstituiert werden.
Von diesem Lösungsansatz kann ausgegangen werden.

Weitere Substitutionen sind möglich.

Beispiel: $$y' = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad y(1) = 1$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{xy}} = \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{u} + u} \qquad = f(u)$$

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ldots$$

$$-\int \frac{1+u^2}{u^3}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ldots$$

$$-\int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \qquad \implies \qquad x^2 = 2y^2(C + \ln|\,y\,|),\ C = \tfrac{1}{2},\ x = \sqrt{y^2(1 + 2\ln|\,y\,|)}$$

Der Graph der Lösungsfunktion ist hiermit erkennbar.

Substitutionen in Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
& y' &=& \ (x+y)^2, \quad y(1) = -1 \\
& u &=& \ x+y \\
\iff \quad & y &=& \ u-x \\
\implies \quad & \frac{dy}{dx} &=& \ \frac{du}{dx} - 1 \\
& \frac{du}{dx} - 1 &=& \ u^2 \\
\iff \quad & \int \frac{du}{u^2+1} &=& \ \int dx \\
& \arctan(u) &=& \ x + C \\
& \arctan(x+y) &=& \ x + C \\
& y &=& \ \tan(x+C) - x \\
& y &=& \ \tan(x-1) - x
\end{aligned}
$$

DGL kann separiert werden.